

# Curso de Análisis Matemático

M. en C. Rodrigo Jesús Hernández Gutiérrez  
rod@matem.unam.mx

Febrero 2009 a Mayo 2009

## ¿De que trata el curso?

Se puede decir, a muy grandes rasgos, que el Análisis es la rama de las Matemáticas que se encarga de estudiar los espacios de funciones continuas. En particular, en este curso estudiaremos las propiedades básicas de estos espacios que se relacionan con la convergencia de sucesiones. El curso se dividirá en tres partes principales, de la siguiente manera:

1. **Topología de Espacios Métricos:** Se define lo que es un espacio métrico en general y se estudian propiedades topológicas de ellos, tales como la *compacidad* y la *conexidad*. Entre los resultados más importantes tenemos el teorema de *Heine-Borel*, que nos da equivalencias de la importante noción de compacidad en espacios métricos.
2. **Continuidad de Funciones:** Se da la definición de continuidad de una función y algunas aplicaciones. Entre estas, se encuentra el hecho de que ambas propiedades de conexidad y compacidad son preservadas bajo funciones continuas. Como ejemplo, se caracterizan completamente las discontinuidades de las funciones monótonas que van de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$ .
3. **Sucesiones y Series de Funciones:** Se estudia la convergencia de sucesiones de funciones, en particular la convergencia uniforme. Un teorema importante de esta sección es el de Stone-Weierstrass que nos dice que cualquier función continua de  $\mathbb{R}$  a  $\mathbb{R}$  es límite de polinomios.

El curso estará basado en el texto de Walter Rudin citado como [1] en las referencias. En particular estudiaremos los capítulos 2, 4 y 7; que corresponden uno a cada una de las tres secciones de arriba.

**Aclaración:** El programa propuesto está basado en el programa oficial del curso, con algunas modificaciones que el profesor considera necesarias para su mejor comprensión.

## ¿Cómo se evaluará?

La evaluación consistirá en **tres** exámenes parciales que se aplicarán al final de cada uno de los tres temas. Los exámenes estarán basados en los ejercicios de los capítulos respectivos de [1]. Por ejemplo, los ejercicios del capítulo 4 servirán para el segundo tema.

Los ejercicios de cada capítulo del libro se deberán de entregar escritos en equipos de a lo más cinco (5) personas a más tardar el día del examen. Al finalizar cada tema, se dará una semana antes del examen para que los alumnos concluyan los problemas (que deben de empezar a resolver desde que empiece a estudiarse el tema) y se pregunten dudas. Claramente, es posible que algunos problemas se salgan de los objetivos del curso (es decir, sean muy difíciles). En estos casos (y solo en estos), el profesor dictaminará cuales problemas no es necesario resolver, a su criterio. Los ejercicios se considerarán como tarea, en el sentido de que serán requisito para tener calificación en ese examen. La tarea solo se considerará como requisito y no se dará calificación por ella.

**Recomendación:** Los problemas **NO** son triviales, pero tampoco son imposibles, es necesario dedicarles tiempo para resolverlos. Sugiero que se trabaje en equipo para discutirlos, no en vano se dice que dos cabezas piensan más que una y por lo tanto, por inducción matemática, entre más, mejor. Esto **NO** significa que uno tenga que trabajar para que los otros tengan su derecho a examen sin hacer nada. A pesar de esto, cada quien es libre de decidir. Recuerden que se valen los equipos de una sola persona, esto no significa que no puedan pedir ayuda a otros.

El criterio de evaluación de la tarea será exigente pero no se evaluará la perfección. Esto significa que el profesor revisará que **TODOS** los problemas estén resueltos con un pequeño margen de error (este margen será determinado por el profesor).

## ¿Que hay de los dos exámenes a los que se tienen derecho?

Al final del semestre, hay dos semanas dedicadas a exámenes ordinarios, en este semestre, son las semanas del 1 al 5 de junio de 2009 y del 8 al 12 de junio de 2009. Veamos cual será el procedimiento para saber su calificación.

