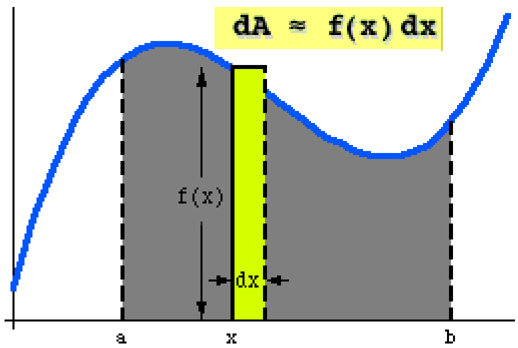
חשבון אינפיטיסימלי 2
104281



חוברת תרגולים
מתרגל:אביב צנזור

פתח דבר

חוברת זו מכילה רשימות משיעורי התירגול בקורס חשבון אינפיטיסימלי 2 בטכניון (104281) שהועברו על ידי המתרגל אביב צנזור ואשר צולמו בוידאו. חלק מהחומר המובא כאן הוסף על ידי המחבר כדי לדאוג לשלמות החומר וכהכנה למבחן סוף הסמסטר. מקווה שתפיקו מחוברת זו את המיטב.

בהצלחה בבוחן האמצע ובמבחן הסופי!

(-) הדר בן-דוד

תוכן ענינים

תרגול 1: האינטגרל הלא-מסוים

הגדרה

- $F(x)$ היא **<u>פונקציה קדומה</u>** של $f(x)$ בקטע I אם לכל $x \in I$ מתקיים $F'(x) = f(x)$.

טענה 1

אם F, G שתי פונקציות קדומות של f, אזי קיים קבוע c כך ש $F(x) = G(x) + c$.

הוכחה 1

$0 = f - f = F' - G' = (F - G)' \Leftarrow F - G$ קבועה.

- ***<u>סימון:</u>***

$$\int f(x)dx$$

דוגמאות

(1)

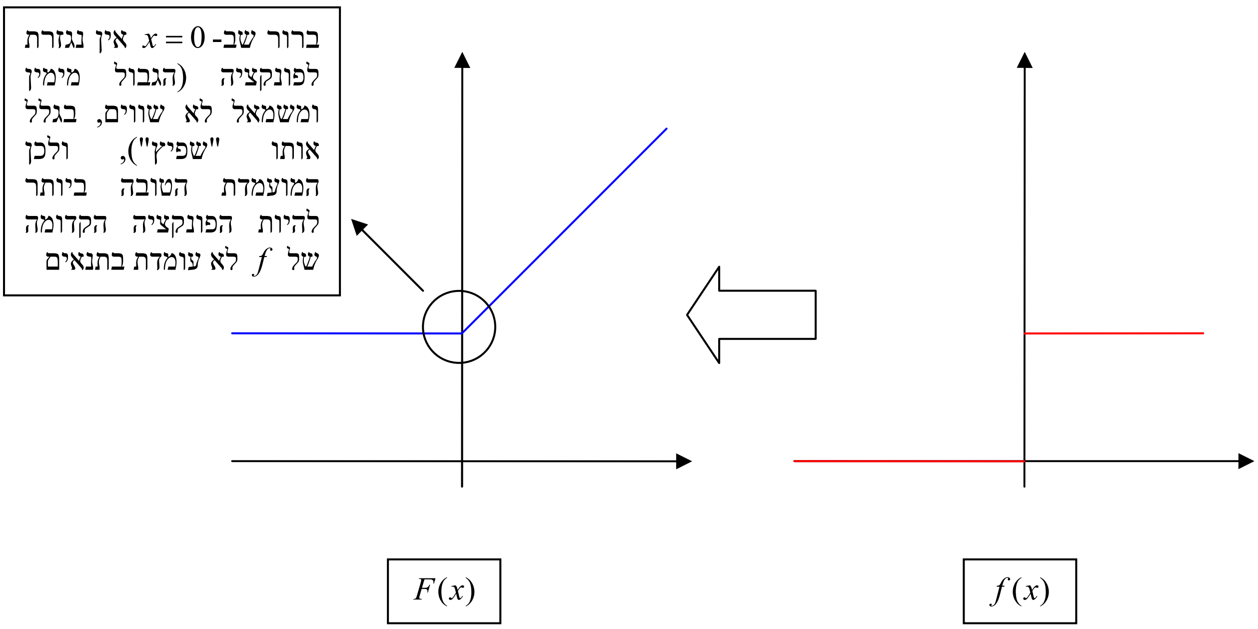
$$\int \sin x dx = -\cos x + c$$

(2)

$$\int x dx = \frac{x^2}{2}$$

- ***<u>הערה</u>***: לא לכל f יש פונקציה קדומה!

דוגמא:



כללים

$$\int af(x)dx = a\int f(x)dx$$
$$\int \left(f(x)+g(x)\right)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

הוכחה: תרגיל

(3)

$$\int \frac{x^4}{1+x^2}dx = \int \frac{x^4-1}{1+x^2}dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx =$$
$$= \int \frac{\cancel{\left(x^2+1\right)}\left(x^2-1\right)}{\cancel{1+x^2}}dx + \int \frac{1}{1+x^2}dx =$$
$$= \frac{x^3}{3} - x + \arctan(x) + c$$

(4)

$$\int \tan(x)dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln\left|\cos x\right| + c$$

אינטגרציה בחלקים

יהיו u ו-v שתי פונקציות גזירות. לפי כללי נגזרת: $\left[u(x)\cdot v(x)\right]' = u'v + uv'$.

על פי כללי האינטגרציה על שני האגפים: $uv = \int u'v + \int uv'$.

ניסוח שונה מעט (העברת אגפים): $\int uv' = uv - \int u'v$.

(5)

$$\int xe^x dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + c$$
$$u = x; v' = e^x$$
$$u' = 1; v = e^x$$

- נבחר את ה-v' כזו שאנו יודעים לעשות את האינטגרל שלה.

(6)

$$\int e^x \cos(x)dx = e^x \cos(x) + \int e^x \sin(x)dx$$

$u = \cos(x) \qquad v' = e^x$

$u' = -\sin(x) \qquad v = e^x$

$$\int e^x \sin(x)dx = e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)dx$$

$u = \sin(x) \qquad v' = e^x$

$u' = \cos(x) \qquad v = e^x$

$$\int e^x \cos(x)dx = e^x \cos + \int e^x \sin(x)dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) - \int e^x \cos(x)dx$$

$$\Rightarrow 2\int e^x \cos(x)dx = e^x \cos(x) + e^x \sin(x) + c$$

(7)

$$\int \arctan(x)dx =$$

$$= \int 1 \cdot \arctan(x)dx = x \cdot \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2}dx = x \cdot \arctan(x) - \frac{\ln\left|1+x^2\right|}{2} + c$$

$u = \arctan(x) \qquad v' = 1$

$u' = \dfrac{1}{1+x^2} \qquad v = x$

שיטת ההצבה

תהי $\underset{x\in I}{f:I\to\mathbb{R}}$ ותהי $\underset{t\in J}{\varphi:J\to I}$ גזירה והפיכה (חח"ע ועל).

אנחנו מחפשים את $F(x)=\int f(x)dx$.

את x נוכל לכתוב כ- $\varphi(t)$. נסתכל על $F(\varphi(t))$.

$$[F(\varphi(t))]'=F'(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)=f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)\setminus\int$$
$$\Rightarrow F(\varphi(t))=F(x)=\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))\cdot\varphi'(t)$$

שיטת ההצבה: $\int f(x)dx \underset{\substack{x=\varphi(t)\\ \frac{dx}{dt}=\varphi'(t)\\ dx=\varphi'(t)dt}}{=}$

(8)

$x\in\mathbb{R}^+$

$(x>0)$

$$\int\frac{1}{x(x^{10}+1)}dx \underset{\substack{t=x^{10}\\ x=t^{\frac{1}{10}}\to\varphi(t):[0,\infty)\to[0,\infty)\\ dt=10x^9dx\\ dx=\frac{dt}{10t^{\frac{9}{10}}}}}{=} \int\frac{dt}{10t^{\frac{9}{10}}\cdot t^{\frac{1}{10}}\cdot(t+1)}=\int\frac{dt}{10t(t+1)}=\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)dt=$$

$\varphi(t)$ גזירה חח"ע ועל

$$=\frac{1}{10}\left(\ln|t|+\ln|t+1|\right)+c=\frac{1}{10}\ln\left(\frac{x^{10}}{x^{10}+1}\right)+c$$

(9)

תרגיל לבית:

$$\int x\sqrt{1+x}\cdot dx$$

<u>דרך א</u>: אינטגרציה בחלקים:

$u=x \qquad v'=\sqrt{1+x}$

$u'=1 \qquad v=\frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}}$

<u>דרך ב</u>: שיטת ההצבה:

$$t=\sqrt{1+x}$$

תרגול 2: האינטגרל הלא-מסוים (המשך)

אינטגרציה של פונקציות רציונליות

P,Q פולינומים $R(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$

- אם מעלת P $\leq$ מעלת Q נבצע חלוקת פולינומים.

(10)

$$\int\frac{2x^4-x^3-x^2+3x-4}{x^2+1}dx=\int\left(2x^2-x-3\right)dx+\int\left(\frac{4x-1}{x^2+1}\right)dx=$$

$$=\frac{2x^3}{3}-\frac{x^2}{2}-3x+\int\left(\frac{4x-1}{x^2+1}\right)dx$$

בהמשך (13) | תמיד מיידי

- כעת נניח שמעלת P $<$ מעלת Q.

