חשבון אינפיטיסימלי 2
104281

מבחנים של פרופ' שמעון רייך

שאלה 1

(א) צ"ל: $\int\limits_0^{2\pi} \cos^4\theta d\theta = \int\limits_0^{2\pi} \sin^4\theta d\theta$

(ב) עבור אילו ערכי p,q ממשיים מתכנס האינטגרל הבא: $\int\limits_1^{\infty} \frac{x^p}{x^q-1}dx$

פתרון

(א)

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^4\theta d\theta = \int\limits_0^{2\pi} \sin^4\theta d\theta$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \cos^4\theta d\theta - \int\limits_0^{2\pi} \sin^4\theta d\theta = 0$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \left(\cos^4\theta - \sin^4\theta\right) d\theta = 0$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right)\left(\underbrace{\cos^2\theta + \sin^2\theta}_{1}\right) d\theta = 0$$

$$\int\limits_0^{2\pi} \left(\cos 2\theta\right) d\theta = \frac{1}{2}\sin 2\theta\Big|_0^{2\pi} = \frac{1}{2}\left(0-0\right) = 0$$

(ב)

$$\int\limits_1^{\infty} \frac{x^p}{x^q-1}dx = \int\limits_1^{10} \frac{x^p}{x^q-1}dx + \int\limits_{10}^{\infty} \frac{x^p}{x^q-1}dx$$

<u>$p \ge 0$</u>

נשווה עם $g(x) = \frac{1}{x^q-1}$.

$$\frac{x^p}{x^q-1}\cdot\frac{x^q-1}{1} = x^p \xrightarrow[x\to\infty]{} \begin{cases} 1 & p=0 \\ \infty & p\neq 0 \end{cases}$$

כלומר אם $\int\limits_1^{\infty} \frac{1}{x^q-1}dx$ מתבדר אזי גם האינטגרל הנתון מתבדר, אבל $\int\limits_1^{\infty} g(x)dx$ מתבדר לכל q.

$\Leftarrow$ אם $p>0$ האינטגרל הנתון מתבדר לכל q.

$p<0$

נגדיר: k>0 , $k=-p$. נשווה עם $g(x)=\frac{1}{x^k}$

$<\infty$ $\frac{1}{x^q-1}=\frac{x^p}{x^q-1}\cdot\frac{x^k}{1}$ כלומר האינטגרל הנתון מתכנס אם $\int_1^\infty \frac{1}{x^k}dx$ מתכנס. ואכן, $\int_1^\infty \frac{1}{x^k}dx$ מתכנס עבור $k>1$.

סיכום:
האינטגרל הנתון מתכנס אם $p<-1$ ולכל ערך של q .

שאלה 2

(א) תהי $\{c_n\}$ סדרת מספרים חיוביים מונוטונית וחסומה. הוכח כי $\sum_{n=1}^{k}(c_n-c_{n+1})$ הוא טור מתכנס.

(ב) תהיינה $\{a_n\},\{b_n\}$ סדרות של מספרים חיוביים. נתון כי קיים קבוע חיובי l ומספר טבעי n_0 כך ש: $\forall n>n_0 \quad b_n-\frac{a_{n+1}}{a_n}b_{n+1}\geq l>0$. הוכח שהסדרה $c_n=a_nb_n$ מונוטונית החל מ n_0 וחסומה.

(ג) הוכח (על סמך סעיפים א' ו–ב'): תהיינה $\{a_n\},\{b_n\}$ סדרות של מספרים חיוביים. אזי אם $\forall n>n_0: \quad b_n-\frac{a_{n+1}}{a_n}b_{n+1}\geq l>0$, אזי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$.

(ד) מה קורה אם: $b_n-\frac{a_{n+1}}{a_n}b_{n+1}=0$?