En principio, la calificación del curso será el promedio de los tres exámenes parciales. Sin embargo, si alguien desea cambiar alguna de las tres calificaciones, se podrá hacer en la primera vuelta (1 al 5 de junio de 2009 en el horario que designe la coordinación). Esto significa que se podrán hacer reposiciones de los tres exámenes, o hacer un examen final. Se podrán hacer una o dos reposiciones, y el hacer tres reposiciones se reemplazará por hacer el examen final (ya que será más fácil así para el alumno). Sin embargo, para hacer estas reposiciones

se tendrán que entregar **nuevamente** las tareas que correspondan a los exámenes que se quieran reponer, de manera **individual**. En esta ocasión, la tarea también será requisito para la evaluación de los exámenes y se evaluará de la misma manera mencionada en la sección anterior. Terminando esta evaluación, el alumno reemplazará las calificaciones de sus exámenes parciales por las de sus reposiciones y el promedio será su evaluación final. En el caso de que se haya presentado examen final, la calificación del examen final será la evaluación final.

Si el alumno aún desea presentar segunda vuelta de exámenes (8 al 12 de junio de 2009), deberá indicárselo al profesor en el momento de saber su evaluación de primera vuelta. La evaluación de primera vuelta se entregará por correo electrónico a más tardar el domingo 7 de junio de 2009, asegurando que se tenga tiempo para tomar la decisión. La entrega de calificaciones no se necesita hacer en esa semana, así que se procederá de la siguiente manera. Una vez que el profesor sepa que alumnos desean hacer segunda vuelta, se preparará una tarea especial (diferente de los problemas de [1]) y se establecerá un horario en el cual los alumnos que deseen hacer segunda vuelta se reúnan para entregar esta tarea y hacer un examen. En este caso, el examen tampoco se sacará de los problemas de [1]. Sin embargo, si estará basado en los temas del programa. La evaluación en este punto será el promedio de la tarea y el examen. Por tal razón, la tarea será algo larga (5-7 problemas) y el examen será corto (2 ó 3 problemas). La comunicación para esta segunda vuelta se llevará a cabo por correo electrónico.

**Recomendación:** Estudien, ya que el examen final será difícil y les conviene tener su evaluación antes de eso.

## ¿Como puedo estudiar para los exámenes?

La mejor forma de estudiar matemáticas es hacer problemas. La primera recomendación es que sepan hacer todos los problemas de [1].

Se incluyen otros libros de bibliografía que podrían servir bastante. El primer libro de Lang [3] está aproximadamente al mismo nivel, está en la bibliografía oficial. El libro de Apostol [2] puede ser útil en sus capítulos 1 al 4. El segundo libro de Lang [4] es bastante más avanzado pero contiene en sus primeros 3 capítulos los temas del curso, con el inconveniente de que tiene pocos problemas y son difíciles. Otro clásico del análisis es el libro de Kolmogorov [5], los capítulos a considerar son del 1 al 3. Existen dos libros más que son bastante recomendados, los autores se llaman Bartle y Royden. El libro [6] es muy bonito porque contiene muchos ejemplos y contraejemplos de propiedades.

Algo que se tiene que tomar en cuenta del análisis es que es una rama muy geométrica de las matemáticas y que en muchas ocasiones es muy instructivo dibujar las funciones y como se comportan. A pesar de que hay distintas formas de pensar en matemáticas, tengo la convicción de que el pensamiento geométrico ayuda en análisis.

Por supuesto, una manera de estudiar también es de preguntar sus dudas al profesor en las sesiones de dudas.

## ¿Como será la clase?

Al principio, el profesor expondrá los temas del curso al grupo. Sin embargo, conforme se vayan avanzando en los temas y los problemas de la tarea estén al alcance de los alumnos, se tendrá una sesión de problemas.