הפולינום Q מתפרק (מעל $\mathbb{R}$) לגורמים ליניאריים מהצורה $(x-\alpha)$ ולגורמים ריבועיים מהצורה (x^2+px+q) כאשר $p^2-4q<0$ (נובע מהמשפט היסודי של האלגברה – ההוכחה – בקורס פונקציות מרוכבות).

על פי משפט: את $\frac{P}{Q}$ ניתן לרשום תמיד כ: $\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-5}+\frac{C}{\left(x-5\right)^2}+\frac{Dx+E}{x^2-x+1}+\dots$

תהליך זה ***נקרא פירוק לשברים חלקיים.***

כלומר צריך:

1. לפרק את Q.
2. לפרק את $\frac{P}{Q}$ לשברים חלקיים.
3. לפתור 4 סוגים של אינטגרלים שמתקבלים.

(1)

$$\int\frac{A}{x-\alpha}=A\ln(x-\alpha)+c$$

מיידי

(2)

$$\int\frac{A}{\left(x-\alpha\right)^n}=\frac{A}{-n+1}\frac{1}{\left(x-\alpha\right)^{n-1}}+c$$

$n>1$

מיידי

(3)

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}\,dx =$$

$$p^2-4q<0$$

מיד נראה דוגמא

(4)

$$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}\,dx =$$

$$p^2-4q<0$$

מורידים את n על ידי נוסחת נסיגה

(11)

$$\int \frac{dx}{2x^2+9x-5} = \int \frac{dx}{(2x-1)(x+5)} = \int \left(\frac{A}{(2x-1)} + \frac{B}{(x+5)} \right) dx =$$

$$\frac{dx}{(2x-1)(x+5)} = \left(\frac{A}{(2x-1)} + \frac{B}{(x+5)} \right)$$

$$\Rightarrow 1 = A(x+5) + B(2x-1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 = A+2B \\ 1 = 5A-B \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = \frac{2}{11} \\ B = -\frac{1}{11} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{11}\int \frac{2}{2x-1}dx - \frac{1}{11}\int \frac{1}{x+5}dx =$$

$$= \frac{1}{11}\ln|2x-1| - \frac{1}{11}\ln|x+5| + c$$

(12)

$$\int \frac{9x-5}{9x^2-6x+1}dx = \int \frac{9x-5}{(3x-1)^2}dx =$$

$$\frac{9x-5}{(3x-1)^2} = \frac{A}{3x-1} + \frac{B}{(3x-1)^2} \Rightarrow \begin{cases} A=3 \\ B=-2 \end{cases}$$

$$= \int \frac{3}{3x-1}dx - \int \frac{2}{(3x-1)^2}dx =$$

$$= \ln|3x-1| - \frac{2}{3(3x-1)} + c$$

(13)

(החלק החסר מתרגיל 10)

$$\int \frac{4x-1}{x^2+1}dx = 2\int \frac{2x}{x^2+1} - \int \frac{1}{x^2+1}dx =$$

עושים "השלמה לנגזרת"

$$= 2\ln|x^2+1| - \arctan(x)$$

(14)

$$\int \frac{dx}{x^3+1} = \int \frac{dx}{(x+1)(x^2-x+1)} =$$

$$\frac{1}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{3} \\ B=-\frac{1}{3} \\ C=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$= \frac{1}{3}\int \frac{1}{x+1}dx + \frac{1}{3}\int \frac{-x+2}{(x^2-x+1)}dx =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{1}{3}\left[-\frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{(x^2-x+1)}dx + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x^2-x+1)}dx\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln|x^2-x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{1}{(x^2-x+1)}dx =$$

עושים "השלמה לריבוע"

נשתמש בזהות האלגברית: $x^2+px+q = \left(x+\frac{p}{2}\right)^2 + \left(q-\frac{p^2}{4}\right)$

$$\int \frac{dx}{x^2-x+1} = \int \frac{dx}{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^2+1}$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\int \frac{dx}{\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right]^2+1} =$$

$$= \frac{1}{3}\ln|x+1| - \frac{1}{6}\ln\left|x^2-x+1\right| + \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\arctan\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] + c$$

תרגול 3: האינטגרל הלא-מסוים (המשך)

(1)

$$\int \frac{Ax+B}{\left(x^2+px+q\right)^n}dx = \int \frac{Ax+B}{\left[\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+\left(q-\frac{p^2}{4}\right)\right]^n}dx \underset{\substack{\left(x+\frac{p}{2}\right)=t \\ dx=dt}}{=} \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{\left[t^2+a^2\right]^n}dt =$$

$$n>1;\ p^2-4q<0$$

כיוון ש: $p^2-4q<0$ אזי $\left(q-\frac{p^2}{4}\right)>0$ אזי נסמן: $\left(q-\frac{p^2}{4}\right)=a^2$.

$$= \int \frac{A\left(t-\frac{p}{2}\right)+B}{\left[t^2+a^2\right]^n}dt = \frac{A}{2}\int \frac{2t}{\left(t^2+a^2\right)^n}dt + \left(B-\frac{P}{2}A\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} =$$

$$= \frac{A}{2}\cdot\frac{1}{-n+1}\left(t^2+a^2\right)^{-n+1} + \left(B-\frac{P}{2}A\right)\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n}$$

נותר לפתור רק את זה ולהציב בחזרה במקום t ו- a^2

$$\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} =$$

$$\boxed{I_n}$$

$$= \int 1\cdot\frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} = \frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n} + 2n\int \frac{\left(t^2+a^2\right)-a^2}{\left(t^2+a^2\right)^{n+1}}dt =$$

$$u=\left(t^2+a^2\right)^{-n} \qquad v'=1$$

$$u'=-n\left(t^2+a^2\right)^{-n-1}\cdot 2t \qquad v=x$$

$$= \frac{t}{\left(t^2+a^2\right)^n} + 2n\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^n} - 2n\cdot a^2\int \frac{dt}{\left(t^2+a^2\right)^{n+1}}$$

$$\boxed{I_n} \qquad \boxed{I_{n+1}}$$

$$I_{n+1} = \frac{t}{2a^2\cdot n\cdot\left(t^2+a^2\right)^n} + \frac{2n-1}{2a^2\cdot n}\cdot I_n$$

זו נוסחת נסיגה

$$I_1 = \int \frac{dt}{a^2+t^2} = \frac{1}{a}\cdot\arctan\left(\frac{t}{a}\right)+c$$

(2) הצבה טריגונומטרית

$$\int \frac{dx}{\cos x} \underset{\substack{t=\tan\frac{x}{2} \\ x=2\arctan t \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}}}{=}$$

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}\cdot\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 = 2\tan\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 = 2t\left(\cos\frac{x}{2}\right)^2 =$$

$$= 2t\frac{1}{1+t^2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = 2\frac{1}{1+t^2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\int \frac{dx}{\cos x} \underset{\substack{t=\tan\frac{x}{2} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}}}{=} \int \frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{\frac{1-t^2}{1+t^2}} = \int \frac{2dt}{1-t^2} = \int \frac{dt}{1-t} + \int \frac{dt}{1+t} = -\ln|1-t| + \ln|1+t| + c =$$

$$= \ln\left(\frac{1+\tan\frac{x}{2}}{1-\tan\frac{x}{2}}\right) + c$$

(3)

תרגיל לבית:

$\int \frac{dx}{\cos x}$ ע"י הצבה אחרת (רמז: נסו $t=\sin x$).

(4) הצבת אוילר

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\underset{\substack{t=x+\sqrt{1+x^2}\\ dt=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}dx=\frac{t}{\sqrt{1+x^2}}dx\\ \Rightarrow\frac{dt}{t}=\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}}}{=}\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+c=\ln\left|x+\sqrt{1+x^2}\right|+c$$

הפונקציות ההיפרבוליות

$$\sinh(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$$
$$\cosh(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^2}}\underset{\substack{x=\sinh(t)\\ dx=\cosh(t)dt\\ \left[1+\sinh^2(p)=\cosh^2(p)\right]}}{=}\int\frac{\cosh t\cdot dt}{\cosh t}=\int dt=t+c=\arcsin h(x)+c$$

(5)

תרגיל לבית: יש להראות כי $\ln(x+\sqrt{1+x^2})=\arcsin h(x)$

(6)

$$\int\frac{1+\sin x}{1+\cos x}e^x dx=\int\frac{e^x}{1+\cos x}dx+\int\frac{\sin x\cdot e^x}{1+\cos x}dx=$$

$$=\int\frac{e^x}{2\cos^2\frac{x}{2}}dx+\int e^x\cdot\tan\frac{x}{2}dx\underset{\substack{t=\frac{x}{2}\\ x=2t\\ dx=2dt}}{=}\int\frac{e^{2t}\cdot\cancel{2}dt}{\cancel{2}\cos^2 t}+2\int e^{2t}\cdot\tan t\cdot dt=$$

$$=e^{2t}\cdot\tan t-\cancel{\int 2e^{2t}\cdot\tan t\cdot dt}+\cancel{2\int e^{2t}\cdot\tan t\cdot dt}=e^{2t}\cdot\tan t+c$$

$$u=e^{2t};v'=\frac{1}{\cos^2 t}$$
$$u'=2e^{2t};v=\tan t$$

(7)

תרגיל לבית: לחשב $\int e^{-|x|}dx$

תרגול 4: האינטגרל המסוים

(1) קבוצת קנטור

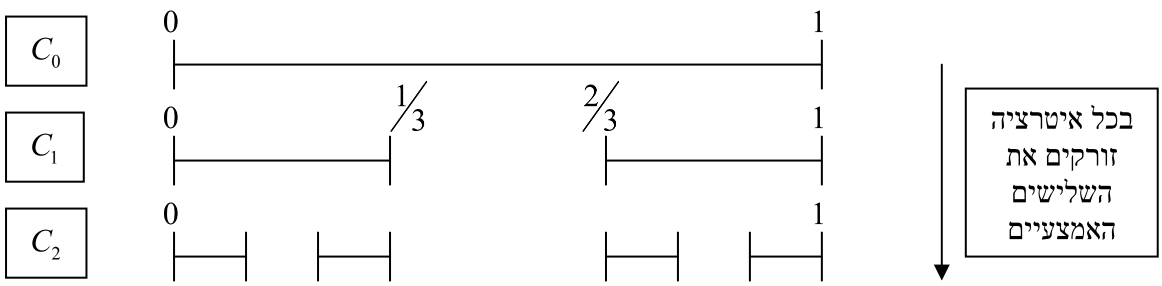
C קבוצת קנטור

$$\chi_C(x)=\begin{cases}1 & x\in C\\ 0 & x\notin C\end{cases}$$

זו הפונקציה המציינת של הקבוצה.
(למשל: הפונקציה המציינת של הרציונליים היא בדיוק פונקצית דיריכלה).

