LA ECUACIÓN GENERAL DE NAVIER - STOKES EN LA ENSEÑANZA DE HIDRÁULICA GENERAL

Ing. LUIS E. PÉREZ FARRÁS
PROFESOR de HIDRÁULICA GENERAL de la FIUBA

OBJETIVOS, DESCRIPCIÓN, CONCLUSIONES Y RESUMEN

Los objetivos buscados son los siguientes:

1) Destacar que la ecuación que nos ocupa es fundamental en la formación básica del Ingeniero Civil.

2) Someter a la consideración de los colegas docentes, la descripción de la deducción y de las integraciones para las distintas hipótesis simplificativas, tal como se dicta actualmente en la FIUBA, con la intención de evaluar sus características pedagógicas y su eventual mejora para someter su eventual bondad pedagógica, a la consideración de los colegas profesores, y poder perfeccionarlo en el futuro mediato en base a sus consejos.

3) Someter a la consideración de los colegas docentes, las integraciones conducentes a la obtención de la expresión de Bernoulli, aplicada al escurrimiento permanente unidimensional de un líquido incompresible y viscoso y de la primer ecuación de Saint Venant.

En el presente trabajo se **describe** el proceso deductivo planteado en el libro de la materia en el que puede encontrarse la deducción detallada (escrito en colaboración con el entonces profesor de la materia y actual Profesor Consulto Ing. Dante Dalmati y publicado por el CEI de la FIUBA). El proceso de referencia está basado en la extensión a los fluidos incompresibles de la Teoría del Medio Continuo, la que entiendo, es fundamento esencial en la formación del Ingeniero Civil y siguiendo el esbozo original deductivo, planteado en su paso por la cátedra por el Ing. Roberto D. Cotta.

También se **describen** las distintas integraciones que, en base a las correspondientes hipótesis simplificativas, permiten obtener muchas de las ecuaciones de uso cotidiano**. En particular se detallan las deducciones de las ecuaciones de Saint Venant (también a partir de Navier-Stokes) y la de Bernoulli para fluido real, de una forma compacta y, aunque más breve, igualmente rigurosa con respecto a la del libro de referencia. Con esta forma ha sido incorporada a la enseñanza desde hace tres años.**

El autor del presente trabajo y su Profesor Asociado, discutieron el tema y del intercambio de opiniones, se deducen las conclusiones que se presentan para la discusión en el tercer Encuentro de Docentes.

En apretada síntesis, se estima recomendable la enseñanza de la ecuación que nos ocupa en los casos en que, como el nuestro, la asignatura forma parte de la carrera de Ingeniería Civil, puesto que está íntimamente ligada a la Teoría General del Medio Continuo.

También es recomendable en los casos que se pretenda una gran generalidad, unida a un interesante nivel académico, puesto que, las ecuaciones de la Hidrostática, de Bernoulli en la línea y en el tubo de corriente (para líquido real en este caso) y la misma "Primer ecuación de Saint Venant", pueden obtenerse de la ecuación de Navier-Stokes.

En cambio, para planes de estudio con criterio eminentemente tecnológico y dirigido a las aplicaciones unidimensionales, en cursos especializados de posgrado de conducciones, y en todos los casos donde además interesa minimizar la enseñanza de la teoría, es oportuno no considerar la ecuación que motiva el presente trabajo, y basar el fundamento teórico en las ecuaciones de Saint Venant.

1. GENERALIDADES Y OBJETIVOS

Son los objetivos principales del presente trabajo, presentar las conclusiones que obtuvimos luego de un debate mantenido con mi Profesor Asociado, el Ing. Adolfo Guitelman, relativo a la importancia de la ecuación de Navier-Stokes en la enseñanza de la Ingeniería Civil o Hidráulica, y presentar a los colegas docentes, la **descripción** del proceso deductivo actualizado, utilizado en la FIUBA, y que es el que ha surgido de la experiencia de la cátedra de muchos años y sobre la base de las enseñanzas que nos dejaron los ilustres profesores que me precedieron.

