

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE INGENIERÍA

DEPARTAMENTO DE HIDRÁULICA



CÁTEDRA DE “HIDRÁULICA GENERAL” (69.01)

**“FUNDAMENTOS DE ANÁLISIS
MATEMÁTICO
Y SU APLICACIÓN A LA HIDRÁULICA”**

Ing. Luis E. Pérez Farrás

- Enero 2001-



FUNDAMENTOS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO y su aplicación a la hidráulica

INDICE

1-GENERALIDADES Y OBJETIVOS	2
2- CONCEPTOS FUNDAMENTALES MATEMÁTICOS Y DEL MEDIO CONTÍNUO	3
2.1- CAMPOS	3
2.2- PARTÍCULA FLUIDA Y MEDIO CONTINUO	3
2.3- LÍNEAS QUE DESCRIBEN EL ESCURRIMIENTO - TUBO DE CORRIENTE	4
A) TRAYECTORIA	4
B) LÍNEA DE CORRIENTE	4
C) TUBO DE CORRIENTE	5
2. 4-FLUJO DE UN VECTOR - CAUDAL - ESCURRIMIENTO -VELOCIDAD MEDIA	5
2.5- CIRCULACIÓN	7
2.6- ROTOR	7
2.7- DIVERGENCIA	8
2. 8-DIFERENCIAL TOTAL EXACTA	10
2. 9- VECTOR GRADIENTE	10
3- COORDENADAS INTRÍNSECAS	11
3-1- GENERALIDADES	11
3.2- DEFINICIÓN E INTERPRETACIÓN	12
3-3- DERIVADAS PARCIALES EN COORDENADAS INTRÍNSECAS	12
3-4- ESCURRIMIENTOS UNIDIMENSIONALES	2
A) LA SECCIÓN TRANSVERSAL	2
B) LA EXTENSIÓN AL “TUBO DE CORRIENTE”	2
3.4- EL VECTOR VELOCIDAD EN COORDENADAS INTRÍNSECAS	3
3.5- EL VECTOR ACELERACIÓN EN COORDENADAS INTRÍNSECAS	3



FUNDAMENTOS DE ANÁLISIS MATEMÁTICO y su aplicación a la hidráulica

1-GENERALIDADES Y OBJETIVOS

Muchos años de experiencia en la enseñanza de la materia básica “Hidráulica general” me han llevado a la conclusión que un capítulo como el presente, destinado a la revisión por parte de los cursantes de “Hidráulica General” de los conceptos matemáticos inherentes al “Análisis Vectorial” (ya analizados por los alumnos en “Análisis 2”) constituye una necesidad.

En efecto, la aplicación de los conceptos estudiados con un importante grado de abstracción en los cursos de base, necesitan, a mi entender, **de un capítulo de “transición” que posibilite evaluar la aplicación a la problemática física de la asignatura**, en especial cuando, como en el caso que nos ocupa, los fundamentos de la misma requieren de su aplicación extensa e intensamente.

Se percibe en un muy importante porcentaje del alumnado, gran dificultad para evaluar conceptualmente la simbología que se utiliza como lenguaje obligado de las ecuaciones básicas de la Mecánica del Continuo.

Por ello el Objetivo central del presente texto, es el de analizar los Conceptos Básicos del Análisis Vectorial, tal vez con un rigor matemático objetable por lo poco profundo, **pero con una interpretación física que posibilite comprender su gran utilidad en la formulación básica de la materia. También se pretende vincularlos con los conceptos de la Mecánica del Continuo, que constituyen el punto de partida de la misma.**

Es destacable el hecho que en general, **el equilibrio de fuerzas es un concepto rector de la Ingeniería Civil**. En particular en nuestra materia, dos de sus cuatro ecuaciones fundamentales están relacionadas con el equilibrio de las fuerzas dinámicas (surgen de los dos primeros principios de la Dinámica) mientras que una tercera, basada en el principio de la conservación de la masa, está ampliamente vinculada con los conceptos básicos del “Análisis Vectorial”. Es decir las magnitudes vectoriales y los conceptos relevantes de “Análisis 2”, son de aplicación casi excluyente en los fundamentos de la materia que nos ocupa.

Por otra parte., la invariancia de la expresiones en notación vectorial, es decir su independencia del sistema de coordenadas que se necesite, es otra virtud, que amerita su uso generalizado . Conocida la expresión, su utilización en el sistema de coordenadas más adecuado a cada aplicación, no sólo brinda una concepción general y amplia del conocimiento de la misma, sino que además implica una fácil adaptación al sistema elegido.

En particular se hará amplia referencia a la aplicación del sistema de “Coordenadas Intrínsecas” (Triedro de Frenet), el que los alumnos estudian casi como una “rareza” en la materia correspondiente, sin sospechar la enorme importancia que tiene en la Ingeniería en General y en la Hidráulica en particular.