צ"ל כי $\chi_C(x)$ אינטגרבילית רימן.

<u>פתרון:</u>



$$C=\bigcap_{i=1}^{\infty} C_i$$

כמה עובדות על קבוצת קנטור:

- C מכילה את קצוות כל הקטעים שנזרקו.
- C מכילה גם נקודות אחרות. למשל: $\frac{1}{4}\in C$, כי $\frac{1}{4}$ תמיד מחלקת קטע ב- C_i ביחס 3:1 ולכן לא נזרקת באיטרציה הבאה (פורמלית יש לעשות אינדוקציה).
- המשלים של C הוא איחוד של קטעים פתוחים, ולכן C סגורה. (ולכן קומפקטית = סגורה וחסומה).
- <u>עוצמת</u> C היא רצף.
- <u>מידתה</u> של C היא 0. במילים אחרות: לכל $\varepsilon>0$ ניתן לכסות את C ע"י איחוד זר סופי של קטעים שסכום אורכיהם קטן מ- ε. (ככל ש- ε גדול יותר נצטרך ללכת לאיטרציה מתקדמת יותר).
- C <u>דלילה</u>. הפנים של הסגור שלה הוא ריק.
- C <u>פרפקטית</u>. כל נקודה היא נקודת גבול.
- $x\in C$ $\Leftrightarrow$ יש ל- x הצגה בבסיס 3 המכילה רק 0-ים ו- 2-ים.

לפי ההגדרה f אינטגרבילית רימן אמ"מ אינטגרל דרבו עליון = אינטגרל דרבו תחתון.

נראה שעבור χ_C זה אכן קורה ואפילו שווה 0.

<u>שלב א:</u>
סכום דרבו תחתון = 0 לכל חלוקה D.
$\underline{S}(D,\chi_C)=0 \quad \forall D$, כי לכל חלוקה D ולכל קטע $\triangle x_i \in D$, המינימום $m_i(\chi_C)$ בקטע הוא 0. כי באיטרציה מספיקה הקטע נחתך ולכן מכיל נקודות שלא שייכות ל- C. (במילים אחרות: C לא מכילה אף קטע).

$$\Rightarrow \sup_D \underline{S}(D,\chi_C)=0$$

$\Rightarrow$ אינטגרל דרבו תחתון הוא 0

<u>שלב ב:</u>

לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה D_ε, כך שסכום דרבו העליון שלה קטן מ- ε. נשים לב כי $\left|C_j\right|=\left(\frac{2}{3}\right)^j$.

נגדיר D_ε להיות החלוקה ה- j-ית (שמתאימה ל- C_j), כך ש- $\left(\frac{2}{3}\right)^j<\varepsilon$.

$$\overline{S}=(D_\varepsilon,\chi_C)=\sum_{i=1}^{k}M_i(x_i)\cdot\triangle x_i \le \sum_{\substack{\text{קטעים}\\ \text{שטרם}\\ \text{נזרקו}\\ \text{בשלב}\\ C_j}} 1\cdot\triangle x=\left|C_j\right|=\left(\frac{2}{3}\right)^j<\varepsilon$$

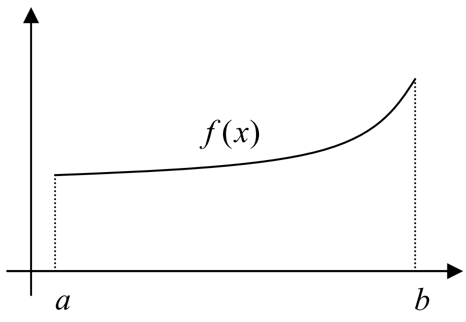
לכן:

$$\overline{I}(\chi_C)=\inf_D \overline{S}(\chi_C,D)=0$$

$\Leftarrow$ אינטגרל דרבו עליון הוא 0.

$\Leftarrow$ χ_C אינטגרבילית רימן והאינטגרל על $[0,1]$ הוא 0.

תרגול 5: האינטגרל המסוים (המשך)



$\int_b^a f(x)dx$ הוא למעשה השטח
מתחת לגרף הפונקציה $f(x)$
בין הנקודות $x=a$ ו- $x=b$.

משפט ניוטון

תהי $F(x)$ גזירה, ונגזרתה $f(x)$ אינטגרבילית. אזי $\int_b^a f(x)dx = F(b)-F(a) = F(x)\Big|_b^a$

(1)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (2+\cos x - x^2)dx = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2 dx =$$

$$= 2x\Big|_0^{\pi/2} + \sin x\Big|_0^{\pi/2} - \frac{x^3}{3}\Big|_0^{\pi/2} = \pi + 1 - \frac{\pi}{24}$$

(2)

$$I=\int_0^2\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right)\cdot dx \underset{\begin{pmatrix} v`=1 & u=\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right) \\ v=x & u'=\frac{2x-2}{2\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right)}\end{pmatrix}}{=} x\left(\sqrt{x^2-2x+2}\right)\Big|_0^2-\int_0^2\frac{x(x-1)}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx=$$

$$=2\sqrt{2}-\int_0^2\frac{x^2-x}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx=2\sqrt{2}-\underbrace{\int_0^2\frac{x^2-2x+2}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx}_{I}-\int_0^2\frac{x-2}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx=$$

$$\Rightarrow I=\sqrt{2}-\frac{1}{2}\int_0^2\frac{x-2}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx$$

$$\int_0^2\frac{x-2}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{2x-2}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx-\int_0^2\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx=$$

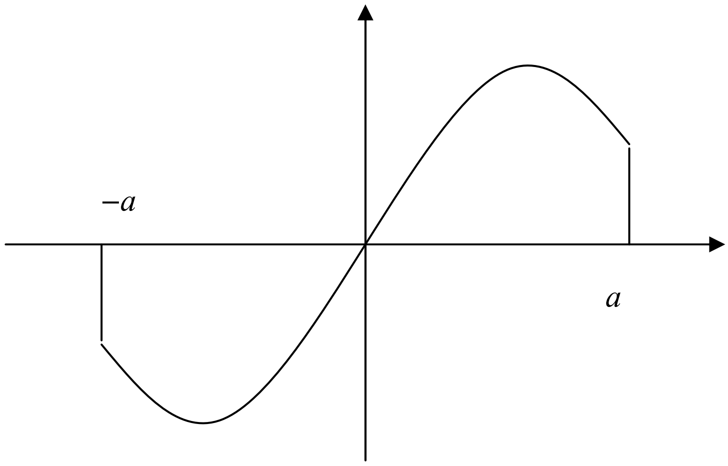
$$=\sqrt{x^2-2x+2}\Big|_0^2-\int_0^2\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx=0-\int_0^2\frac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}dx=$$

$$=-\int_0^2\frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2+1}}\underset{\begin{pmatrix} t=x-1 \\ dt=dx\end{pmatrix}}{=}-\int_{-1}^1\frac{dt}{\sqrt{t^2+1}}=-\ln(t+\sqrt{t^2+1})\Big|_{-1}^1=-\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}\right)$$

$$\Rightarrow I=\sqrt{2}+\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{-1+\sqrt{2}}\right)$$

(3)

הוכיחו כי אינטגרל של פונקציה אינטגרבילית איזוגית בתחום סימטרי הוא 0.



פתרון

תהי $f(x)$ כנ"ל על התחום $[-a,a]$. כלומר: $f(-x)=-f(x)$ (כי זו פונקציה איזוגית).

אזי

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx \underset{\begin{pmatrix} x=-t \\ dx=-dt \\ \text{in the left integral} \end{pmatrix}}{=} -\int_{a}^{0} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(-t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx =$$

$$\underset{f\_is\_odd}{=} -\int_{0}^{a} f(t)dt + \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

(4)

(הסבר הפתרון מופיע בתרגול 6 בוידאו)

הוכיחו /הפריכו את הטענה הבאה:

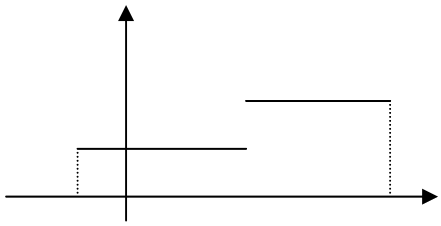
f אינטגרבילית $\Leftrightarrow$ יש ל- f פונקציה קדומה.

__פתרון__

הטענה איננה נכונה.