Constituye también un objetivo importante, que de la eventual discusión con los colegas y de sus consejos, surjan las pautas para el perfeccionamiento de las deducciones que nos ocupan, sobre todo en el plano pedagógico y para el futuro mediato.

Los objetivos complementarios son los de destacar:

a) La generalidad de la ecuación y su integración para los casos de aplicación en la práctica cotidiana, para la que se obtienen muchas de las ecuaciones o “herramientas de trabajo”.
b) La íntima relación existente entre los conceptos de base en que se fundamenta la ecuación y la Carrera de Ingeniería Civil.
c) Someter a la consideración de los colegas el **criterio pedagógico de la presentación de las integraciones, con sus correspondientes esquemas explicativos**.

Las ideas centrales fueron surgiendo con el correr de los años, en base a:

a) La apreciación que numerosas bibliografías especializadas atacan el problema desde el punto de vista estrictamente unidimensional, para lo que la teoría necesaria queda cubierta con el uso de las ecuaciones de Saint Venant.
b) Como las carreras de las especialidades nombradas se encuentran desde hace tiempo en constante reformulación y con tendencia a recortar su duración, surge naturalmente en los planificadores, la necesidad de acortar los programas de las asignaturas de las carreras de grado.
c) La presión de numerosos alumnos y docentes jóvenes relativa a la necesidad de “tecnificar la materia”, acortando su contenido teórico.

En nuestra casa de estudios en particular, a partir de la vigencia del plan 1986, que ha convertido en cuatrimestrales a todas las materias, nos encontramos con que la más larga de la carrera de Ingeniería Civil, que es justamente “Hidráulica General”, debe dictarse en un cuatrimestre con una dedicación de 8 hs. semanales. Si bien el tiempo asignado es, a mi criterio, suficiente, tal vez el ritmo que impone el seguimiento y la elaboración de los conocimientos impartidos y necesariamente muy eslabonados, hace pensar o percibir en los alumnos, que la materia es excesivamente larga.

Es oportuno destacar que los objetivos centrales de la Materia son: calcular conducciones a presión y a superficie libre; orificios y vertederos y seleccionar bombas y turbinas, es decir escurrimientos unidimensionales.

Ello no obstante, considero es necesario el desarrollo previo y pleno de la Mecánica del Continuo, aplicada al fluido de masa específica constante, dado que la materia es de formación básica del Ingeniero Civil y en la versión actual se imparten conocimientos sobre redes de escurrimiento e Hidráulica de los medios permeables, que si bien no constituyen los objetivos centrales, se considera deben ser impartidos como complemento imprescindible de los mismos y teniendo en cuenta las necesidades de materias correlativas de Hidráulica General.

La presión ejercida por los alumnos me ha hecho pensar durante mucho tiempo, sobre la necesidad de “alivianar” el programa de la asignatura, para lo que pensé que la misma podría quedar limitada al cumplimiento estricto de los objetivos básicos, por lo que al eliminarse los movimientos bidimensionales, incluidos los de los medios permeables, los escurrimientos a analizar serían solo unidimensionales.

Con este criterio, no se hace necesario el estudio de las Ecuaciones de Navier-Stokes, y puede procederse con la enseñanza de la primera ecuación de Saint Venant directamente, con lo que la enseñanza de la teoría se reduce considerablemente en tiempo y en dificultad, sobre todo al eliminarse también, el tema “Red de escurrimiento”.

Finalmente, tras meditar largamente sobre el tema, arribé a la conclusión contraria, hasta que un enriquecedor intercambio de opiniones con mi Profesor Asociado, nos llevó a las conclusiones finales, que son las que sometemos a consideración de nuestros colegas profesores, en la parte final del presente trabajo.

2. ENSEÑANZA DE LA ECUACION DE NAVIER STOKES EN LA FIUBA

Siguiendo el programa vigente para la carrera de Ingeniería Civil de la FIUBA, se ha concretado el Libro "Hidráulica - Fundamentos” (Ings. Dante Dalmati - Luis Pérez Farrás), presentado en ocasión del Encuentro de Docentes N°1, editado por el CEI, el que, complementado con otros trabajos, constituye la bibliografía básica de la cátedra.