פתרון

(א)

$\{c_n\}$ מונוטונית וחסומה ולכן מתכנסת $c_n\xrightarrow[n\to\infty]{} l<\infty$.

$$\sum_{n=1}^{N}(c_n-c_{n+1})=c_1-c_2+c_2-c_3+-\ldots-c_{N+1}=c_1-c_{N+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}c_1-l$$

(ב)

לכל $n>n_0$ מתקיים $b_n-\frac{a_{n+1}}{a_n}b_{n+1}\geq 0$ אזי $b_n\geq\frac{a_{n+1}}{a_n}b_{n+1}$ אזי $a_nb_n\geq a_{n+1}b_{n+1}$ (כי a_n חיובי).

כלומר לכל $n>n_0$ $\{c_n\}$ יורדת, כלומר מונוטונית. $\{a_n\},\{b_n\}$ סדרות של מספרים חיוביים, אזי $a_nb_n>0$ אזי $\{c_n\}$ חיובית. $\{c_n\}$ יורדת מונוטונית , חיובית וחסומה על ידי 0.

(ג)

$$b_n-\frac{a_{n+1}}{a_n}b_{n+1}\geq l \qquad \backslash \quad a_n>0$$

$$a_nb_n-a_{n+1}b_{n+1}\geq la_n$$

לפי א: $\sum a_nb_n-a_{n+1}b_{n+1}$ מתכנס

$\Leftarrow$ הטור $\sum la_n$ מתכנס לפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים.

$\sum a_n \underset{l>0}{=} \frac{1}{l}\sum la_n \Leftarrow$ $\sum a_n$ מתכנס.

(ד)

נקבל $\frac{b_n}{b_{n+1}} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

אם $\frac{b_n}{b_{n+1}} < 1$ כלומר $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ בצורה מהירה אז $\frac{a_{n+1}}{a_n} < 1 \Leftarrow \sum a_n$ מתכנס לפי מבחן המנה של דלאמבר.

אם $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ בצורה מהירה אז $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 1 \Leftarrow \sum a_n$ מתבדר.

אם $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} l$ אז $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. אין מידע על התכנסות הטור.

שאלה 3

תהי f פונקציה רציפה המוגדרת על $[0,\infty)$ כך ש:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=0$$

$$f(0)=0$$

f לא זהותית 0. מגדירים שתי סדרות פונקציות: $g_n(x)=f\left(\frac{x}{n}\right)$ ו- $h_n(x)=f\left(nx\right)$.

(א) הוכח כי $\{h_n\},\{g_n\}$ מתכנסות ל- $F(x)\equiv 0$ בתחום $[0,\infty)$, אך לא במידה שווה.

(ב) מגדירים סדרת פונקציות נוספת $\widetilde{f}_n(x)=h_n(x)g_n(x)$. הוכח כי סדרה זו מתכנסת ל $F(x)\equiv 0$ במידה שווה ב $[0,\infty)$.

פתרון

(א)

נראה התכנסות. לכל $x_0\in[0,\infty)$ מתקיים:

$F(x_0)=\lim_{n\to\infty} h_n(x_0)=\lim_{n\to\infty} f(nx_0)$ כיוון ש- f רציפה נוכל להכניס את הגבול פנימה:

$$F(x_0)=f(\lim_{n\to\infty} nx_0)$$

אם $x_0=0$ אז $f(\lim_{n\to\infty} nx_0)=f(0)=0$.

אם $x_0\neq 0$ אז $f(\lim_{n\to\infty} nx_0)=f(0)=0$.

כלומר $F(x_0)\equiv 0$ לכל $x_0\in[0,\infty)$.

באותו אופן $F(x_0)=\lim_{n\to\infty} g_n(x_0)=\lim_{n\to\infty} f(\frac{x_0}{n})=f(0)=0$, $\forall x_0\in[0,\infty)$.

נראה שההתכנסות לא במ"ש:

צ"ל: $\exists\varepsilon>0:\quad \forall n\quad \exists x_0\in(0,\infty):\left|h_n(x)-F(x_0)\right|>\varepsilon$.

f לא זהותית 0, אז קיים $x_0\neq 0$ כך ש $f(x_0)=k\neq 0$.