$\not\Leftarrow$

לפונקציה כזו לא תיתכן פונקציה קדומה:



$\not\Rightarrow$

פונקציה אינטגרבילית היא מראש חסומה, על קטע חסום, ומתקיימת התכונה שבה הסופרמום על סכומי דרבו תחתונים שווה לאינפימום על סכומי דרבו עליונים. להגיד שיש ל- f פונקציה קדומה זה אומר ש- f היא נגזרת של משהו. האם פונקציה שהיא נגזרת של משהו היא בהכרח חסומה? לא. יש פונקציות שנגזרתן אינן חסומות. דוגמא: x^2.

*** הערת העשרה (לא בחומר): f אינטגרבילית רימן אם ורק אם קבוצת נקודות האי רציפות של f היא ממידה 0 (מידה 0 = לכל ε ניתן לכסות את קבוצת נקודות האי רציפות על ידי קטעים שסכום אורכיהם קטן מ- ε).

תרגול 6: האינטגרל המסוים (המשך)

משפט

תהי $f(x)$ רציפה בקטע $[a,b]$. נגדיר: $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt; a\le x\le b$ אזי F רציפה וגזירה ו- $F'(x)=f(x)$.

(1)

גיזרו $F(x)=\int\limits_0^{x+x^2}\sin tdt$

פתרון

$\sin t$ רציפה (בכל קטע) לכן לפי המשפט היסודי $G(x)=\int\limits_0^x \sin tdt$, G גזירה ו- $G'(x)=\sin x$.

$$F(x)=G(x+x^2)$$
$$\Rightarrow F'(x)=G'(x+x^2)[1+2x]=\sin(x+x^2)[1+2x]$$

(2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^3}\int\limits_0^x \sin^2(3t)dt=\lim_{x\to 0}\frac{\int\limits_0^x \sin^2(3t)dt}{x^3}=LOP\left(\frac{0}{0}\right)$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2(3x)}{3x^2}=\lim_{x\to 0}3\underbrace{\frac{\sin^2(3x)}{3\cdot 3x^2}}_{1}=3$$

(3)

חשב: $\int e^{-|x|}dx$

חייבים במקרה כזה להפריד ל-Xים חיוביים ושליליים.

$$: x \geq 0$$
$$\int e^{-x}dx = -e^{-x} + c_1$$
$$: x < 0$$
$$\int e^{-x}dx = e^{-x} + c_2$$

$-e^{-0} + c_1 = e^{0} + c_2$ זה יבטיח שאכן הפונקציות "יידבקו" ב-0.

$c_2 = c_1 - 2$. כלומר המועמדת לפתרון היא: $f(x) = \begin{cases} x \geq 0 & -e^{-x} + c \\ x < 0 & e^{x} + c - 2 \end{cases}$

כעת נותר לוודא גזירות ב-0.

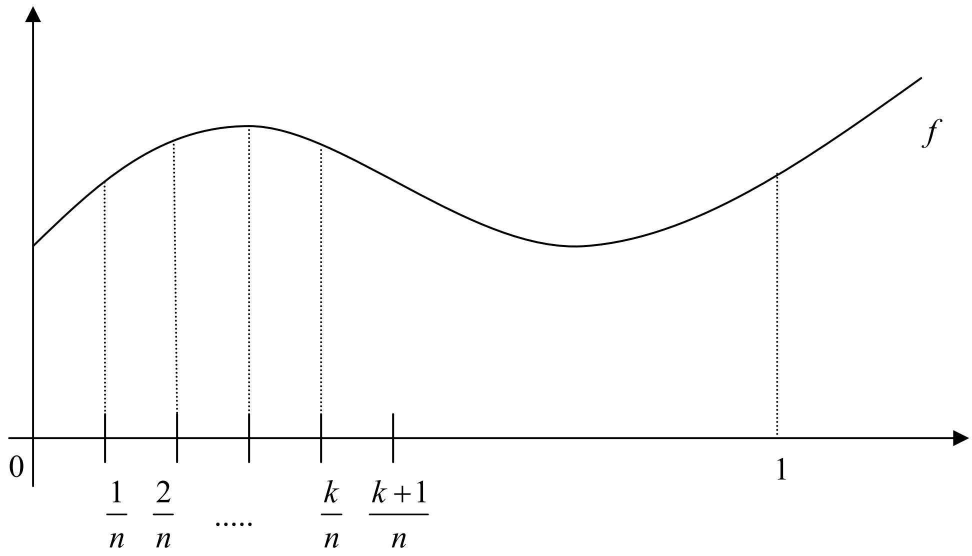
אפשר לחשב נגזרת מימין ומשמאל ולהראות. לחלופין, $e^{-|x|}$ היא רציפה. כמסקנה מהמשפט היסודי יש לה פונקציה קדומה. לפיכך הפונקציה המועמדת שמצאנו בהכרח אכן גזירה ב-0.

(4)

חשבו את הגבול: $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}\right)$

פתרון

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{n}{n(n+k)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=$$



סכום רימן שמתאים לחלוקה : $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_0^1 f(x)dx$

$$\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln|1+x|\Big\|_0^1=\ln 2$$

(5) נוסחאות WALLIS

הוכיחו את הנוסחאות הבאות

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}(x)dx=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}(x)dx=\frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}$$

פותרים על ידי אינטרגציה בחלקים ונוסחת נסיגה.

תרגול 7: האינטגרל המסוים (המשך)

(1)

תהי $f(x)$ פונקציה בעלת נגזרת רציפה בקטע $[0,2\pi]$. הוכיחו כי $\lim_{n\to\infty}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx = 0$.

פתרון

מהגדרת הגבול צריך להראות שלכל ε קיים N כך שאם $n>N$ אזי $\left|\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx\right| < \varepsilon$.

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx \underset{\substack{u=f(x) \\ u'=f'(x)}}{=}_{\substack{v'=\cos(nx) \\ v=\frac{\sin(nx)}{n}}} \underbrace{\cancel{\frac{\sin(nx)}{n}f(x)\Big|_0^{2\pi}}}_{0} - \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin(nx)dx$$

$$\left|\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)dx\right| = \frac{1}{n}\left|\int_0^{2\pi} f'(x)\sin(nx)dx\right| \le \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} |f'(x)||\sin(nx)|dx$$

$f'(x)$ רציפה על קטע סגור ולכן חסומה ע"י M כלשהו.

$\sin(nx)$ חסום.

$$\frac{1}{n}\int_0^{2\pi} |f'(x)||\sin(nx)|dx \le \frac{1}{n}\int_0^{2\pi} M\cdot dx = \frac{1}{n}\left[Mx\Big|_0^{2\pi}\right] = \frac{M2\pi}{n} < \varepsilon$$

עבור n מספיק גדול.

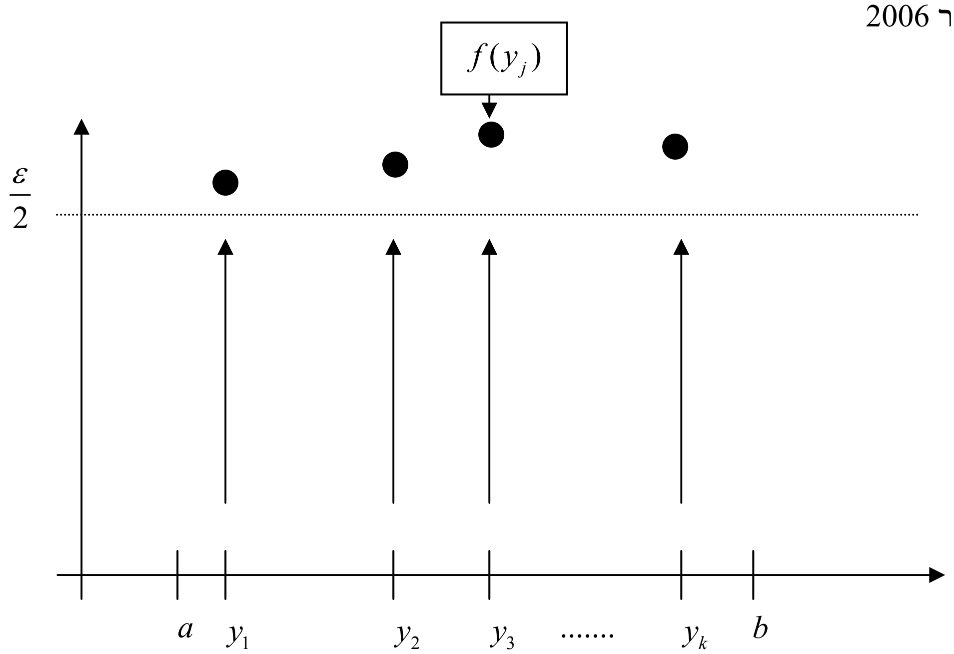
(2)

תהי $f\ge 0$ על $[a,b]$. המקיימת שלכל $\varepsilon>0$, הקבוצה $\{x|\, f(x)>\varepsilon\}$ סופית. אזי f אינטגרבילית וכמו כן $\int_a^b f(x)dx = 0$.

<u>הערה</u>: לא בהכרח $\{x|\, f(x)>0\}$ סופית.

<u>דוגמא</u>:
$$f(x)=\begin{cases} x\in\mathbb{Q} & \frac{p}{q};(p,q)=1 \\ x\notin\mathbb{Q} & 0\end{cases}$$

f אינטגרבילית $\Leftrightarrow$ יש I כך שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ המקיים אם $\lambda(p)<0$ (λ הוא פרמטר החלוקה, או המלבן הכי "שמן"). ו- $\{t_i\}$ בחירה כלשהי של נקודות $\left(x_{i-1}\le t_i\le x_i\right)$ אזי $\left|\sum f(t_i)\vartriangle x_i - I\right| < \varepsilon$.