En el Capítulo 4 del mismo, “Dinámica de los Fluidos”, se procede a la deducción de las ecuaciones de Navier-Stokes y a sus integraciones, a partir de las correspondientes hipótesis simplificativas para cada caso. La misma no es posible reproducir en este texto, que debe ser obligatoriamente breve, pero sí se brindan, sucintamente y en forma descriptiva, los conceptos básicos e introductorios de la deducción, relacionados con el Tensor de Tensiones, que dan sustento a la íntima vinculación de la ecuación de referencia, con concepciones básicas de la Ingeniería Civil.

El proceso deductivo, en apretada síntesis conceptual, se fundamenta en la extrapolación a los fluidos de $\rho = \text{cte}$, de las ecuaciones que vinculan tensiones y deformaciones. Esencialmente se considera el equilibrio del cubo elemental de lados diferenciales, poniéndose de manifiesto las tensiones normales σ, y las tangenciales τ. A continuación se presentan las ecuaciones generales que vinculan los esfuerzos normales y las deformaciones:

$$-\sigma_x + \frac{1}{\nu}\left(\sigma_y + \sigma_z\right) = E\,\varepsilon_x$$

$$-\sigma_y + \frac{1}{\nu}\left(\sigma_x + \sigma_z\right) = E\,\varepsilon_y$$

$$-\sigma_z + \frac{1}{\nu}\left(\sigma_x + \sigma_y\right) = E\,\varepsilon_z$$

Las vinculaciones entre esfuerzos y deformaciones, en general, están dadas por

$$\sigma = E\,\varepsilon \quad ; \quad \tau = G\,\gamma$$

En las que:

- σ_x , σ_y , σ_z son las tensiones normales según los respectivos ejes.
- ν es el coeficiente de Poisson, que brinda la relación entre las deformaciones en un sentido y la correspondiente al sentido normal, para las distintas sustancias.
- E es el módulo de elasticidad de la sustancia en estudio.
- ε_x , ε_y , ε_z son los alargamientos porcentuales en el sentido de los ejes indicados por el subíndice correspondiente.
- G es el módulo transversal o de Young [E = 2 (1+ν) G].
- γ es ángulo de distorsión del ángulo recto original, debido a los esfuerzos cortantes.

Las respectivas ecuaciones son aplicadas a una sustancia de ν = ½, es decir un líquido incompresible pero deformable. En efecto, tal sustancia mantiene el volumen constante al ser solicitado, pero con acortamientos en dos ejes, correlacionados con alargamientos en el eje normal a ambos.

Por otra parte, las tensiones normales reciben el nombre de presiones, y en los fluidos la proporcionalidad se establece entre solicitación y velocidad de deformación, por lo que las ecuaciones equivalentes se transforman en las siguientes:

$$-\,p_x + \frac{1}{\nu}\left(p_y + p_z\right) = \phi\,\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t}$$

$$-\,p_y + \frac{1}{\nu}\left(p_x + p_z\right) = \phi\,\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t}$$

$$-\,p_z + \frac{1}{\nu}\left(p_x + p_y\right) = \phi\,\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t}$$

Las vinculaciones entre esfuerzos y deformaciones están dadas por:

$$p = \phi\,\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + cte \quad ; \quad \tau = \mu\,\frac{\partial V}{\partial z} = \mu\,\frac{\partial \gamma}{\partial t}$$

(las que deberán escribirse según las proyecciones en los tres ejes)

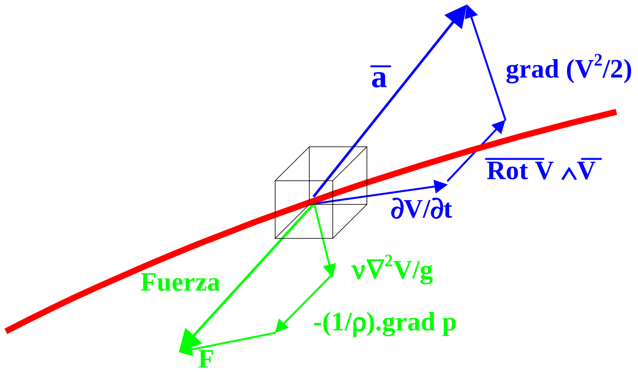
$\phi = 2\,(1+\nu)\,\mu$; la que con $\nu = 1/2$ resulta $\varphi = 3\mu$