Esta sesión tendrá dos variantes. Una es que el profesor este al frente del pizarrón pidiendo ideas para la resolución de los problemas, mostrando como se debe de escribir en un examen y el tipo de argumentos que se necesitan justificar. La segunda variante será cuando se escoja un alumno al azar para que pase a exponer algún problema. Si el alumno no conoce la solución del problema, el profesor guiará la discusión para que el alumno pueda escribir en el pizarrón la solución planteada por los alumnos. La sesión de problemas será cuando el profesor crea conveniente. Es posible que haya días en los que únicamente haya exposición del profesor, pero conforme avancen los temas, empezarán a llevarse a cabo las sesiones de problemas.

Los objetivos de la sesión de problemas son los siguientes. El más importante es enseñarle al alumno a resolver los problemas. También, el hecho de pasar a los alumnos al frente les sirve para desarrollar su habilidad expositiva y perder el miedo.

## ¿Es Análisis un curso de Calculo 5?

Si y no. Esto es porque el Análisis es la rama de las matemáticas avanzadas que generaliza una parte del cálculo. Recordemos que el cálculo es una disciplina bastante vieja que data de tiempos de Newton. En cambio, el análisis es la forma moderna de juntar sus ideas de una forma más general. Podríamos decir que el análisis es la puerta de entrada a la parte geométrica de las matemáticas modernas. Sin embargo, en este curso, no se estudiará profundamente la noción de diferenciabilidad ni de integrabilidad. Lo que nos interesa en este curso es la *topología de los espacios de funciones*. A pesar de esto, el entendimiento y madurez que se adquirió en los primeros cuatro cursos de cálculo es esencial para la comprensión de esta parte de las matemáticas.

## ¿Que requisitos de asistencia debo tener?

Hablando en general, ninguno, cada quien es libre de ir a las clases que el desee. Sin embargo, el profesor no tolerará ser abandonado por los alumnos. La participación de los alumnos en la clase es fundamental para el curso y la calificación. Un alumno puede faltar si así lo considera necesario, pero se debe de tener presencia de una gran parte del grupo. En casos en los que el grupo abandone al profesor en una clase, se tomarán las medidas necesarias (que el profesor decidirá en ese momento). Si es necesario que el grupo, como colectivo (o un subconjunto de alumnos), asista a algún evento o falte por alguna **buena** razón, deberá informar al profesor antes.

**Recomendación:** No faltes a menos que sea completamente necesario ya que podrías salir afectado.

## ¿Y este “profe” de donde salio?

Estudíe en la Facultad de Ciencias de la UNAM la licenciatura en Matemáticas en el periodo 2002-2006, titulandome con una tesis en *Teoría de Continuos*, bajo la dirección del Dr. Alejandro Illanes Mejía del Instituto de Matemáticas de la UNAM. La maestría en Ciencias Matemáticas la cursé en el periodo 2006-2008 bajo la dirección del Dr. Illanes en el Instituto de Matemáticas, especializandome en Topología. Mi tesis de maestría es de *Topología de Conjuntos* y fue dirigida por el Dr. Angel Tamariz Mascarúa de la Facultad de Ciencias de la UNAM. Actualmente estoy cursando el doctorado bajo la dirección del Dr. Tamariz. Mi area favorita de las matemáticas es la Topología General, que amo con todo mi corazón. Y como todas las cosas que se aman, uno tiene que trabajar por mantener una buena relación con ellas. El trabajo duro en las cosas que disfruto es uno de mis mayores placeres. Con esta filosofía, creo que el trabajo duro en un curso es una base para el aprendizaje.

## Referencias

- [1] Walter Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3era edición, (1976), Clasificación **QA300.R8**.
- [2] Tom M. Apostol, *Mathematical Analysis*, (1974), Clasificación **QA300 A612**.
- [3] Serge Lang, *Undergraduate Analysis*, (1997), Clasificación **QA300 L343**.
- [4] Serge Lang, *Real and Functional Analysis*, (1993), Clasificación **QA300 L346**.
- [5] A.N. Kolmogorov, S.V. Fomin, *Introductory Real Analysis*, (1975), Clasificación **QA331.5 K64**.
- [6] Bernard R. Gelbaum, John M. H. Omlmstead, *Counterexamples in Analysis*, (2003), Clasificación **QA300 G45**.