Como recomendación a los alumnos para encarar el análisis del presente texto se les sugiere un análisis de su contenido hasta el numeral 3.3- en un comienzo y previo a encarar los capítulos de Ecuaciones Fundamentales (2,3,4 y 5). El resto conviene sea consultado previamente a y durante el estudio de la Cinemática (Cap.3) y ser tenido en cuenta en los capítulos 4 y 5, cuando las ecuaciones fundamentales de la Dinámica son aplicadas al tubo de corriente (Escurrimientos unidimensionales)

2- CONCEPTOS FUNDAMENTALES MATEMÁTICOS Y DEL MEDIO CONTÍNUO

2.1- CAMPOS

En un **Campo** cada punto del espacio cartesiano de coordenadas x, y, z presenta un valor numérico de una dada función $f(x; y; z)$ continua y derivable hasta el segundo orden de derivación.

Si la función representa una magnitud física escalar, en cada punto del espacio la propiedad física tendrá un determinado valor numérico y único $f(a; b; c)$, siendo a, b y c los valores de las coordenadas x, y, z del punto analizado.

Por ejemplo, las propiedades: masa específica ρ , peso específico γ , presión p y temperatura t , constituyen ejemplos evidentes de funciones de punto del espacio de tres dimensiones.

En cambio, si la función representa una propiedad física vectorial, en cada punto del espacio, para los valores a, b y c , se tiene un vector $\vec{v}(x; y; z)$.

Los campos de velocidades \vec{V} , aceleraciones \vec{a} y rotores $\text{rot}\vec{V}$, constituyen ejemplos íntimamente relacionados con los desarrollos que posteriormente tendrán lugar.

2.2- PARTÍCULA FLUIDA Y MEDIO CONTINUO

Es la menor porción de sustancia fluida lo suficientemente pequeña, por una parte, como para poder aplicarle los conceptos del "Punto Material" (Análisis Matemático). Pero por otra parte es, a su vez, lo suficientemente grande como para que no se pierda la identidad de la sustancia en estudio.

El medio continuo es una sucesión de partículas fluidas en movimiento (o en reposo como caso particular del mismo) sin que existan espacios vacíos ni choques entre ellas. Es una percepción "macroscópica" de la realidad. En efecto, el agua en particular y los fluidos en general, son efectivamente interpretados por nuestros sentidos como una sustancia continua y fácilmente deformable ante las sollicitaciones.

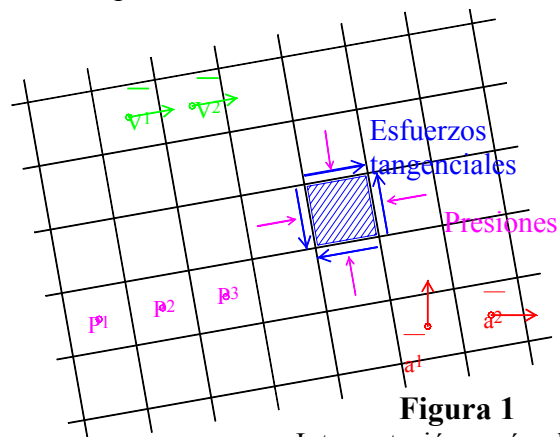


Figura 1
 Interpretación según el Ing. Macagno

La imagen debida al Ing. Macagno esquematizada en la Figura 1, es sumamente ilustrativa. En efecto, en la misma, las partículas fluidas son representadas bidimensionalmente (para obtener la imagen tridimensional bastará considerar la profundidad) por cuadrángulos idealmente pequeños. En el baricentro de los mismos puede ser considerada la propiedad física de que se trate tal como puede ser apreciado tanto para las propiedades escalares como las vectoriales. En particular el campo de velocidades \bar{V} constituye la principal de éstas últimas y obviamente está íntimamente relacionado con el objetivo fundamental del presente texto.

Nótese que en los límites de cada cuadrángulo se ponen de manifiesto las acciones debidas al medio circundante (el resto del "medio Continuo") las que producen los esfuerzos tangenciales que justifican las deformaciones angulares de las distintas partículas de los fluidos reales o viscosos y los alargamientos o acortamientos, los que están obviamente relacionados con el campo de presiones.

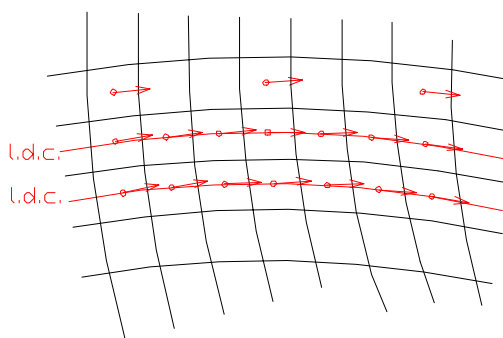
2.3- LÍNEAS QUE DESCRIBEN EL ESCURRIMIENTO - TUBO DE CORRIENTE

a) Trayectoria

Es el lugar geométrico de las sucesivas posiciones que ocupa **una única partícula** en el tiempo. Obviamente es una abstracción puesto que es imposible visualizarla en la realidad.

b) Línea de Corriente

Es por definición la línea envolvente de velocidades de sucesivas partículas en un instante dado. Es evidente que involucra **a infinitas partículas en un instante**, señaladas cada una por el vector velocidad de la partícula precedente. Es posible visualizarlas utilizando, por ejemplo, colorantes de igual masa específica que la del fluido en estudio.