עבור ε נתון יש מספר סופי של נקודות שהן יותר "גבוהות" מ- ε.

בה"כ $b-a\le 1$ (אחרת נחלק את הקטע). יהי $\varepsilon>0$. יהיו $y_1, y_2 ... y_k$ הנקודות שבהן $f(y_i)\ge\frac{\varepsilon}{2}$.

יהי $I=0$.

נסמן $M=f(y_j)=\max(f)$.

$$\sum_{i=1}^{n} f(t_i)\triangle x_i \le \ y_i \text{ שטח מלבנים המכילים} + y_i \text{ שטח מלבנים שלא מכילים} \le \underbrace{k\cdot M\cdot\delta}_{<\frac{\varepsilon}{2}}+\frac{\varepsilon}{2}\le\varepsilon$$

זה יקרה עבור $\delta<\frac{\varepsilon}{2kM}$.

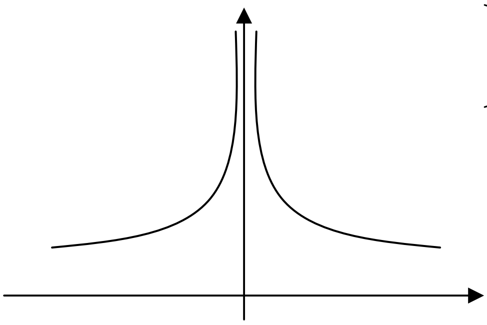
(3)

תרגיל לבית

תהי f פונקציה אינטגרבילית על קטע $[a,b]$. צ"ל: אם $f(x)>0$ לכל x. אזי $\int_a^b f(x)dx>0$.

תרגול 8: האינטרגל המוכלל

(1)



$$\cancel{\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{1}=-1-1=-2}$$

לא ניתן לעשות בצורה זו כי הפונקציה לא אינטגרבילית.
יש לשים לב שהפונקציה חיובית ולא הגיוני שהאינטגרל יצא שלילי.
מה כן עושים?

כיצד מוגדר האינטגרל המוכלל?

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}=\int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}+\int_{0}^{1}\frac{dx}{x^2}=\lim_{\varepsilon\to0^-}\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{dx}{x^2}+\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^2}=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0^-}\left(-\frac{1}{x}\Big|_{-1}^{-\varepsilon}\right)+\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^2}=\underbrace{\lim_{\varepsilon\to0^-}\left(\frac{1}{\varepsilon}-1\right)}_{\infty}+\lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x^2}$$

$\Leftarrow \int_{-1}^{0}\frac{dx}{x^2}$ לא קיים $\Leftarrow \int_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2}$ לא קיים.

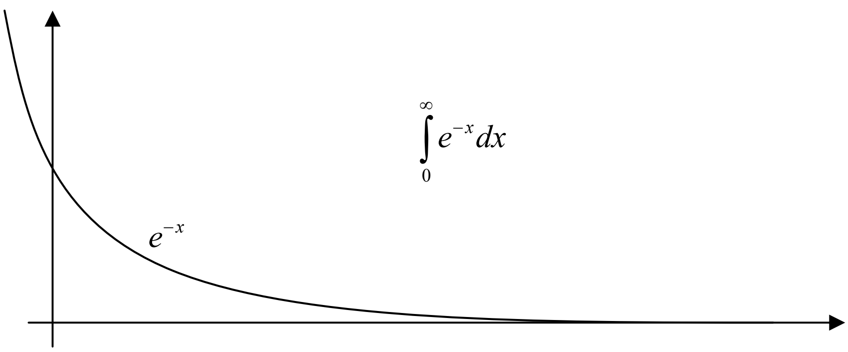
(2)

תרגיל לבית
צריך להוכיח כי

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x}=\text{לא קיים}$$

(3)

$$\int_{0}^{\infty}e^{-x}dx$$



$$\int_{0}^{\infty}e^{-x}dx=\lim_{M\to\infty}\int_{0}^{M}e^{-x}dx=\lim_{M\to\infty}\left(-e^{-x}\Big|_{0}^{M}\right)=\lim_{M\to\infty}\left(-e^{-M}+1\right)=1$$

(4)

האם האינטגרל הבא מתכנס או מתבדר?

$$I=\int_0^1 \frac{dx}{x^2+5x}$$

פתרון

לכל $0\le x\le 1$ מתקיים $x^2\le x$ לכן $\Leftarrow$ $\frac{1}{x^2+5x}\ge\frac{1}{6x}$.

משפט:

1) לכל $n\ge 1$, האינטגרל $\int_0^1\frac{dx}{x^n}$ מתבדר.

2) $\int_1^\infty\frac{dx}{x^n}$ מתכנס $\Leftrightarrow n>1$.

$\Leftarrow$ $\int_0^1\frac{dx}{6x}$ מתבדר, לפי המשפט הנ"ל.

$\Leftarrow$ I מתבדר לפי מבחן ההשוואה לפונקציות חיובית.

(5)

האם האינטגרל הבא מתכנס או מתבדר?

$$I=\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$$

נגדיר

$$f(x)=\frac{|\cos x|}{x^2}$$

$$g(x)=\frac{1}{x^2}$$

משפט: התכנסות בהחלט (עם ערך מוחלט) גוררת התכנסות.

ברור ש- $f(x)\le g(x)$.

$\int_1^\infty g(x)$ מתכנס $\Leftarrow$ $\int_1^\infty f(x)$ מתכנס $\Leftarrow$ $\int_1^\infty\frac{\cos x}{x^2}$ מתכנס.

(6)

$f:(0,1)\to\mathbb{R}$ מוגדרת ע"י $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2-x^3}}$. בידקו התכנסות:

א) $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x)dx$

ב) $\int_{\frac{1}{2}}^{1} f(x)dx$

פתרון

נרשום את הפונקציה מעט אחרת $f(x)=\frac{1}{x\sqrt{1-x}}$.

א)

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{x\sqrt{1-x}}dx$$

$$\frac{\frac{1}{x\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{x}}=\frac{1}{\sqrt{1-x}}\xrightarrow[x\to 0]{}1$$

לפי מבחן ההשוואה ל- $\frac{1}{x}$ (א) מתבדר.

ב)

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{x\sqrt{1-x}}dx$$

$$\frac{\frac{1}{x\sqrt{1-x}}}{\frac{1}{\sqrt{1-x}}}=x\xrightarrow[x\to 1]{}1$$

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx \underset{\left(\substack{u=1-x\\ du=-dx}\right)}{=} \int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{-du}{\sqrt{u}}=\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{du}{u^{\frac{1}{2}}}$$ מתכנס

$\Leftarrow$ לפי מבחן ההשוואה (ב) מתכנס.

הערה: יש לשים לב שאין לבצע אינטגרציה בחלקים או שיטת ההצבה באינטגרלים מוכללים. מה כן מותר? כלומר, מה עשינו למעשה בתרגיל?

לזה לעשות שיטת הצבה-> $$\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-x}}dx=\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}=\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

$$=\lim_{\varepsilon\to\infty}\int_{\frac{1}{2}}^{\varepsilon}\frac{-du}{\sqrt{u}}=\int_{\frac{1}{2}}^{0}\frac{-du}{\sqrt{u}}$$

(7)

נתון כי האינטגרל $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}$. יש לחשב את $\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^2 dx$.

הערה (לא קשור לתרגיל): $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}dx$ איננו מוכלל.

פתרון

$$\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx \underset{\begin{pmatrix} u=\sin^2(x) & v'=\frac{1}{x^2} \\ u'=2\sin x\cos x=\sin(2x) & v=-\frac{1}{x}\end{pmatrix}}{=} \underbrace{-\frac{1}{x}\sin^2(x)\Big|_0^\infty}_{***=0} + \int_0^\infty \frac{\sin(2x)}{x}dx$$

$$*** \lim_{M\to\infty}\frac{1}{M}\sin^2 M = 0$$

$$*** \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\sin^2\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\sin\varepsilon\cdot\sin\varepsilon}{\varepsilon} = 0$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin(2x)}{x}dx = \int_0^\infty \frac{2\sin(2x)}{2x}dx \underset{\begin{pmatrix} 2x=t \\ dx=\frac{1}{2}dt\end{pmatrix}}{=} \int_0^\infty \frac{2\sin(t)}{2t}dt = \int_0^\infty \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$$

תרגול 9: האינטגרל המוכלל (המשך)

(1) משפט (מבחן דיריכלה)

יהיו f,g פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,x]$ לכל $x\geq a$. נניח כי :

1) f רציפה
2) $\left|\int_a^x f(t)dt\right|\leq c$
3) $g(x)\xrightarrow{x\to\infty}0$
4) g גזירה ומקיימת כי האינטגרל $\int_a^\infty |g'(x)|$ קיים.

אזי האינטגרל $\int_a^\infty fg$ מתכנס.

הוכחה:

fg אינטגרבילית בכל קטע $[a,x]$.

$$\int_a^x f(t)g(t)dt \underset{\begin{pmatrix} u=g & v'=f \\ (4)u'=g' & (1)v=F=\int_a^x f(t)dt\end{pmatrix}}{=} g(t)F(t)\Big|_a^x-\int_a^x F(t)g'(t)dt=$$

$$=\underbrace{g(x)F(x)}_{A}-\underbrace{\cancel{g(a)F(a)}}_{0}-\underbrace{\int_a^x F(t)g'(t)dt}_{B}$$

רוצים להראות שקיים הגבול $\lim\limits_{x\to\infty}$ של אגף ימין (בכחול).

ולכן גם של אגף שמאל.