לכן, אם ניקח: $x_n=\frac{x_0}{n}$, $\varepsilon=\left|\frac{k}{2}\right|$ נקבל:

$$\left|h_n(x_n)-F(x_n)\right|=\left|f\left(n\frac{x_0}{n}\right)-0\right|=\left|f(x_0)\right|=|k|>\left|\frac{k}{2}\right|=\varepsilon$$

צ"ל: $\exists\varepsilon>0:\quad \forall n\quad \exists x_0\in(0,\infty):\left|g_n(x)-F(x_0)\right|>\varepsilon$.

f לא זהותית 0, אז קיים $x_0\neq 0$ כך ש $f(x_0)=k\neq 0$.

לכן, אם ניקח: $x_n=x_0\cdot n$, $\varepsilon=\left|\frac{k}{2}\right|$ נקבל:

$$\left|g_n(x_n)-F(x_n)\right|=\left|f\left(\frac{x_0\cdot n}{n}\right)-0\right|=\left|f(x_0)\right|=|k|>\left|\frac{k}{2}\right|=\varepsilon$$

(ב)

$$\widetilde{f}_n(x) = h_n(x) g_n(x) = f(nx) f\left(\frac{x}{n}\right)$$

f רציפה ב- $[0,\infty)$, $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

$\Leftarrow$ f חסומה ב- $[0,\infty)$: $f(x)<m \quad \forall x \in [0,\infty)$.

נניח בשלילה $\widetilde{f}$ לא מתכנסת במ"ש ל-0. אזי $\exists \varepsilon > 0: \quad \forall n \quad \exists x_n \in (0,\infty): \left|\widetilde{f}_n(x) - 0\right| > \varepsilon$.

כלומר $\widetilde{f}_n(x_n) \xrightarrow[x_n \to x_0]{} k$. נניח שקיים x_n כזה. $\widetilde{f}_n(x_n) = f(nx_n) f\left(\frac{x_n}{n}\right)$.

אם $f(nx_n) \to x_0 < \infty$, f חסומה, אז $f\left(\frac{x_n}{n}\right) \to 0 \Leftarrow \widetilde{f}_n(x_n) \to 0$.

אם $f\left(\frac{x_n}{n}\right) \to x_0 < \infty$, f חסומה, אז $f\left(nx_n\right) \to 0 \Leftarrow \widetilde{f}_n(x_n) \to 0$.

בכל מקרה קיבלנו סתירה, לכן $\widetilde{f}_n(x)$ מתכנסת במ"ש ל- $F(x) \equiv 0$.

שאלה 4

(א) רשום פיתוח לטור חזקות סביב $x=0$ של הפונקציה $\ln(1+x)$. מהו תחום התכנסות הטור?

(ב) בהסתמך על א' יש לחשב את הגבול $\lim_{n\to\infty} n^3\left[\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)-1-\frac{1}{12n^2}\right]$.

פתרון

(א)

נתבונן בטור ההנדסי: $\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+x^4-.....$. זהו טור הנדסי $a_0=1$, $q=-x$.

הטור הנ"ל מתכנס במ"ש עבור $|x|<1$. $\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k$.

ניתן לבצע אינטרגרציה איבר-איבר בתחום ההתכנסות.

$$\int\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int x^k$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{x^{k+1}}{k+1}$$

קבלנו טור עם אותו רדיוס התכנסות. תחום ההתכנסות : $(-1,1]$.

(ב)

$f(x)\triangleq\left(\frac{1}{x}\right)^3\left[\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\ln(1+x)-1-\frac{x^2}{12}\right]$. נבדוק $\lim_{x\to0^+} f(x)$.

$$g(x)=\left[\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\ln(1+x)-1-\frac{x^2}{12}\right]=\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+o(3)\right)-1-\frac{x^2}{12}=$$

$$=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{3}-\frac{x^3}{4}+\frac{x}{2}-\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}+o(3)-1-\frac{x^2}{12}=$$

$$=-\frac{x^3}{12}+o(3)$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{g(x)}{x^3}=-\frac{1}{12}$$

שאלה 5

תהי $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ גזירה בכל $\mathbb{R}$. נגדיר פונקציה חדשה $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ ע"י $\begin{matrix} f(x,y,z)=g(u) \\ u=xy+y^z+zx \end{matrix}$.

(א) הוכח כי f גזירה בכל $\mathbb{R}^3$.