En las que:

- p_x, p_y, p_z son las presiones normales según los respectivos ejes.
- $\nu = 1/2$ es el coeficiente de Poisson para los líquidos.
- E es el módulo de elasticidad de la sustancia en estudio (agua en particular)
- $\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t};\frac{\partial \varepsilon_y}{\partial t};\frac{\partial \varepsilon_z}{\partial t}$ son las velocidades de deformación lineal o de alargamientos porcentuales en el sentido de los ejes, indicados por el subíndice correspondiente.
- $\phi = 3\mu$ es la relación entre los coeficientes de proporcionalidad entre esfuerzos normales y tangenciales (denominado viscosidad para este caso).
- $\frac{\partial \gamma}{\partial t}$ es la velocidad de distorsión del ángulo recto original, debido a los esfuerzos cortantes.

La deducción consiste en la elaboración matemática de las expresiones del equilibrio dinámico de la partícula fluida en su movimiento a lo largo de la trayectoria. La partícula en movimiento es el cubo elemental sujeto a las solicitaciones normales y tangenciales enunciadas y resultantes de la acción sobre la misma del medio circundante (el mismo fluido). El vector aceleración ha sido estudiado en el capítulo de Cinemática, con su expresión final en función de los “Movimientos Característicos” (es decir en función de las velocidades de deformación). Finalmente la expresión de Navier-Stokes, expresada vectorialmente resulta:

$$\boxed{F - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\ p + \frac{\upsilon\,\nabla^2 V}{g} = \frac{\partial \overline{V}}{\partial t} + \mathrm{rot}\ \overline{V}\ \mathrm{x}\ \overline{V} + \mathrm{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right)}$$



La anterior implica que las fuerzas por unidad de masa, sumadas a las debidas a la presión y a la resistencia viscosa, igualan al vector aceleración, el que presenta a su vez tres componentes, debidas a la impermanencia, la rotacionalidad y la convección del vector velocidad en el espacio.

Figura 1

Equilibrio Dinámico de la Partícula Fluida Real

3. INTEGRACIÓN DE LAS ECUACIONES DE NAVIER-STOKES

En el presente numeral, se procede a resumir las ecuaciones que se obtienen de las hipótesis simplificativas, **brindándose en forma completa las que difieren o no están en el libro de referencia.** En términos generales las nuevas deducciones presentan una forma más compacta y general en el entendimiento que se ha logrado una mejor forma pedagógica de presentarlas, sobre todo al agregarle los esquemas explicativos del equilibrio dinámico de las fuerzas intervinientes.

3.1. CASO DE $\overline{V} = 0$

Es el caso del líquido en reposo, es decir la Hidrostática.

La ecuación se reduce a:

$$\overline{F} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\; p = 0$$

Que es la conocida ecuación de Claireaut y nos lleva a la expresión de la Hidrostática:

$$z + \frac{p}{\gamma} = \mathrm{cte}$$

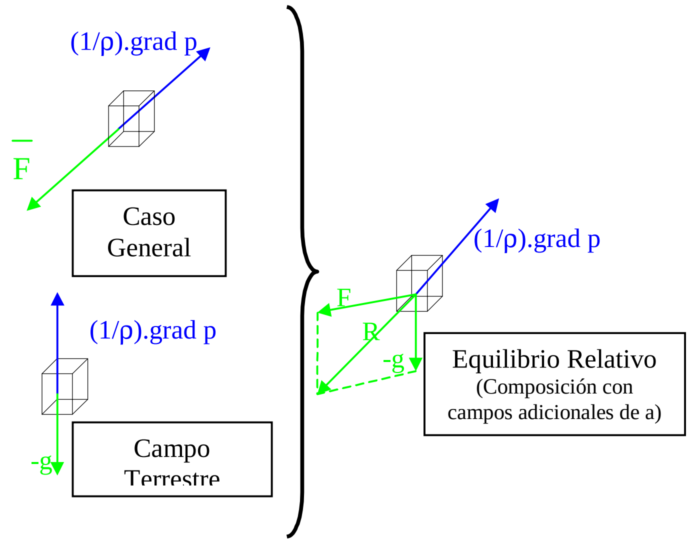


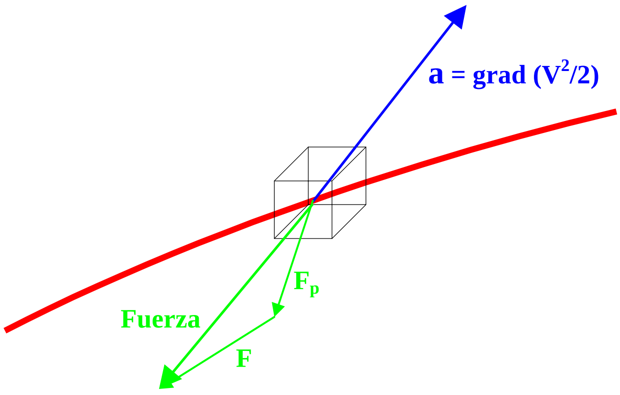
Figura 2
Equilibrio Hidrostático de la Partícula Fluida (V=0)

3.2. INTEGRACIÓN PARA ESCURRIMIENTO PERMANENTE DE UN FLUIDO PERFECTO EN RÉGIMEN IRROTACIONAL

La ecuación se reduce a:

$$\boxed{\overline{F} - \frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p = \mathrm{grad}\left(\frac{V^2}{2}\right)}$$

Que es la conocida ecuación de Euler y nos lleva a la expresión de Bernoulli para la línea de corriente:



$$\boxed{z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g} = cte}$$

Figura 3

Equilibrio Dinámico de la Partícula de un Fluido Perfecto

3.3. INTEGRACIÓN PARA RÉGIMEN PERMANENTE, LÍQUIDO REAL Y TUBO DE CORRIENTE

Se procede a presentar la integración, puesto que es mucho más reducida y compacta que la original en el libro y que entiendo posibilita, a su vez, una mejor interpretación al alumno.

Para el análisis que sigue, que implica la integración para movimientos unidimensionales en régimen permanente, resulta más oportuno utilizar coordenadas intrínsecas. Por lo que la ecuación general de Navier-Stokes queda:

$$L - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l} + \upsilon \nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

$$N - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{V^2}{R} \qquad (1)$$

$$B - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{V^2}{R}\right) = 0$$

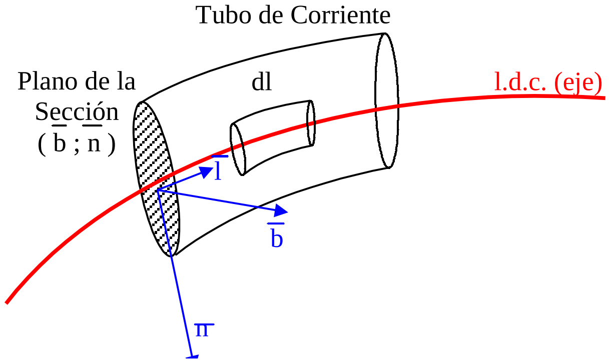


Figura 4
Integración sobre el Tubo de Corriente

Se recuerda que si se tienen en cuenta los cosenos directores, resulta que:

$$L = -g\cos(z;l) = -g\frac{\partial z}{\partial l} \ ;$$

$$N = -g\cos\ (z;n) = -g\frac{\partial z}{\partial n} \ ; \ B = -g\cos(z;b) = -g\frac{\partial z}{\partial b}$$

Por lo que reemplazando en las (1) se tiene que:

$$-g\frac{\partial z}{\partial l} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l} + \upsilon\nabla^2 V = \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{V^2}{2}\right)$$

$$-g\frac{\partial z}{\partial n} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} = \frac{V^2}{R}$$

$$-g\frac{\partial z}{\partial b} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial b} = 0$$