(א) $g(x)\underbrace{F(x)}_{bounded(2)}\xrightarrow[x\to\infty]{}0$

$g(x)\xrightarrow[x\to\infty]{}0$ לפי (3)

(ב) $\int_a^x |F(t)g'(t)|dt \underset{by(2)}{\leq} c\underbrace{\int_a^x |g'(t)|dt}_{\xrightarrow{x\to\infty}\int_a^\infty g'(t)dt<\infty}<\infty$

$\Leftarrow$ (ב) מתכנס בהחלט כאשר $x\to\infty$ ולכן מתכנס.

<u>הערה</u>: מספיק לדרוש ש- $g\to 0$ מונוטונית וגזירה.

(2)

נגדיר שני אינטגרלים:

$$I_1=\int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx$$

$$I_2=\int_0^\infty \frac{2\sin x\cos x}{x}dx$$

א) הוכיחו ששני האינטגרלים מתכנסים ושווים.
ב) הוכיחו כי אחד מתכנס בהחלט והשני בתנאי.

<u>פתרון</u>

הערה: האינטגרלים "מוכללים רק ב- ∞" (כי הקטע לא חסום). $2\underbrace{\frac{\sin x}{x}}_{\xrightarrow[x\to 0]{}1}\cos x\xrightarrow[x\to 0]{}2$

(א)

נשתמש בדיריכלה כדי להראות ש- I_2 מתכנס.

נגדיר $g(x)=\frac{1}{x}$ אזי $g\searrow 0$ כאשר $x\to\infty$ ונגדיר $f(x)=2\sin x\cos x$.

$$\left|\int_0^x 2\sin t\cos t\,dt\right|=\left|\int_0^x \sin 2t\,dt\right|=\left|\left(-\frac{1}{2}\cos 2t\right)\Big|_0^x\right|=\left|-\frac{1}{2}\cos 2x-\frac{1}{2}\right|\le 2$$

$\Leftarrow$ לפי דיריכלה: $\int_0^\infty fg=\int_0^\infty \frac{2\sin x\cos x}{x}dx$ מתכנס.

נראה ש: $I_1=I_2$:

$$I_1=\int_0^1 \frac{\sin^2 x}{x^2}dx+\int_1^\infty \frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{\sin^2 x}{x^2}dx+\lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{\sin^2 x}{x^2}dx=$$

$$\left[\int_a^b \frac{\sin^2 x}{x^2}dx \underset{\begin{pmatrix} u=\sin^2 x & v'=\frac{1}{x^2} \\ u'=2\sin x\cos x & v=-\frac{1}{x}\end{pmatrix}}{=} -\frac{1}{x}\sin^2 x+\int_a^b \frac{2\sin x\cos x}{x}\right]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_\varepsilon^1+\int_\varepsilon^1 \frac{2\sin x\cos x}{x}dx\right)+\lim_{M\to\infty}\left(-\frac{\sin^2 x}{x}\Big|_1^M+\int_1^M \frac{2\sin x\cos x}{x}dx\right)=$$

$$\begin{bmatrix} \lim_{x\to\infty}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\underbrace{\sin^2 x}_{bounded}=0 \\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\sin x=0 \end{bmatrix}$$

$$=\cancel{-\frac{\sin^2(1)}{1}}+\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\varepsilon^1 \frac{2\sin x\cos x}{x}dx+\cancel{\frac{\sin^2(1)}{1}}+\lim_{M\to\infty}\int_1^M \frac{2\sin x\cos x}{x}dx=I_2$$

(ב) ברור ש I_1 מתכנס בהחלט (חיובי).

נראה ש: $\int_0^{\infty}\left|\frac{2\sin x\cos x}{x}\right|dx$ מתבדר.

וזהו אינטגרל שמתבדר $\leftarrow$ $\int_1^{\infty}\left|\frac{2\sin x\cos x}{x}\right|dx=\int_1^{\infty}\left|\frac{\sin 2x}{x}\right|dx \underset{\left(\substack{2x=t\\ dx=\frac{1}{2}dt}\right)}{=} \int_2^{\infty}\left|\frac{\sin t}{t}\right|dt$

(3)

תרגיל לבית

לאילו ערכי α מתכנס / מתבדר כל אחד מהאינטגרלים הבאים:

1) $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$

2) $\int_1^{\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}}dx$

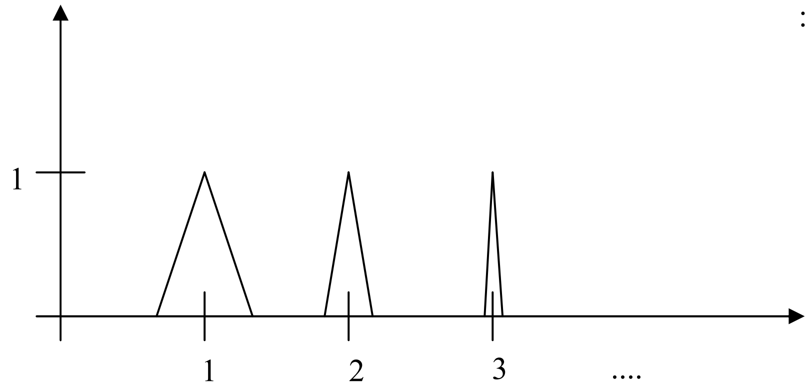
תרגול 10: האינטגרל המוכלל (סיום) וטורים חיוביים

(4)

נתון $f \geq 0$ רציפה. נתון $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס. הוכיחו/הפריכו כי $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$.

פתרון

הטענה איננה נכונה. דוגמא נגדית:
נגדיר f:



רוחב הבסיס הוא $\frac{1}{2^n - 1}$.

$$\int_0^\infty f(x)dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{base_\vartriangle \bullet height_\vartriangle}{2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{\frac{1}{2^{n-1}} - 1}{2} = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n}$$
זהו טור שסכומו 1.

תרגילים לבית:
א) הוכיחו/הפריכו את הטענה בשאלה 4 כאשר התנאי $f \geq 0$ מתחלף עם התנאי: $f > 0$.
ב) הוכיחו/הפריכו את הטענה בשאלה 4 כאשר נוסף התנאי ש- f מונוטונית.
ג) הוכיחו/הפריכו את הטענה בשאלה 4 כאשר נוסף התנאי ש- f רציפה במ"ש (ולא רק רציפה). – קשה!

הערה: פתרון חלקי יינתן בתרגול 14 זמן 36:30

טורים חיוביים

(1)

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+...+\frac{1}{n(n+1)}+...$$

נשים לב כי $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

סדרת הסכומים החלקיים s_n היא : $s_n=\sum_{n=1}^{1}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$

(2)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

נסתכל על האיבר הכללי: $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{e}$ אזי הטור מתבדר, הכי האיבר הכללי שלו לא שואף ל-0.

(3)

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^5}+...+\frac{1}{n^n}+...$$

לכל $n>1$ מתקיים $\frac{1}{n^n}\leq\frac{1}{2^n}$.

$\sum\frac{1}{2^n}$ מתכנס (ראינו!) לכן לפי מבחן ההשוואה לטורים ***<u>חיוביים</u>*** גם $\sum\frac{1}{n^n}$ מתכנס.

(4)

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{2}{5\cdot 7}+\frac{3}{9\cdot 11}+...+\frac{n}{(4n-3)(4n-1)}+...$$

$$\frac{\frac{n}{(4n-3)(4n-1)}}{\frac{1}{n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}\frac{1}{16}$$

$\Leftarrow$ לפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים, הטור המקורי מתבדר כי $\sum\frac{1}{n}$ מתבדר.

(5)

מצאו דוגמא לפונקציה חיובית ורציפה כך ש: $\int_0^\infty f(x)dx$ מתכנס, אבל $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ מתבדר.

פתרון: פונקצית ה-"אוהלים" (תרגול 10 תרגיל 4).

(6)

$$\frac{1}{3}+\frac{2!}{3^2}+\frac{3!}{3^3}+\ldots+\frac{n!}{3^n}+\ldots$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}\cdot\frac{3^n}{n!}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty>1$$

ולכן מתבדר לפי מבחן המנה לטורים חיוביים.

(7)

$$1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\ldots+\frac{n}{2^{n-1}}+\ldots$$

$$\sqrt[n]{\frac{n}{2^{n-1}}}=\frac{\sqrt[n]{n}}{2^{1-\frac{1}{n}}}=\frac{1}{2}<1$$

ולכן מתכנס לפי מבחן השורש לטורים חיוביים.

(8)

נגדיר a_1; $a_n=\frac{1}{n}e^{-a_{n-1}}$. האם $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתכנס?

פתרון

אם $\lim_{n\to\infty} a_n\neq 0$ אזי $\sum_{n=1}^\infty a_n$ מתבדר.

אחרת, $a_n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. נשווה עם $\sum\frac{1}{n}$ (הערה $a_n>0$ לכל $n>1$).

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n}}=\frac{1}{e^{a_{n-1}}}\xrightarrow{n\to\infty}1$$

$\Leftarrow$ מתבדר.

תרגול 11: טורים חיוביים (המשך)

(1)

$$\sum \frac{1}{n\ln n}$$

$\frac{1}{n\ln n}$ מונוטונית יורדת.

מבחן הדלילות

$$\boxed{\sum a_n , \sum 2^n a_{2^n} \text{ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.}}$$

לכן,

$$\sum \cancel{2^n} \frac{1}{\cancel{2^n} \ln 2^n} = \sum \frac{1}{n\ln 2}$$

הטור מתבדר ולכן הטור המקורי מתבדר.