De la imagen de Macagno para el medio continuo y de la definición de línea de corriente surge la imagen cualitativa del Esgurrimento, destacada en la Figura 2.

Se adelanta que también podrán considerarse aspectos cuantitativos o de cálculo, lo que constituye el objetivo de la "Red de Esgurrimento".

Figura 2
 Configuración de l.d.c. en un instante dado

c)Tubo de Corriente

Se lo esquematiza en la Figura 3, donde se observa que se obtiene de considerar una línea cerrada en el espacio ocupado por un campo de velocidades \vec{V} .

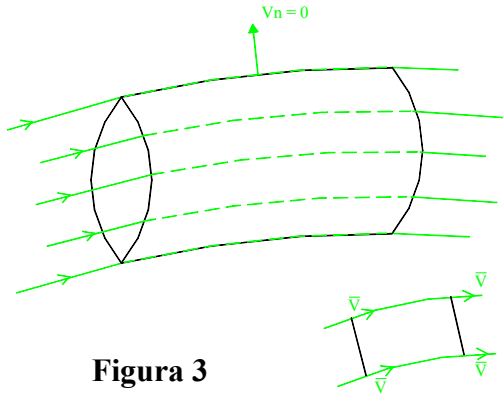


Figura 3
 Tubo de corriente

Es evidente que al ser el nombrado espacio ocupado por vectores velocidad en todos sus puntos, siempre existirán líneas de corriente que serán tangentes, dando lugar a un tubo cuya propiedad principal **es la de ser impermeable**, puesto que por definición de l.d.c. no pueden existir componentes de velocidad normales a las mismas.

Obviamente, el tubo de flujo anterior está directamente aplicado a un campo vectorial de velocidades, las que al estar vinculadas al transporte de masa (agua en nuestro caso), implican la "impermeabilidad" acotada. Si el concepto fuera aplicado a un campo de vectores \vec{A} , se obtiene un concepto más general en el que se destaca la imposibilidad de que existan componentes del campo vectorial normales a las líneas que delimitan al tubo. **Es decir que en su aplicación a la Hidráulica, encuentra un sentido físico muy preciso.**

2. 4-FLUJO DE UN VECTOR - CAUDAL - ESCURRIMIENTO -VELOCIDAD MEDIA

En la Figura 4 se puede apreciar el flujo elemental de un campo vectorial \vec{A} , el que se define por el producto escalar:

$$d\phi = \vec{A} \cdot d\vec{\Omega} = |\vec{A}| |d\vec{\Omega}| \cos(\vec{A}; d\vec{\Omega}) = A_n d\Omega$$

La integral, extendida a toda la superficie Ω , resulta entonces:

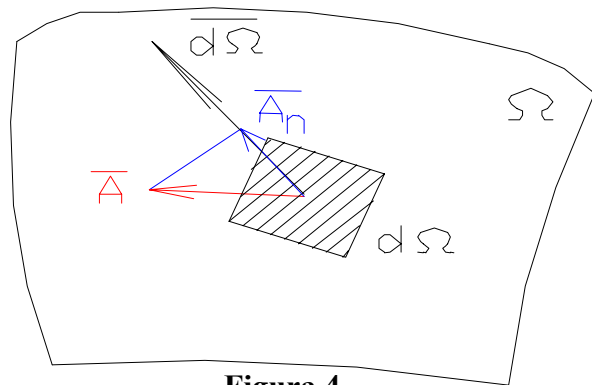


Figura 4
 Flujo de un Vector

$$Q = \int_{\Omega} \vec{A} \cdot d\vec{\Omega} = \int_{\Omega} A_n d\Omega$$

Si el campo elemental es un campo de velocidades en un medio continuo, **lo que implica transporte de masa, el flujo elemental se denomina "Caudal Elemental dq"**.



En consecuencia:

$$dQ = \bar{V} d\bar{\Omega} = V d\Omega \cos(\bar{V}; d\bar{\Omega}) = V_n d\Omega$$

y la integral resulta:

$$Q = \int_{\Omega} \bar{V} d\bar{\Omega} = \int_{\Omega} V_n d\Omega$$

Se define como velocidad media U en la superficie Ω a la que surge de considerar:

$$Q = U\Omega = \int_{\Omega} \bar{V} d\bar{\Omega} = \int_{\Omega} V_n d\Omega$$

Cuya ecuación de dimensión es:

$$\frac{L}{T} L^2 = \frac{L^3}{T} ; \text{ es decir } \frac{m^3}{s}; \frac{1}{s}$$

Al despejar U , la velocidad media resulta:

$$U = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} V_n d\Omega = \frac{Q}{\Omega}$$

Cuya dimensión es L / T , es decir m/s .