(ב) חשב את ערכו של הביטוי הבא בכל נקודה (x,y,z):

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}$$

והראה כי הוא תלוי ב- u בלבד.

פתרון

(א)

לפי כלל השרשרת אם g גזירה ו- u גזירה אז גם $f(x,y,z)=g(u)$ גזירה ונגזרתה:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{dg}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{dg}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$
$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{dg}{du}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}$$

(ב)

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y+z$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}=x+z$$
$$\frac{\partial u}{\partial z}=x+y$$
$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}+z\frac{\partial f}{\partial z}=g'(y+z)x+g'(x+z)y+g'(y+z)z=$$
$$g'(yx+zx+xy+zy+yz+xz)=2ug'$$

שאלה 1

תהי $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x)=\begin{cases} x\sin(\ln x) & 0<x\le 1 \\ 0 & x=0 \end{cases}$

(א) צ"ל: f גזירה לכל $0<x\le 1$ אבל לא ב $x=0$.

(ב) הוכח כי האינטגרל הבא קיים $\int_0^1 f'(x)dx$.

(ג) הוכח כי $\int_0^1 f'(x)dx=0$.

פתרון

(א)

בתחום $(0,1]$ f היא מכפלה והרכבה של פונקציות גזירות ולכן גזירה. ב $(0,0)$ נבדוק לפי הגדרה.

$$\lim_{h\to 0^+}\frac{f(h)-f(0)}{h-0}=\lim_{h\to 0^+}\frac{h\sin(\ln h)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\sin(\underbrace{\ln h}_{-\infty})\to$$ אין גבול

לכן הפונקציה לא גזירה ב- $x=0$.

(ב) (ג)

ראשית, הפונקציה והנגזרת אינטגרביליות בקטע $[\varepsilon,1]$ לכל $0<\varepsilon<1$, כיוון שהן רציפות בתחום סגור.
עתה נראה שזהו אינטגרל מוכלל (אף שהוא חסום בקטע סגור) וערכו 0.
עבור $0<x\le 1$:

$$f'(x)=\sin(\ln(x))+x\cdot\cos(\ln(x))\cdot\frac{1}{x}=\sin(\ln(x))+\cos(\ln(x))$$

$$\int_0^1(\sin(\ln x)+\cos(\ln x)dx=$$

$$=\int_{-\infty}^0 e^t(\sin t+\cos t)dt=\int_{-\infty}^0 e^t\sin tdt+\int_{-\infty}^0 e^t\cos tdt=$$

$$=e^t\sin t\Big|_{-\infty}^0-\int_{-\infty}^0 e^t\cos tdt+\int_{-\infty}^0 e^t\cos tdt=$$

$$=e^t\sin t\Big|_{-\infty}^0=\lim_{u\to-\infty}e^t\sin t\Big|_u^0=\lim_{u\to-\infty}\underbrace{-e^u}_{0}\underbrace{\sin u}_{bounded}=0$$

$t=\ln x$
$e^t=x$
$e^t dt=dx$
$x=1\to t=0$
$x=0\to t=-\infty$

$u'=e^t;v=\sin t$
$u=e^t;v'=\cos t$

שאלה 2

עבור אילו ערכי α מתכנסת הסדרה $f_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}$ כאשר $x\in[0,1]$, ועבור אילו ערכי α ההתכנסות היא במ"ש?

פתרון

$$f_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}=x\frac{n\alpha}{e^{nx}}$$
$$x\in[0,1]$$

לכל $0<x\le 1$, $x\frac{n\alpha}{e^{nx}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ ללא תלות ב- α. (אקספוננט "חזק" מכל פולינום ואם $\alpha<0$ על אחת כמה וכמה ההתכנסות תהיה ל-0).

וב- $x=0$ $\quad \forall n: f_n(x)=0$.