(2)

$$\sum \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}\cdot \frac{1}{2n+1}$$

מבחן המנה

$$\frac{a_{n+1}}{an} = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n+2)}\cdot \frac{1}{2n+3}\cdot \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot \ldots \cdot (2n)}{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}\cdot \frac{2n+1}{1} =$$

$$= \frac{(2n+1)(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)} \xrightarrow{n\to\infty} 1$$

מבחן המנה נכשל.

מבחן ראבה

$a_n > 0$. אם $\lim_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L$ קיים אזי:

1) $L>1 \Leftarrow$ $\sum a_n$ מתכנס.

2) $L<1 \Leftarrow$ $\sum a_n$ מתבדר.

3) $L=1 \Leftarrow$ המבחן נכשל.

נפעיל את ראבה:

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1-\frac{(2n+1)(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)}\right) = n\left(1-\frac{4n^2+4n+1}{4n^2+10n+6}\right) =$$

$$= n\left(\frac{6n+5}{4n^2+10n+6}\right) \xrightarrow{n\to\infty} \frac{3}{2}$$

לכן הטור המקורי מתכנס.

(א)
לבית

$$\sum\sqrt{\frac{\alpha(\alpha+1)...(\alpha+n-1)}{\beta(\beta+1)...(\beta+n-1)}}$$

לאילו ערכי $\alpha,\beta>0$ מתכנס/מתבדר הטור?

(ב)
לבית

$$\sum\left[\frac{1\cdot3\cdot5\cdot...\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot...\cdot(2n)}\right]^2$$

טורים כלליים

(3)

$$\sum_{n=2}^{\infty}\ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)$$

$$s_n=\sum_{n=2}^{N}\ln\left(\frac{n+(-1)^n}{n}\right)=\ln\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdots\underbrace{\frac{2k+1}{2k}}_{\substack{\text{last element}\\ \text{if N=2k (even)}}}\cdot\underbrace{\frac{2k}{2k+1}}_{\substack{\text{last element}\\ \text{if N=2k+1 (odd)}}}\right)=$$

$$=\begin{cases}\ln 1=0 & N=2k+1\\ \ln\left(\dfrac{2k+1}{2k}\right) & N=2k\end{cases}$$

סדרת הסכומים החלקיים s_n שואפת ל-0, לכן הטור מתכנס ל-0.

(4)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n\pi)}{n^{\frac{2}{3}}}$$

נשים לב כי $\cos(n\pi)=(-1)^n$

כלל לייבניץ

בהינתן טור עם סימנים מתחלפים (טור חיובי $\cdot\,(-1)^n$) . אם הטור החיובי שואף מונוטונית ל-0 אזי הטור הכללי מתכנס.

$\frac{1}{n^{\frac{2}{3}}}\searrow 0$, לכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{\frac{2}{3}}}$ מתכנס לפי כלל לייבניץ.

(5)

הוכיחו/הפריכו:

א) $\sum a_n$ מתכנס $\Leftarrow$ $\sum (a_n)^2$ מתכנס.

ב) $\sum a_n, a_n > 0$ מתכנס $\Leftarrow$ $\sum (a_n)^2$ מתכנס.

ג) $\sum a_n, a_n > 0$ מתכנס $\Leftarrow$ $\sum (a_n)^3$ מתכנס.

ד*) $\sum a_n$ מתכנס $\Leftarrow$ $\sum (a_n)^3$ מתכנס.

פתרון:

א) הטענה איננה נכונה. דוגמא נגדית: $a_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

$\sum a_n$ מתכנס לפי כלל לייבניץ. $\sum (a_n)^2 = \sum \frac{1}{n}$ מתבדר.

ב) הטענה נכונה. הוכחה: $\sum a_n$ מתכנס $\Leftarrow a_n \longrightarrow 0$. החל מ- n מסוים $1 > a_n > 0$. $\Leftarrow$ החל מ- n מסוים $a_n \geq a_n{}^2$. לפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים $\sum a_n$ מתכנס $\Leftarrow$ $\sum a_n{}^2$ מתכנס.

ג) הטענה נכונה. הוכחה: $\sum a_n$ מתכנס $\Leftarrow a_n \longrightarrow 0$. החל מ- n מסוים $1 > a_n > 0$. $\Leftarrow$ החל מ- n מסוים $a_n \geq a_n{}^3$. לפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים $\sum a_n$ מתכנס $\Leftarrow$ $\sum a_n{}^3$ מתכנס.

ד) לבית.

רמז: *<u>קיימת</u>* דוגמה נגדית, אך היא לא טריביאלית.

(6)

לבית

האם הטור הבא מתכנס או מתבדר? $\sum\limits_{\text{p is prime}} \frac{1}{p}$

תרגול 12: טורים (המשך)

(1)

הוכיחו כי 1=2

$$2\left[\cancel{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\ldots}\right]=2-1+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+\frac{2}{7}-\frac{1}{4}=$$

$$\underset{illegal}{=}\cancel{1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\ldots}\Rightarrow 2=1$$

(2)

נתון כי $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$. חשבו את $\int_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)^2}$.

<u>פתרון</u>

בטור מתכנס מותר להכניס סוגריים.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=$$

$$=\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)+\ldots=$$

$$\Rightarrow\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n)^2}\right]=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n\right)^2}=\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n\right)^2}=\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{3}{4}\cdot\frac{\pi^2}{6}=\frac{\pi^2}{8}$$

(3)

לאילו ערכי P מתכנס הטור $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}$?

פתרון:

ראשית, עבור $p=0$ הטור לא מוגדר.

אם $p<0$ אזי $\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}\xrightarrow{n\to\infty}1$ $\Leftarrow$ הטור מתבדר.

אם $p>0$:

$$\sum_{n=2}^{N}\frac{(-1)^n}{n^p+(-1)^n}-\sum_{n=2}^{N}\frac{(-1)^n}{n^p}=\sum_{n=2}^{N}\frac{(-1)^n n^p-\left((-1)^n\left[n^p+(-1)^n\right]\right)}{n^p\left(n^p+(-1)^n\right)}=$$

$$=-\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^{2p}+(-1)^n n^p}$$

הטור $\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^{2p}+(-1)^n n^p}$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $p>\frac{1}{2}$.

זהו טור חיובי. לפי השוואה ל- $\sum_{n=2}^{N}\frac{1}{n^{2p}}$:

$$\frac{\frac{1}{n^{2p}}}{\frac{1}{n^{2p}+(-1)^n n^p}}=\frac{n^{2p}+(-1)^n n^p}{n^{2p}}=\frac{n^p+(-1)^n}{n^p}\xrightarrow{n\to\infty}1$$

מסקנה: הטור מתכנס $\Leftrightarrow$ $p>\frac{1}{2}$.

הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$ מתכנס לכל $p>0$ לפי לייבניץ. עתה, $a_n-b_b=-c_n$. עבור $p>\frac{1}{2}$, b_n ו- c_n הן סדרות סכומים חלקיים של טורים מתכנסים ולכן b_n ו- c_n מתכנסות, ואז $a_n=b_b+c_n$ מתכנס.

עבור $\frac{1}{2}\geq p>0$, b_n מתכנס אבל c_n מתבדר, לכן a_n מתבדר.

סיכום: הטור מתכנס $\Leftrightarrow$ $p>\frac{1}{2}$.

(4)

יהי $\sum a_n$ טור חיובי מתבדר.

א) הראו שגם הטור $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתבדר.

ב) נסמן ב- s_n את סדרת הסכומים החלקיים של $\sum a_n$. הראו שהטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$ מתכנס.

ג) הראו ש $\sum \frac{a_n}{{s_n}^2}$ מתכנס.

<u>פתרון</u>

א)

אם $a_n \longrightarrow 0$ אזי $\frac{\frac{a_n}{1+a_n}}{a_n} = \frac{1}{1+a_n} \longrightarrow 1$

ולכן לפי ההשוואה (טורים חיוביים), הטור $\frac{a_n}{1+a_n}$ מתבדר.

אם $a_n \not\longrightarrow 0$ אזי גם $\frac{a_n}{1+a_n} \not\longrightarrow 0$. (נניח בשלילה ש $\frac{a_n}{1+a_n}$ כן שואף ל-0, נחלק מונה ומכנה ב- a_n ונקבל $\frac{1}{\frac{1}{a_n}+1} \longrightarrow 0$ אזי $\frac{1}{a_n}+1 \longrightarrow \infty \Leftarrow a_n \longrightarrow 0$ בסתירה להנחה).

ולכן שוב, $\sum \frac{a_n}{1+a_n}$ מתבדר.

ב)

נסמן את סדרת הסכומים החלקיים של הטור ב- T_n. אזי

$$T_n = \sum_{k=2}^{n} \left(\frac{1}{s_{k-1}} - \frac{1}{s_k} \right) = -\frac{1}{s_n} + \frac{1}{s_1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{s_1} = \frac{1}{a_1}$$

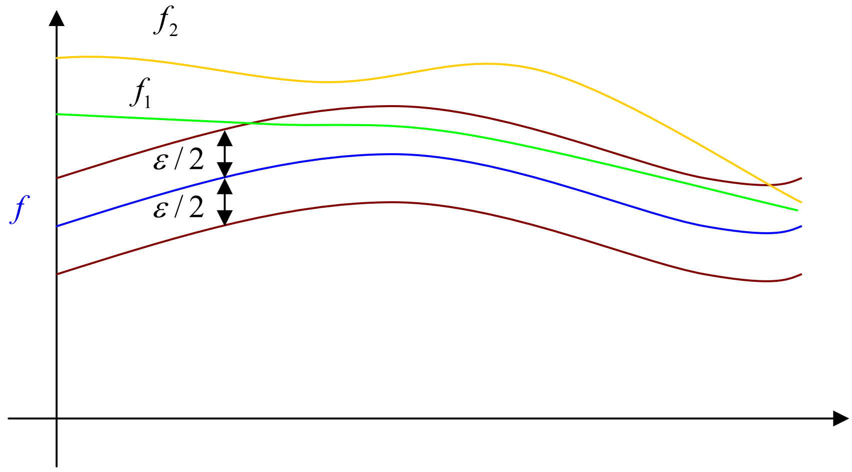
$\Leftarrow$ הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n}$ מתכנס.