Al transporte de masa obligado por el campo de velocidades inherente al medio continuo en estudio, se lo denomina "Escurrencimiento".

El gasto o caudal elemental de masa se obtiene al multiplicar el gasto elemental por la masa específica ρ . En efecto:

$$dq_m = \rho dq = \rho \bar{V} d\bar{\Omega}$$

Por lo que la integral será:

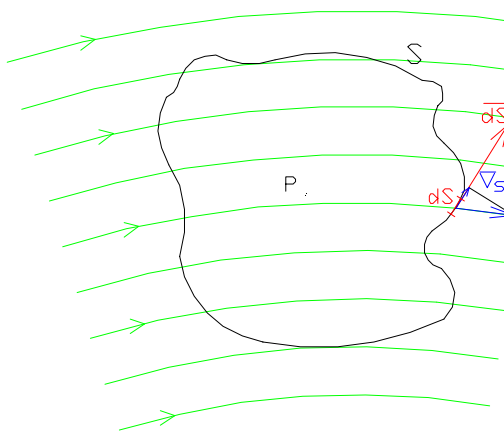
$$Q_m = \int_{\Omega} \rho dq = \rho \int_{\Omega} \bar{V} d\bar{\Omega} = \rho Q = \rho U \Omega$$

Evidentemente, su ecuación de dimensión resulta:

$$\frac{M}{L^3} \frac{L}{T} L^2 = \frac{M}{T}$$

que se mide en unidades de masa por segundo.

2.5- CIRCULACIÓN



En el campo de velocidades representado por la configuración de l.d.c. de la Figura 5, se considera una curva cerrada S.

Se define a la circulación elemental como el producto escalar $\vec{V} \cdot d\vec{S}$.

Por lo tanto, la Circulación Γ resulta:

$$\Gamma = \oint \vec{V} \cdot d\vec{s} = \oint V ds \cos(\vec{V}; d\vec{s}) = \oint V_s ds$$

Figura 5
Circulación de un Vector

Si Γ es distinta de cero, existe masa que circula alrededor del punto medio P. Se obtiene así la interpretación de un "vórtice" real.

2.6- ROTOR

En la Figura 6 se representa un campo de velocidades caracterizado por sus líneas de corriente. Considerando una curva en un plano atravesado por las l.d.c., se define como Vector Rotor al límite de la circulación cuando la superficie encerrada por la curva en la que se produce la misma tiende a cero.

$$\text{rot } \vec{V} = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow 0} \frac{\Delta\Gamma}{\Delta\Omega} = \frac{d\Gamma}{d\Omega}$$

En la que:

$$\frac{\Delta\Gamma}{\Delta\Omega} = \frac{\Gamma_1 - \Gamma_2}{\Omega_1 - \Omega_2}$$

Y en la que, además, la superficie Ω_1 tiende a anularse, es decir tiende al punto.

Nótese que una forma elemental de obtener la expresión final del Teorema de Stokes (probablemente sin demasiado rigor matemático pero posibilitando la interpretación física) sería la siguiente.

De la definición de vector rotor se puede despejar:

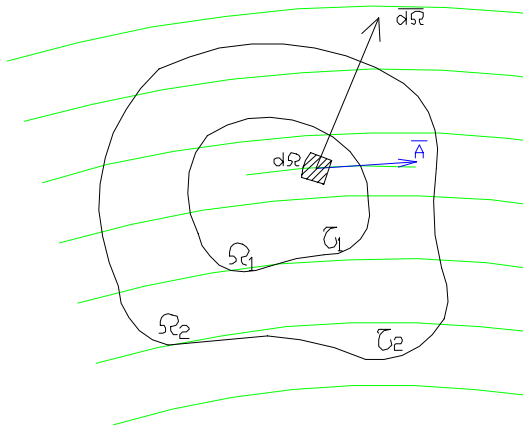
$$d\Gamma = \text{rot} \bar{V} d\Omega$$

Por lo que la integral resulta:

$$\Gamma = \oint \bar{V} d\bar{s} = \int_{\Omega} \text{rot} \bar{V} d\Omega$$

La que se interpreta como que "la circulación sobre una curva cerrada inmersa en el campo vectorial, es igual a la integral del flujo del campo del rotor en la superficie que encierra".

2.7- DIVERGENCIA



En la Figura 7 se representa nuevamente un campo de velocidades dado por una configuración de líneas de corriente.