Si se divide por g, se multiplica por -1, se igualan las expresiones a 0 y se sacan factor común los operadores de derivación, se obtiene que:

$$\frac{\partial}{\partial l}\left[z + \frac{p}{\gamma} + \frac{V^2}{2g}\right] - \upsilon\,\frac{\nabla^2 V}{g} = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = \frac{V^2}{R} \qquad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial b}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) = 0$$

El propósito es el de integrar las expresiones (2) en el sentido del eje (versor $\bar{l}$) y de la sección (versores $\bar{n}$ y $\bar{b}$). Por lo que:

$$\iint_{\Omega\, l} \frac{\partial}{\partial l}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) d\Omega\, dl + \iint_{\Omega\, l} \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{V^2}{2g}\right) d\Omega\, dl - \iint_{\Omega\, l} \frac{\upsilon\, \nabla^2 V}{g}\, d\Omega\, dl = cte \qquad (3)$$

Nótese que a cada línea de corriente le corresponde una constante de integración distinta, por lo que para integrar a la anterior recurrimos a un artificio (debido al Ing. Víctor Miganne), que consiste en considerar la potencia del escurrimiento en el tubo de corriente. La expresión de la misma resulta de multiplicar los términos de la anterior por Q y por γ. En efecto, dimensionalmente se tiene que:

$[\gamma QH] = \frac{F}{L^3}\frac{L^3}{T} L$ = FL/T (Potencia); y, por otra parte, $dQ = V\, d\Omega$

Multiplicando por dQ y γ todos los integrandos de la (3) se obtiene:

$$\iint_{Q\, l} \frac{\partial}{\partial l}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) \gamma dQ\, dl + \iint_{Q\, l} \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{V^2}{2g}\right) \gamma dQ dl - \iint_{Q\, l} \frac{\upsilon \nabla^2 V}{g}\, \gamma dQ\, dl = cte \qquad (4)$$

Es de destacar que la anterior se parece mucho a la ecuación previa, con la ventaja que permite su integración en base a los conceptos y artificios que siguen:

a) Solución de la primera integral doble; "Reglas de Bresse":

En la segunda de las (2) si V es lo suficientemente pequeño (no olvidar que está a la segunda potencia), o si R es muy grande, el cociente V2/R tiende a 0. Como la tercera ecuación es igual a 0, ello implica que en el plano de la sección la distribución de presiones es "hidrostática", es decir responde a la ecuación:

$$z + \frac{p}{\gamma} = cte \text{ (en la sección)} \qquad (5)$$

Las condiciones que implican $V^2/R = 0$, se enuncian como las "Reglas de Bresse". Estas implican la dependencia de las variables únicamente con la coordenada "l", por lo que:

$$\iint_{Q\, l} \frac{\partial}{\partial l}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) \gamma dQ\, dl = \int_{Q} \frac{d}{dl} \int_{l} \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) \gamma\, dl\, dQ = \gamma Q \left(z + \frac{p}{\gamma}\right) \qquad (6)$$

Las implicancias tecnológicas de la (6) son muy importantes, en efecto, tal como puede apreciarse en la Figura 5, al ser la suma en cada punto un valor constante, se puede establecer como convención que, para tuberías de relativamente pequeño diámetro frente a las presiones y alturas puestas en juego (casos más comunes de la práctica), los valores z pueden ser establecidos entre el plano arbitrario de comparación adoptado y el eje (o baricentro de la sección), y los valores de presión entre dicho eje y el nivel piezométrico.

La convención equivalente para las secciones de canales, establecería que los valores zi deberían tomarse entre el plano de comparación y el baricentro de la sección. Pero, evidentemente resulta mucho más práctico establecer los zi entre dicho plano y la solera del canal, con lo que los valores de la presión (en m de columna de agua) quedan definidos directamente por la profundidad o "tirante hidráulico h".