כלומר הסדרה $\{f_n(x)\}$ מתכנסת לכל α. עתה נבדוק התכנסות במ"ש:

$$M_n=\sup\left|f_n(x)-f(x)\right|=\sup\left|n^{\alpha}x^{-nx}-0\right|\underset{(*)}{=}n^{\alpha}\frac{1}{n}e^{-n\frac{1}{n}}=n^{\alpha-1}e^{-1}$$

נימוק ל-*:

לכל n $f_n(x)$ היא פונקציה גזירה. נמצא את המקסימום שלה בתחום $[0,1]$.

$$f_n'(x)=\left(n^{\alpha}xe^{-nx}\right)'=n^{\alpha}\left(e^{-nx}+xe^{-nx}(-n)\right)=\underbrace{n^{\alpha}e^{-nx}}_{<0\ \ \forall x}(1-nx)$$

$$f_n'(x)=0\Leftrightarrow 1-nx=0\Rightarrow x=\frac{1}{n}$$

זוהי נקודת מקסימום כיוון שעבור $\frac{1}{n}<x<1$ הנגזרת שלילית ועבור $0<x<\frac{1}{n}$ הנגזרת חיובית. תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות במ"ש של סדרת הפונקציות: $\lim_{n\to\infty}M_n=0$.

$M_n=n^{\alpha-1}e^{-1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0\Leftrightarrow\alpha-1<0\Leftrightarrow\alpha<1$. אזי $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במ"ש ל-0 עבור $\alpha<1$.

שאלה 3

יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ טור מספרים מתכנס.

(א) הוכח כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$ מתכנס.

(ב) הוכח את הזהות $\int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$

(ג) חשב את סכום הטור: $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$

פתרון

(א)

נתון כי הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ מתכנס. כלומר טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס עבור $x=1$. ולכן מתכנס במ"ש ב $[0,1]$. לכן ניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר והטור המתקבל מתכנס גם הוא (עם אותו רדיוס התכנסות) וערכו שווה לאינטגרל של הטור המקורי. לכן עבור $\int_0^1$ נקבל:

$$\int_0^1 dx \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 x^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$$

טור חזקות אינטגריבילי בתחום התכנסותו.

(ב)

עבור טור חזקות $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ נתון שהטור מתכנס ב- $x=1$. ולכן הוא מתכנס במ"ש בקטע $[0,1]$. לכן ניתן לבצע אינטגרציה איבר-איבר בתחום:

$$\int_0^1 dx \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^1 x^n \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left. \frac{x^{n+1}}{n+1} \right|_0^1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}$$

(ג)

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \ldots$$

ניתן להציג את הסכום הנ"ל כסכום של טור חזקות :

$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \ldots$ בנקודה $x=1$.

רדיוס התכנסות הטור: $R = 1 \Leftarrow 1 = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[2n+1]{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\frac{1}{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n+1]{\left| \frac{(-1)^n}{2n+1} \right|}$.

בנקודה $x=1$ מתקבל טור לייבניץ ולכן הטור המקורי מתכנס במ"ש בקטע $[0,1]$ וניתן לבצע גזירה איבר-איבר.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}\right)' = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n \left(2n+1\right) x^{2n}}{2n+1}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \frac{1}{1+x^2}$$

נבצע אינטגרציה בחזרה ונקבל $\int \frac{1}{1+x^2}dx = \arctan x$

$$\arctan x(1) = \frac{\pi}{4}$$

אין איבר חופשי כי האיבר החופשי של הטור המקורי הוא 0. אזי $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-... = \frac{\pi}{4}$.

שאלה 4

(א) בדוק האם הפונקציה הבאה גזירה בנקודה $(0,0)$.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y+y^2x}{x^2+y^2}\sin(x-y) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

(ב) תהי $L(u,v)$ פונקציה בעלת נגזרות חלקיות רציפות. תהי $y(t)$ בעלת נגזרות רציפות עד סדר 2 כולל. מציבים לתוך הפונקציה L, במקום המשתנים u,v את הפונקציות $v=y'(t)$ $u=y(t)$ נתון שמתקיימת הזהות $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial L}{\partial v}\right)=\dfrac{\partial L}{\partial u}$. הוכח כי הביטוי $H(u,v)=v\dfrac{\partial L}{\partial v}-L(u,v)$ איננו תלוי ב t.