Considerando un determinado volumen de control inmerso en el espacio ocupado por el medio continuo en movimiento (caracterizado por la configuración de líneas de corriente) el flujo elemental del vector \bar{A} en un elemento diferencial de superficie representado por su vector normal $d\bar{\Omega}$ resulta:

$$d\phi = \bar{A} \cdot d\bar{\Omega}$$

Figura 7
 Divergencia de un Vector

Por lo que el flujo extendido a toda la superficie del volumen de control, resulta:

$$\Phi = \int_{\Omega} \bar{A} \cdot d\bar{\Omega}$$

Se define como la divergencia del vector \bar{A} al límite del flujo del mismo en la superficie del volumen de control, cuando el mismo tiende a anularse. En símbolos:



$$\operatorname{div} \bar{A} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta\tau} = \frac{d\Phi}{d\tau}$$

En la que: $\Delta\Phi = \Phi_2 - \Phi_1$ y $\Delta\tau = \tau_2 - \tau_1$ y τ_2 tiende a cero.

Se recuerda que las componentes cartesianas de la divergencia de un vector están dadas por la expresión:

$$\operatorname{div} \bar{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

Si el campo vectorial **representa el campo de velocidades en un medio continuo, su flujo en la superficie considerada es el "caudal", el que obviamente implica transporte de masa.**

Denominando u, v, w a las componentes según los ejes x, y, z del vector \bar{V} , se tiene que la divergencia del mismo, expresada en función de sus coordenadas cartesianas, resulta:

$$\operatorname{div} \bar{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$$

Recordando que: $dq = \bar{V} \cdot d\bar{\Omega}$ y consecuentemente $Q = \int_{\Omega} \bar{V} \cdot d\bar{\Omega}$

Al considerar $\operatorname{div} \bar{V}$, se tiene que:

$$dq = \operatorname{div} \bar{V} \cdot d\tau$$

Por lo tanto, $dq = \operatorname{div} \bar{V} \cdot d\tau$ y la integral resulta:

$$Q = \int_{\tau} \operatorname{div} \bar{V} \cdot d\tau$$

Recordando la definición de Q , se tiene:

$$\int_{\Omega} \bar{V} \cdot d\bar{\Omega} = \int_{\tau} \operatorname{div} \bar{V} \cdot d\tau$$

Que es la expresión del teorema de Gauss-Green, obtenida de una forma elemental, y que se interpreta como que el caudal que atraviesa la superficie del volumen de control, fijo en el espacio en el que escurre el medio continuo, resulta igual a la integral de la divergencia extendida a dicho volumen.

2. 8-DIFERENCIAL TOTAL EXACTA

Es conveniente recordar brevemente el concepto de diferencial total exacta en coordenadas cartesianas.

Considerando una cierta función escalar $f(x; y; z)$, su diferencial total se expresa:

$$df(x; y; z) = \frac{\partial}{\partial x} f(x; y; z) + \frac{\partial}{\partial y} f(x; y; z) + \frac{\partial}{\partial z} f(x; y; z)$$

2. 9- VECTOR GRADIENTE

Dada una función escalar $U = f(x; y; z)$ tal como la que se pretende representar en la Figura 8, se le asignan a cada punto del campo las siguientes propiedades:

- La dirección y sentido del más rápido crecimiento de U .
- El valor absoluto de U para un recorrido unitario.

Se define como Vector Gradiente del campo U , aquel que tiene la dirección y sentido indicado en a) y como módulo el indicado en b).

En la Figura 8 se esquematizan los conceptos, a la vez que la misma permite interpretar que la expresión cartesiana del Vector Gradiente resulta:

$$\text{grad } \bar{U} = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}$$

Por otra parte el vector desplazamiento en una dirección cualquiera es:

$$d\bar{l} = dx\bar{i} + dy\bar{j} + dz\bar{k}$$

El producto escalar de ambos vectores representa la componente según la dirección arbitraria \bar{l} , en efecto:

$$\text{grad } \bar{U} \cdot d\bar{l} = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \frac{\partial U}{\partial z} dz$$

Recordando que el segundo miembro es la diferencial total exacta dU , se tiene:

$$\text{grad } \bar{U} \cdot d\bar{l} = dU = (\text{grad } U)_l \cdot dl$$

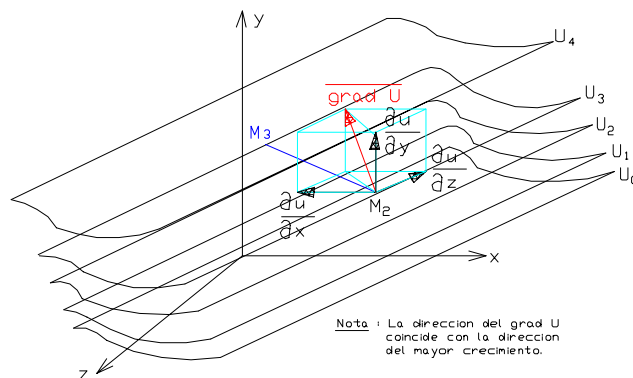


Figura 8



Esta última expresión nos brinda el valor del módulo del gradiente en una dirección cualquiera l.