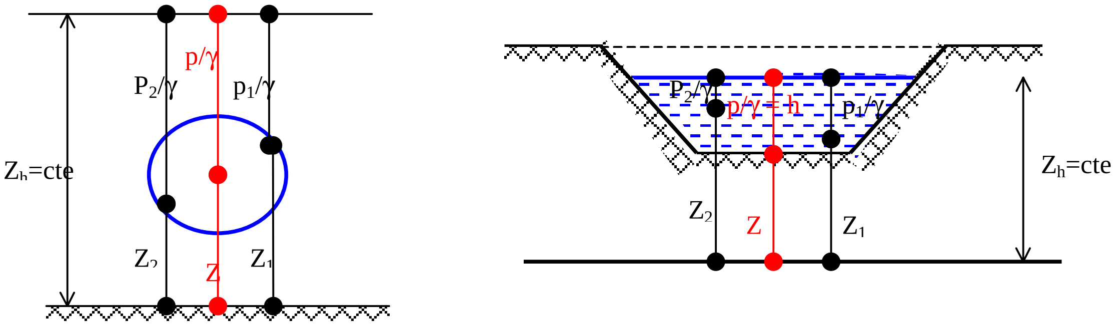


Figura 5
Consecuencias Tecnológicas de las Reglas de Bresse

b) Solución de la segunda integral doble:

Nótese que:

$$\int_Q\int_l \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{V^2}{2g}\right)\gamma\, dQ\, dl = \int_Q \frac{d}{dl}\int_l\left(\frac{V^2}{2g}\right)\gamma\, dl\, dQ = \int_Q \frac{V^2}{2g}\gamma\, dQ$$

Por otro lado, se recurre al artificio de igualar la potencia del escurrimiento real (caracterizado por la variación del valor de V de punto a punto en la sección), con la potencia de la corriente ficticia representada por el valor medio de la velocidad en la sección en estudio. En ese caso resulta:

$$\int_Q \frac{V^2}{2g}\gamma\, dQ = \alpha\, \gamma\, Q\, \frac{U^2}{2g} \tag{7}$$

En realidad, se traslada la dificultad de la integración al coeficiente α, el que posteriormente se determinará en base a su aplicación al escurrimiento de los líquidos reales (para escurrimientos turbulentos se prueba posteriormente que $\alpha \cong 1$). En efecto, al considerar que, γ es constante, que $Q = U\,\Omega$ y que $dQ = V\, d\Omega$, de la (7) se deduce que:

$$\alpha = \frac{1}{\Omega}\int_\Omega \left(\frac{V}{U}\right)^3 d\Omega$$

c) Solución de la tercer integral doble

Considerando la complejidad del término que contiene a la Laplaciana de V y la imposibilidad de integrarlo, procedemos a hacer:

$$j^* = -\frac{\upsilon \nabla^2 V}{g} \quad \Rightarrow \quad \int_Q\int_l -\frac{\upsilon \nabla^2 V}{g} dQ\,dl = \int_Q\int_l \gamma\, j^* dl\, dQ = \gamma Q \int_l j^* dl \tag{8}$$

Sumando las soluciones de las tres integrales dobles, se obtiene:

$$\gamma Q \left(z + \frac{p}{\gamma} \right) + \alpha\, \gamma Q \frac{U^2}{2g} + \gamma Q \int_l j^* \, dl = cte$$

Si se considera la "Pérdida de energía entre dos secciones 1 y 2 " como:

$$\Delta J^*_{12} = \int_2^1 j^* \, dl$$

Dividiendo por γQ y escribiendo la expresión para dos secciones 1 y 2, se tiene:

$$\boxed{z_1 + \frac{p_1}{\gamma} + \frac{U_1^2}{2g} = z_2 + \frac{p_2}{\gamma} + \frac{U_2^2}{2g} + \Delta J^*_{12}} \tag{9}$$

La (9) constituye la expresión de Bernoulli para el escurrimiento en un tubo de corriente, de un líquido incompresible, viscoso (muy similar al líquido real) en régimen permanente.