פתרון

(א)

נמצא תחילה את הנגזרות החלקיות בנקודה $(0,0)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{0}{h}=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{k\to0}\frac{f(k,0)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to0}\frac{0}{k}=0$$

כעת נבדוק גזירות לפי הגדרה.

$$\varepsilon(h,k)=\frac{f(h,k)-f(0,0)-f_x(0)\cdot h-f_y(0)\cdot k}{\sqrt{n^2+k^2}}=\frac{hk(h+k)\sin(h-k)}{\left(n^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}=\begin{vmatrix}h=r\cos\theta\\ k=r\sin\theta\end{vmatrix}$$

$$=\frac{r^3\overbrace{(\cos^2\theta\sin\theta+\sin^2\theta\cos\theta)}^{bounded}\sin(r\overbrace{(\cos\theta-\sin\theta)}^{bounded})}{r^3}\xrightarrow[\substack{r\to0\\ h,k\to0}]{}0$$

לכן ניתן להציג את $f(0+h,0+k)$ על ידי

$$f(0,0)+\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h+\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k+\varepsilon\left(h,k\right)\sqrt{h^2+k^2}$$

כאשר $\varepsilon\left(h,k\right)\xrightarrow[h,k\to0]{}0$ ולכן f דיפרנציאבילית ב $(0,0)$.

(ב)

אם $H(u,v)$ אינה תלויה ב t אזי לאחר גזירה לפי t נקבל 0. נשתמש בכלל השרשרת.

$$\frac{d}{dt}H(u,v)=\frac{d}{dt}\left(v\frac{\partial L}{\partial v}-L(u,v)\right)=\begin{pmatrix}u=y(t)\\ v=t'(t)\end{pmatrix}=y''(t)\frac{\partial L}{\partial v}+\underset{y'(t)}{v}\underbrace{\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial v}\right)}_{\frac{\partial L}{\partial u}}-\left(\frac{\partial L}{\partial u}\underbrace{\frac{\partial u}{dt}}_{y'(t)}+\frac{\partial L}{\partial v}\underbrace{\frac{\partial u}{\partial t}}_{y''(t)}\right)=$$

$$=y''(t)\frac{\partial L}{\partial v}+y'(t)\frac{\partial L}{\partial u}-\frac{\partial L}{\partial u}y'(t)-\frac{\partial L}{\partial v}\frac{\partial u}{\partial t}=0$$

שאלה 5

תהי f מוגדרת על ידי הנוסחא $F(x)=\int_0^\infty \frac{\cos(xy)}{1+y^3}dy$

(א) מהו תחום ההגדרה המקסימלי של $F(x)$?
(ב) האם F רציפה שם?
(ג) האם F גזירה שם?

פתרון

(א)

$$\int_0^\infty \left|\frac{\cos(xy)}{1+y^3}\right|dy \le \int_0^\infty \frac{1}{1+y^3} = \underbrace{\int_0^1 \frac{1}{1+y^3}}_{1} + \underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{1+y^3}}_{2} < \infty$$

(1) $\frac{1}{1+y^3}$ פונקציה רציפה ב $[0,1]$ ולכן אינטגרבילית. אזי קיים אינטגרל והוא סופי.

(2) דרגת y גדולה מ-1. ולכן האינטגרנד הנ"ל מתכנס בהחלט ובמ"ש לכל x. ולכן ללא ערך מוחלט $F(x)$ מוגדרת לכל x ב $\mathbb{R}$.

(ב)

לכל x הפונקציה $g(y)=\frac{\cos(xy)}{1+y^3}$ רציפה ב- $[0,\infty)$ והראינו בסעיף א התכנסות במ"ש (מבחן M וירשטראס) לכן $F(x)$ רציפה בתחום $\mathbb{R}$.