Despejando dU de la misma e integrando entre dos puntos 1 y 2, se obtiene:

$$\int_2^1 \text{grad } \bar{U} \, dl = \int_2^1 dU = U_1 - U_2$$

Por lo que la integral curvilínea resulta:

$$\oint \text{grad } \bar{U} \, dl = 0$$

3- COORDENADAS INTRÍNSECAS

3-1- GENERALIDADES

En el capítulo inicial se destacó que la importancia de las Coordenadas intrínsecas en la Ingeniería es muy grande. Es más, muchas veces, su aplicación, hasta pasa desapercibida cuando se estudian o se trabaja en obra en determinados temas (Caminos, Ferrocarriles, Canales, Esguimientos en Conducciones a presión, Ríos, etc.).

En efecto, con el objeto de fundamentar lo aseverado en cuanto a la utilidad de la “Terna Intrínseca”, se desarrolla un ejemplo sumamente ilustrativo a continuación.

Imagínese el caso de dos grupos de personas que emprenden un viaje conjunto en automóvil pero que parten desde puntos bien alejados el uno del otro y convienen encontrarse en el camino, en **un determinado lugar a y a una hora pre-establecida**. Lo usual es encontrarse en algún local conocido a la vera del camino para realizar alguna acción como desayunar o tomar un refrigerio, entre muchas variantes posibles.

Suele ocurrir que lo razonable es encontrarse “**...en tal lugar a tal hora....**” y en el caso de que uno de los grupos no conozca fehacientemente el lugar de encuentro, **fijar en que km de la ruta correspondiente está el lugar. Justamente ésta forma de proceder es utilizar las coordenadas intrínsecas dado que con una sola coordenada estamos fijando el punto de encuentro**. Ésta coordenada es la denominada “**progresiva**” en una curva espacial (el eje del camino) **que como ya está establecido** y construido, no tiene posibilidades de confusión. En éste caso se está usando tan sólo el eje \bar{l} de la terna intrínseca y obviamente la propiedad física en uso, **es una extremadamente sencilla, la “longitud”**.

Es oportuno meditar ahora, cómo sería llegar a idéntico acuerdo pero usando las Coordenadas Cartesianas, **asumida cómo la más utilizada por el alumnado en general**, dado que es la que más frecuentemente se utiliza en las aplicaciones comunes de las asignaturas formativas y de muchas de aplicación tecnológica (en nuestra materia también utilizamos cuando nos conviene el sistema cartesiano aunque las coordenadas intrínsecas son utilizadas en forma excluyente en los Movimientos Unidimensionales, lo que cubre un importantísimo porcentaje de las aplicaciones de nuestra especialidad).

En ése caso para fijar el punto de encuentro, deberíamos fijar un origen de coordenadas para aplicar los ejes coordenados $z,y ; x$, y posteriormente encontrar la ecuación del eje del camino en esas coordenadas. Los métodos matemáticos posibilitan tras una árdua tarea obtener la ecuación correspondiente (por ejemplo con el método de los “Mínimos cuadrados”) y se pueden fijar las coordenadas $z_0 ; y_0 ; x_0$ del punto de encuentro para la ecuación del eje del camino.

La complicación absurda que éste proceder implica no merece más comentarios excepto el hecho que facilita comprender fehacientemente las ventajas de la Terna Intrínseca para éste caso de aplicación tan simple.

En general para la Construcción de la obra y ubicación de puntos en; Caminos, Ferrocarriles, Canales, Acueductos, Ríos, etc. se recurre a éste sistema de coordenadas con evidente ventaja práctica. Se establece un punto origen del eje de la curva predeterminada y fijada en el terreno (por ejemplo mediante estacas en la etapa de construcción) y a partir del mismo se establecen la longitudes o “progresivas” expresadas en metros o sus múltiplos (obviamente es usual el Km en Caminos, Ferrocarriles y Canales navegables).

3.2- DEFINICIÓN E INTERPRETACIÓN

En la Figura 9 se recuerda la Terna Intrínseca, definida por los versores Tangente \bar{l} , Normal \bar{n} y Binormal \bar{b} . El versor normal, contiene al “radio de curvatura” de la curva espacial.

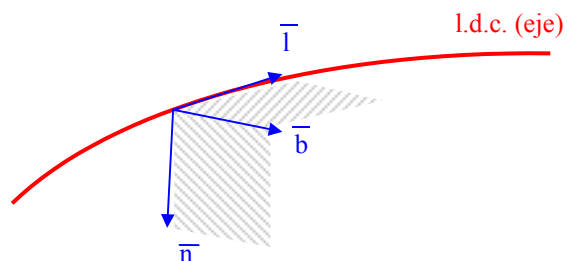


Figura 9

El plano formado por los ejes l y n , es el denominado “plano osculador” (definido por dos tangentes sucesivas y cuya denominación proviene del griego “ósculo” que significa “beso” o en nuestra aplicación, cercanía). El plano formado por los ejes b y n resulta perpendicular al primero.