3.4. DEDUCCIÓN DE LA PRIMERA ECUACIÓN DE SAINT VENANT

Nuevamente se parte de la ecuación de Navier-Stokes en coordenadas intrínsecas, pero considerando ahora también el término de impermanencia.

$$\begin{aligned} L - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial l} + \upsilon \nabla^2 V - \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{V^2}{2}\right) &= -\frac{1}{g}\frac{\partial V}{\partial l} \\ N - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial n} &= \frac{V^2}{R} \\ B - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial b}\left(\frac{V^2}{R}\right) &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

El proceso deductivo consiste en extender la expresión al tubo de corriente, lo que implica integrar una vez en el sentido de la sección.

Recurriendo nuevamente al artificio de plantear las potencias del escurrimiento, para soslayar así el problema de una constante de integración distinta para cada línea de corriente, se tiene:

$$\int_Q\int_l \frac{\partial}{\partial l}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right)\gamma\, dQ\, dl + \int_Q\int_l \left(\frac{V^2}{2g}\right)\gamma\, dQ\, dl - \int_Q\int_l \frac{\upsilon \nabla^2 V}{g}\gamma\, dQ\, dl = -\frac{\gamma}{g}\int_Q \frac{\partial V}{\partial t} dQ \tag{11}$$

En régimen plenamente turbulento $\alpha \cong 1$, por lo que el término de impermanencia, extendido a la sección, queda:

$$-\frac{\gamma}{g}\int_Q \frac{\partial V}{\partial t} dQ = -\frac{\gamma}{g}\int_Q \frac{\partial U}{\partial t} dQ = -\frac{\gamma Q}{g}\frac{\partial U}{\partial t}$$

Recordando las reglas de Bresse, las que permitieron la extensión a la sección de los dos primeros términos, y la extensión de los correspondientes a la energía cinética y a las pérdidas de energía, se obtiene que:

$$\gamma Q \frac{\partial}{\partial l}\left(z + \frac{p}{\gamma}\right) + \gamma Q \frac{\partial}{\partial l}\left(\frac{U^2}{2g}\right) = -\, j^* \gamma Q - \frac{\gamma Q}{g}\frac{\partial U}{\partial t} \qquad (12)$$

Dividiendo por γQ, se obtiene finalmente la primer Ecuación de Saint Venant:

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial l}\left(z + \frac{p}{\gamma} + \frac{U^2}{2g}\right) = -\, j^* - \frac{1}{g}\frac{\partial U}{\partial t}} \qquad (13)$$

4. CONCLUSIONES

En el entendimiento que la enseñanza de la Ecuación de Navier-Stokes es recomendable en la Carrera de Ingeniería Civil, por constituir un caso particular de la Teoría del Medio Continuo, se obtienen las siguientes conclusiones:

- La enseñanza de la ecuación de referencia es recomendable toda vez que se pretenda una visión generalizada, a la vez que integradora, de la problemática del escurrimiento de los líquidos, puesto que muchas de las ecuaciones de utilidad práctica o "herramientas de trabajo" se obtienen de ella.

- Cuando la formación es eminentemente práctica, y sus objetivos son solamente los escurrimientos unidimensionales, no es necesaria su consideración, pudiéndose partir de la Ecuación de Saint Venant, con lo que se alivia considerablemente el tratamiento de la teoría de base.

- La ecuación permite evaluar la complejidad de los escurrimientos complejos, y posibilita explicar a los alumnos que al disponer cada vez de software mas sofisticado, la integración numérica puede realizarse para casos mas dificultosos.

- Forman parte vital de la enseñanza, los recursos para la integración para los distintos casos simplificados de aplicación práctica, para la que a veces es necesario complementar con la experimentación (Casos de escurrimiento unidimensional de líquido viscoso, en regímenes permanente e impermanente para la determinación de las “perdidas de energía”).

- La ecuación permite justificar, con excelente nivel académico, las necesidades de modelos físicos o matemáticos, al demostrar la dificultad o imposibilidad de su integración para casos complejos. Despreciando en la misma los efectos de las fuerzas relativamente poco importantes frente a la principal, y estableciendo las relaciones entre modelos y prototipos, se pueden obtener los números de Reynolds, Froude y Euler.