(ג)

התכנסות בנקודה קיימת מכיוון שיש התכנסות בכל התחום נותר לבדוק גזירות. נבדוק לגבי: $\int_0^\infty dy\frac{d}{dx}\frac{(\cos(xy))}{1+y^3}=\int_0^\infty dy\frac{-y\sin(xy)}{1+y^3}$ התכנסות הנגזרת לפי x על האינטגרנד. ועתה שוב על ידי משפט M ויירשטראס:

$$\int_0^\infty \left|\frac{-y\sin(xy)}{1+y^3}\right|dy \le \int_0^\infty \left|\frac{|y||\sin(xy)|}{1+y^3}\right|dy \le \int_0^\infty \frac{y}{1+y^3}dy \le \int_0^1 \frac{y}{1+y^3}dy + \int_1^\infty \frac{y}{1+y^3} < \infty$$

דרגת הפולינום גדולה מ1   פונקציה רציפה בתחום סגור

לכן יש התכנסות במ"ש על האינטגרל המוכלל לכל הנגזרות ולכן $F(x)$ גזירה בכל התחום.

שאלה 1

תהא העתקה $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+x^3}}$. בדקו התכנסות האינטגרלים הבאים:

(א) $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

(ב) $\int_0^{1} f(x)dx$

פתרון

(א)

$\frac{1}{x}\le\frac{1}{x\sqrt{1-x}}=\frac{1}{\sqrt{x^2+x^3}}=f(x)$ $\Leftarrow$ לפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים כי $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$ מתכנס.

(ב)
הושמט

שאלה 2

הושמטה

עבור אילו ערכי α מתכנסת הסדרה $f_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}$ כאשר $x\in[0,1]$, ועבור אילו ערכי α ההתכנסות היא במ"ש?

פתרון

$$f_n(x)=n^{\alpha}xe^{-nx}=x\frac{n\alpha}{e^{nx}}$$
$$x\in[0,1]$$

לכל $0<x\leq 1$, $x\frac{n\alpha}{e^{nx}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ ללא תלות ב- α. (אקספוננט "חזק" מכל פולינום ואם $\alpha<0$ על אחת כמה וכמה ההתכנסות תהיה ל-0).

וב- $x=0$ $\quad \forall n: f_n(x)=0$.

כלומר הסדרה $\{f_n(x)\}$ מתכנסת לכל α. עתה נבדוק התכנסות במ"ש:

$$M_n=\sup\left|f_n(x)-f(x)\right|=\sup\left|n^{\alpha}x^{-nx}-0\right|\underset{(*)}{=}n^{\alpha}\frac{1}{n}e^{-n\frac{1}{n}}=n^{\alpha-1}e^{-1}$$

נימוק ל-*:

לכל n $f_n(x)$ היא פונקציה גזירה. נמצא את המקסימום שלה בתחום $[0,1]$.

$$f_n'(x)=\left(n^{\alpha}xe^{-nx}\right)'=n^{\alpha}\left(e^{-nx}+xe^{-nx}(-n)\right)=\underbrace{n^{\alpha}e^{-nx}}_{<0\ \ \forall x}(1-nx)$$

$$f_n'(x)=0\Leftrightarrow 1-nx=0\Rightarrow x=\frac{1}{n}$$

זוהי נקודת מקסימום כיוון שעבור $\frac{1}{n}<x<1$ הנגזרת שלילית ועבור $0<x<\frac{1}{n}$ הנגזרת חיובית. תנאי הכרחי ומספיק להתכנסות במ"ש של סדרת הפונקציות: $\lim_{n\to\infty}M_n=0$.

$M_n=n^{\alpha-1}e^{-1}\xrightarrow[n\to\infty]{}0\Leftrightarrow \alpha-1<0\Leftrightarrow\alpha<1$. אזי $\{f_n(x)\}$ מתכנסת במ"ש ל-0 עבור $\alpha<1$.