3-3- DERIVADAS PARCIALES EN COORDENADAS INTRÍNSECAS

El objetivo del presente numeral es el de aplicar el concepto para el caso común de las aplicaciones hidráulicas, en las que las propiedades físicas pueden ser en general función del espacio (una dimensión en coordenadas intrínsecas) y del tiempo.



Denominando consecuentemente y en forma genérica a la variable como $A(l;t)$, se tiene que su diferencial total exacto es

$$dA = \frac{\partial A}{\partial l} dl + \frac{\partial A}{\partial t} dt$$

Consecuentemente su derivada con respecto al tiempo es

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial l} \frac{dl}{dt} + \frac{\partial A}{\partial t} \frac{dt}{dt}$$

El módulo del vector velocidad es en todos los casos $V = \frac{dl}{dt}$ y obviamente $\frac{dt}{dt} = 1$

Por lo que la anterior queda

$$\frac{dA}{dt} = V \frac{\partial A}{\partial l} + \frac{\partial A}{\partial t}$$

Todas las variables que implican las propiedades físicas de los medios continuos pueden ser entonces derivadas teniendo en cuenta la variable a ser considerada y el operador

$$\frac{d}{dt} = V \frac{\partial}{\partial l} + \frac{\partial}{\partial t}$$

Por ejemplo, si la propiedad física es “la masa específica ρ ” la expresión de la derivada respecto al espacio y el tiempo es

$$\frac{d\rho}{dt} = V \frac{\partial \rho}{\partial l} + \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

En el caso del “peso específico γ ” la derivada resulta

$$\frac{d\gamma}{dt} = V \frac{\partial \gamma}{\partial l} + \frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

En el caso de la “presión”, resulta

$$\frac{dp}{dt} = V \frac{\partial p}{\partial l} + \frac{\partial p}{\partial t}$$

En el caso especial del módulo del vector velocidad, resulta

$$\frac{dV}{dt} = V \frac{\partial V}{\partial l} + \frac{\partial V}{\partial t}$$

La que obviamente es, por definición, el módulo del vector aceleración

En éste caso particular, teniendo en cuenta la derivación, la expresión anterior toma la forma muy utilizada

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{V^2}{2} \right) + \frac{\partial V}{\partial t}$$

3-4- ESCURRIMIENTOS UNIDIMENSIONALES

A) La sección transversal

Si se considera al tubo de corriente de la figura..., con la obvia intención de considerar unidimensionalmente a los escurrimientos (caso de tuberías a presión y canales) resulta muy evidente al analizar la figura, **que el plano definido por los versores “Normal y Binormal” representa a la sección transversal del mismo.**

B) La extensión al “Tubo de Corriente”

En el caso del tubo de corriente, dada su propiedad de resultar “impermeable” por definición (imposibilidad de componentes normales de la velocidad y transporte de masa lateral) la velocidad media definida en 2.4 dada por la expresión

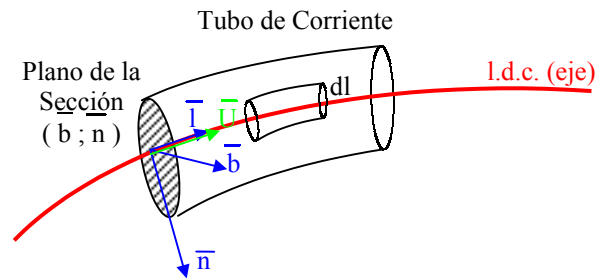


Figura 10

$$U = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} \bar{V} d\bar{\Omega} = \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} V_n d\Omega$$

se hace mucho más simple, pues se aplica a cada sección transversal y resulta representativa de la infinidad de velocidades actuantes en la misma (en realidad U implica el mismo transporte de masa que el que se obtendría realizando la integral de la expresión anterior).

Nota: Se adelanta que en la práctica de la hidráulica elemental (Conducciones a presión y canales), la obtención de U es muy simple, sin necesidad de complejas integraciones y en base a la misma definición de Caudal y la baja compresibilidad del agua, tal cómo podrá observarse durante el desarrollo de la materia

3.4- EL VECTOR VELOCIDAD EN COORDENADAS INTRÍNSECAS

Al quedar el espacio en función del versor \bar{l} y teniendo en cuenta la definición del vector velocidad, resulta evidente que ésta sólo resultará dependiente de la variable “ l ” (longitud recorrida sobre la curva) y según la expresión que sigue

$$\bar{V} = V \bar{l} = \frac{dl}{dt} \bar{l}$$

La expresión anterior muestra claramente cómo debido a que el espacio se mide con una sola coordenada, el vector velocidad presenta tan sólo una componente contra las 3 que implica el sistema cartesiano (Ver Cinemática).

