

Primer Examen Parcial, Análisis Matemático

Rodrigo Jesús Hernández Gutiérrez

19 de Marzo de 2009

Instrucciones: La duración del examen son las dos horas de clase. Los problemas 2, 3 y 4 son obligatorios. Se calificarán en total 4 problemas. Si tienes cuatro problemas completos y haces algunos otros, tendrás puntos extra. Pero no se vale hacer los seis a medias, en ese caso se calificarán los cuatro mejores y se ignorarán los otros dos. Si usas algo de lo que dice una sugerencia, tienes que probarlo. No des por hecho nada de lo que esta escrito en una sugerencia. La UNICA excepción es que en el último problema puedes usar que los conjuntos convexos son conexos sin demostrarlo.

1. **(Conjuntos)** Un número complejo z es algebraico si existe un polinomio $p \neq 0$ con coeficientes enteros tal que $p(z) = 0$. Demuestra que el conjunto de números algebraicos es numerable.

Sugerencia: A cada polinomio con coeficientes enteros $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ asigne una altura $h[f] = n + |a_n| + |a_{n-1}| + \dots + |a_1| + |a_0|$. Los polinomios con coeficientes enteros se pueden clasificar según su altura y hay un numero finito de polinomios de una altura dada.

2. **(Métricas)** Sea X un conjunto infinito. Para cualesquiera $x, y \in X$, definimos

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \neq y, \\ 0 & \text{si } x = y. \end{cases}$$

- (a) Demuestra que d es una métrica.
(b) Dí cuales subconjuntos de X son compactos con esta métrica.

3. **(Topología)** Sea M un espacio métrico. Recordemos que si $A \subset M$, entonces $\bar{A}$ denota la cerradura de A y A° denota el interior de A .

- (a) Si $E \subset M$, entonces $M - E^\circ = \overline{M - E}$.
(b) ¿Es cierto que si $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una colección de subconjuntos de M y $B = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$, entonces $\bar{B} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bar{A}_n$?

4. **(Compacidad)** Exhibe un conjunto $K \subset \mathbb{R}$ compacto cuyos puntos límite formen un conjunto numerable.

Sugerencia: Considera una sucesión convergente S y para cada punto $p \in S$, una sucesión que converja a p .

5. **(Cantor)** Demuestra que existe un conjunto perfecto en $\mathbb{R}$ que no contiene a ningún racional.

Sugerencia: Imita la construcción del conjunto de Cantor. Primero numera a los racionales $\mathbb{Q} = \{r_1, r_2, \dots\}$ y después construye una sucesión de compactos $\{K_1, K_2, \dots\}$ tales que $K_{n+1} \subset K_n$ y $r_n \notin K_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

6. **(Conexidad)**

- (a) Demuestra que un espacio métrico conexo con al menos dos puntos es no numerable.
(b) ¿Son los interiores de conjuntos conexos siempre conexos?

Sugerencia: Para la primera parte, considera un punto fijo x en el espacio X y nota que para todo $\epsilon > 0$, los conjuntos $\{y \in X : d(x, y) < \epsilon\}$ y $\{y \in X : d(x, y) > \epsilon\}$ son abiertos. Para la segunda parte, considera subconjuntos del plano.