שאלה 4

חשבו $I(a)=\int_0^{\pi}\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}dx \quad , \quad |a|<1$

פתרון

נגדיר :

$$f(x,a)=\frac{\ln(a+a\cos x)}{\cos x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{1}{\cancel{\cos x}}\cdot\frac{1}{1+a\cos x}\cdot\cancel{\cos x}$$

לפי לייבניץ:

$$I'(a)=\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+a\cos x}\underset{\begin{pmatrix}t=tg\frac{x}{2}\\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{pmatrix}}{=}\int_0^{\infty}\frac{2dt}{1+t^2}\cdot\frac{1}{1+a\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=2\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2+a(1-t^2)}=2\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+a+(1-a)t^2}=$$

$$=\frac{2}{1+a}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+\left(\frac{1-a}{1+a}\right)t^2}=\frac{2}{1+a}\cdot\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\arctan\sqrt{\left(\frac{1-a}{1+a}\right)}\cdot t\Bigg|_{t=0}^{t=\infty}=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

לפיכך:

$$\Rightarrow I(a)=\int\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}da=\pi\cdot\arcsin a+C$$

ב $a=0$: $\quad I(a)=0$ (לפי האינטגרל המקורי).

$$\Rightarrow I(0)=\pi\cdot\arcsin 0+C=0\Rightarrow C=0$$

צריך להצדיק את השימוש בלייבניץ. מחפשים מלבן $\underbrace{[0,\pi]}_{x\in}\times\underbrace{[s,t]}_{a\in}$ בו $f(x,a)$ מקיימת:

(1) לכל $a\in[s,t]$, $I(a)=\int_0^{\pi}f(x,a)dx$ מוגדר.

(2) $\frac{\partial f}{\partial a}$ רציפה במלבן. ✓

כדי שגם (1) יתקיים מספיק ש $f(x,a)$ תהיה רציפה כפונקציה של x , לכל a קבוע. אצלנו f לא מוגדרת ב- $\frac{\pi}{2}$. אבל:

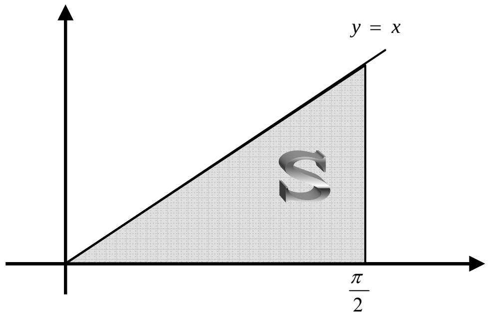
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x,a)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+a_0\cos x)}{\cos x}\sim\frac{0}{0}\Rightarrow LOP$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{1+a_0\cos x}-a_0\sin x}{-\sin x}=a_0$$

לכן אם נגדיר $\tilde{f}=\begin{cases} f(x,a) & x\neq\frac{\pi}{2} \\ a & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ אזי $\tilde{f}$ רציפה (ונבדלת מ- f בדיוק בנקודה אחת). אזי $\tilde{f}$ אינטגרבילית. לכן, $I(a)=\int_0^{\pi} f(x,a)dx$ מוגדר היטב , והאינטגרל הזה לא שונה מהאינטגרל על f (כי הם שונים זה מזה בנקודה אחת בלבד). לכן, במלבן $[0,\pi]\times[-1+\varepsilon,1-\varepsilon]$ יש לייבניץ.

שאלה 5

$$S = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, \begin{matrix} 0 \le y \le x \\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2} \end{matrix} \right\}$$



חשבו: $I = \iint\limits_S \frac{\sin x}{x+y} dxdy$

פתרון

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^x \frac{\sin x}{x+y} dy \right) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \left(\left(\ln|x+y| \right) \Big|_{y=0}^{y=x} \right) dx =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \left(\ln 2 \right) dx = \ln 2$$

אבל הפונקציה $f(x,y) = \frac{\sin x}{x+y}$ לא רציפה בתחום. למשל, כי על הישר $y=0$ מקבלים 1 בגבול בשאיפה ל-0 ואילו על $y=x$ מקבלים $\frac{1}{2}$. מסקנה: הפונקציה לא רציפה בראשית.

נצדיק שהפונקציה חסומה בתחום, ולכן החישוב בכל זאת תקף (כי יש רק נקודת אי-רציפות אחת).

$$\left| \frac{\sin x}{x+y} \right| \overset{?}{\le} M$$

$$|\sin x| \overset{?}{\le} M\,|x-y|$$

$$|\sin x| \le |x| \underset{\substack{\text{in} \\ \text{our} \\ \text{domain}}}{\le} |x+y|$$

מסקנה: חסומה על ידי $M=1$.