La extensión al tubo de corriente es inmediata al considerar la velocidad media “ U ” (definida previamente en 2.4-) en cada sección transversal del mismo, siendo aplicada en todos los casos como el vector

$$\bar{U} = U \bar{l} = \frac{dl}{dt} \bar{l}$$

Los razonamientos previos muestran con toda claridad, como el concepto de Velocidad media, aplicado al tubo de corriente, define en función de ésta, a los denominados “Escurremientos unidimensionales”.

Las conducciones a presión o a superficie libre (Canales) cumplimentan con total satisfacción éstas premisas. En efecto, al constituir tubos de corriente, dada la impermeabilidad de sus contornos sólidos y al encontrarse una velocidad media, representativa de la infinitud de velocidades en la sección resultan claros exponentes de “Escurremientos Unidimensionales”.

Es de destacar que las Conducciones a Presión y los Canales, constituyen infraestructura de enorme aplicación en la Ingeniería Civil.

3.5- EL VECTOR ACELERACIÓN EN COORDENADAS INTRÍNSECAS

El siguiente desarrollo tiene como objetivo demostrar, la simplificación desde el punto de vista simbólico, de las expresiones del vector aceleración.

El vector aceleración es por definición:

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \bar{l}) = \frac{dv}{dt} \bar{l} + \frac{d\bar{l}}{dt} v$$

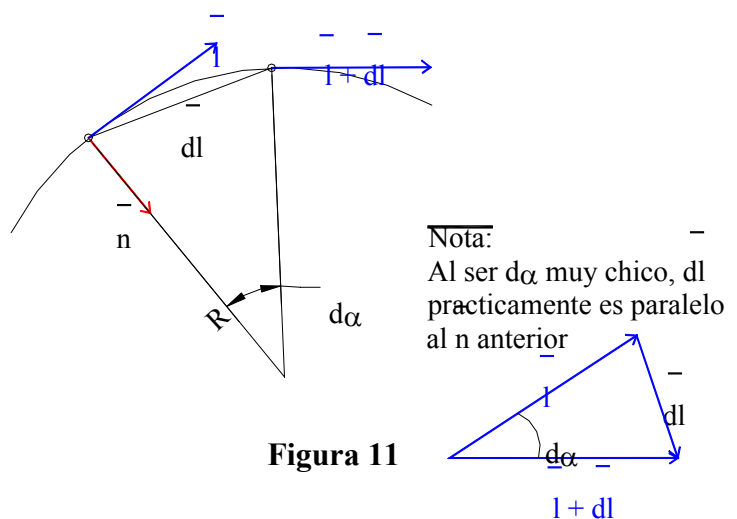


Figura 11



pero puede ser considerado que:

$$\frac{d\bar{l}}{dt} = \frac{d\bar{l}}{dl} \frac{dl}{dt} = \frac{d\bar{l}}{dl} V$$

por lo que reemplazando en la anterior, se tiene:

$$\bar{a} = \frac{dV}{dt} \bar{l} + V^2 \frac{d\bar{l}}{dl}$$

Del análisis de la figura se deducen los siguientes conceptos:

$$dl = R d\alpha ; \left| \frac{d\bar{l}}{dl} \right| = \left| \bar{l} \right| = 1 ; \frac{d\bar{l}}{dl} = d\alpha \bar{n} ; \frac{d\bar{l}}{dl} = \left| \frac{d\bar{l}}{dl} \right| \bar{n} ; \left| \frac{d\bar{l}}{dl} \right| = 1 \cdot d\alpha$$

por lo que la variación del versor \bar{l} en el recorrido, resulta:

$$\frac{d\bar{l}}{dl} = \frac{d\alpha \bar{n}}{d\alpha} = \frac{1}{R} \bar{n}$$

Reemplazando se obtiene que el vector aceleración resulta:

$$\bar{a} = \frac{dV}{dt} \bar{l} + \frac{V^2}{R} \bar{n}$$

Recordando el módulo del vector aceleración, ya obtenido previamente en el numeral 3.2-

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{V^2}{2} \right) + \frac{\partial V}{\partial t}$$

Finalmente, reemplazando en la anterior, la expresión del vector aceleración en coordenadas intrínsecas resulta:

$$\bar{a} = \left[\frac{\partial}{\partial l} \left(\frac{V^2}{2} \right) + \frac{\partial V}{\partial t} \right] \bar{l} + \frac{V^2}{R} \bar{n}$$

Obviamente, para régimen permanente se anula la derivada del módulo de la velocidad con respecto al tiempo, con lo que la expresión queda para ese caso:



$$\vec{a} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{V^2}{R} \right) \vec{l} + \frac{V^2}{R} \vec{n}$$

Las expresiones anteriores obtenidas, muestran claramente cómo debido a que el espacio se mide con una sola coordenada, el vector aceleración presenta tan sólo 2 componentes contra las 4 que implica el sistema cartesiano el que implica 3 para el espacio y una para el tiempo (ver Capítulo de Cinemática).

La extensión al tubo de corriente también es inmediata en éste caso al considerar la velocidad media “U” (definida previamente en 2.4-) en cada sección transversal del mismo.