ג)

$\frac{1}{s_{n-1}} - \frac{1}{s_n} = \frac{s_{n-1}-s_n}{s_{n-1}\cdot s_n} = \frac{a_n}{s_{n-1}\cdot s_n}$ לפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים $\frac{a_n}{{s_n}^2} = \frac{a_n}{s_n \cdot s_n} \geq \frac{a_n}{s_{n-1}\cdot s_n}$.

$\frac{a_n}{s_{n-1}\cdot s_n}$ מתכנס לפי סעיף ב' ולכן, $\sum \frac{a_n}{{s_n}^2}$ מתכנס.

תרגול 13: התכנסות במידה שווה וטורי פונקציות



סדרת פונקציות $\{f_n(x)\}$ מתכנסת ל- $f(x)$ בתחום I אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $N(\varepsilon)$ כך ש- $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ לכל $n>N$ ולכל $x\in I$.

(1)

תהי $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+nx}$. הוכיחו כי: $\{f_n\}$ מתכנסת במ"ש בקטע $[\alpha,\infty)$, $\alpha>0$.

פתרון

לכל $x\in[\alpha,\infty)$, $f_n(x)=\dfrac{nx}{1+nx}=\dfrac{x}{\frac{1}{n}+x}\xrightarrow{n\to\infty}1$,

$\Leftarrow f(x)=1\longrightarrow f_n(x)$ נקודתית.

בפרט, $f_n(\alpha)\longrightarrow 1$. לכן לכל $\varepsilon>0$ קיים $N(\varepsilon)$ כך שלכל $n>N$:

$$|f_n(\alpha)-1|=\left|\frac{n\alpha}{1+n\alpha}-1\right|<\varepsilon$$

בהינתן $\varepsilon>0$ יהי N הנ"ל,

אזי לכל $x\in I$, $|f_n(x)-1|=\left|\dfrac{nx}{1+nx}-1\right|=\left|\dfrac{-1}{1+nx}\right|=\dfrac{1}{1+nx}\le\dfrac{1}{1+n\alpha}$

הראינו לפי הגדרה שההתכנסות היא במ"ש.

(2)

תהי $f_n(x)=\dfrac{n^2x^2}{1+n^2x^2}$. יש לבדוק התכנסות במ"ש בקטע $[-1,1]$.

<u>פתרון</u>

$$\left(x_0\neq 0\right)\quad f_n(x_0)=\frac{n^2{x_0}^2}{1+n^2{x_0}^2}=\frac{{x_0}^2}{\frac{1}{n^2}+{x_0}^2}\xrightarrow{n\to\infty}1$$

$f_n(x)\longrightarrow\begin{cases}1 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$ נקודתית.

פונקצית הגבול $f(x)$ איננה רציפה אבל $f_n(x)$ רציפות, לכן ההתכנסות איננה במ"ש.

(אם $f_n\longrightarrow f$ במ"ש, f_n רציפות, אזי f רציפה).

(3)

תהי $f_n(x)=\dfrac{x}{n}\ln\dfrac{x}{n}$, $x\in(0,1]$. האם $\{f_n\}$ מתכנסת במ"ש?

<u>פתרון</u>

<u>שלב I:</u> מציאת f

$$f_n(x)=\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$\left[\lim_{t\to0^+}t\ln t=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln t}{\frac{1}{t}}=\lim_{t\to0^+}\frac{\ln t}{\frac{1}{t}}\underset{LOP}{=}\lim_{t\to0^+}\frac{\frac{1}{t}}{-\frac{1}{t^2}}\longrightarrow0\right]$$

$\Leftarrow f(x)=0$ $f_n(x)\longrightarrow f(x)=0$ נקודתית.

<u>שלב II:</u> חישוב ה- M_n

$$M_n=\sup_{x\in(0,1]}\left|\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}-0\right|=\sup_{x\in(0,1]}\left\{-\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n}\right\}$$

נסמן: $h_n=\begin{cases}0 & x=0\\ -\frac{x}{n}\ln\frac{x}{n} & x\neq0\end{cases}$ ונחפש מקסימום של h_n ב- $[0,1]$. נגזור ונשווה ל-0.

$$h_n'(x) = -\frac{1}{n}\cdot\ln\frac{x}{n} - \frac{x}{n}\cdot\frac{1}{\frac{x}{n}}\cdot\frac{1}{n} = -\frac{1}{n}\left(\ln\frac{x}{n}+1\right)$$

$h_n'(x)=0$ כאשר $\left(\ln\frac{x}{n}\right)=-1$ כלומר כאשר $x=\frac{n}{e}$.

לכל $n\geq 3$, $\frac{n}{e}$ לא בקטע $[0,1]$. אבל הפונקציה h_n עולה בתחום $[0,1]$ ל-$n\geq 3$ כי $h_n'(x)>0$.

$\Leftarrow$ $M_n=\max_{x\in(0,1]} h_n(x)=h_n(1)=-\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}$

<u>שלב III:</u>

$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\ln\frac{1}{n}\right)=0$$

$\Leftarrow$ f_n מתכנסת במ"ש.

תרגול 14: התכנסות במידה שווה וטורי פונקציות (המשך)

(1)

$$\int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{n\sin(nx)}{e^n}\right)dx$$

הטור $\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{n\sin(nx)}{e^n}\right)$ מתכנס במ"ש לפי מבחן M של ויירשטראס. $\left|\frac{n\sin(nx)}{e^n}\right| \le \frac{n}{e^n}$.

$\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{e^n}$ מתכנס (לפי מבחן השורש לטורים חיוביים: $\sqrt[n]{\frac{n}{e^n}} \longrightarrow \frac{1}{e} < 1$)

$\Leftarrow$ הטור $\left(\sum_{n=1}^\infty \frac{n\sin(nx)}{e^n}\right)$ מתכנס במ"ש לפי מבחן M של ויירשטראס, לכן מותר לבצע אינטגרציה איבר-איבר.

$$\int_0^\pi \left(\sum_{n=1}^\infty \frac{n\sin(nx)}{e^n}\right)dx = \sum_{n=1}^\infty \int_0^\pi \frac{n\sin(nx)}{e^n}dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{e^n}\int_0^\pi \sin(nx)dx = \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{e^n}\left[-\frac{1}{n}\cos(nx)\Big|_0^\pi\right] =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \frac{n}{e^n}\left[-\frac{1}{n}\left((-1)^n-1\right)\right] = \sum_{n=1}^\infty \frac{\cancel{n}}{e^n}\left[-\frac{1}{\cancel{n}}\left((-1)^n-1\right)\right] = \sum_{n=1}^\infty -\frac{1}{e^n}\left((-1)^n-1\right) =$$

$$= \sum_{n=1}^\infty \frac{1-(-1)^n}{e^n} \underset{\text{if right wing converge}}{=} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{e^n} - \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{e^n} = \frac{1}{e-1} + \frac{1}{e+1} = \frac{2e}{e^2-1}$$

(2)

נתונה סדרת פונקציות :

$$f_n(x)=\cos^n(x)$$

$$0\le x\le\frac{\pi}{2}$$

(א) חשבו את גבול הסדרה $f_n(x)$.

(ב) האם הסדרה מתכנסת במ"ש?

(ג) חשבו: $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\cdot dx$

פתרון

(א)

$$x=0\Rightarrow f_n(x)=1\xrightarrow{n\to\infty}1$$

$$0<x\le\frac{\pi}{2}\Rightarrow f_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$$

$$f_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}f(x)=\begin{cases}1 & x=0\\ 0 & x\ne 0\end{cases}$$

(ב)

לא. f איננה רציפה. f_n רציפות ולכן אין התכנסות במ"ש.

(ג)

נראה כי $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\cdot dx=0$

בהינתן $\varepsilon>0$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx=\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}}\cos^n xdx+\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$$

$\cos^n x$ מתכנסת במ"ש ל-0 על $\left[\frac{\varepsilon}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ כי זו סדרה מונוטונית של פונקציות רציפות השואפת לפונקציה רציפה על קטע סגור. לכן האיבר $\int_{\frac{\varepsilon}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx\xrightarrow[n\to\infty]{}0$ ולכן $<\frac{\varepsilon}{2}$ עבור N מספיק גדול.

בנוסף, $\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}}\cos^n xdx<\int_0^{\frac{\varepsilon}{2}}1\cdot dx=\frac{\varepsilon}{2}$.

מסקנה: $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n xdx$ עבור N מספיק גדול $\Leftarrow \lim_{n\to\infty}=0$.

(3)

לבית

תהי f רציפה במ"ש על $[a,\infty)$. נתון כי $\int_a^\infty f(x)dx$ מתכנס. הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

<u>הדרכה לפתרון</u>

1) הגדירו $F_n(x)=n\int_x^{x+\frac{1}{n}} f(t)dt$ והראו כי $F_n \longrightarrow f$ במ"ש בקטע $[a,\infty)$.

2) הראו: $\lim_{x\to\infty} F_n(x)=0$ לכל n.

3) הסיקו כי $\lim_{x\to\infty} f_n(x)=0$.

(4)

התבוננו בטור $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}\cos(n^2x^2)$.

(א) הראו שהטור מתכנס לכל $x>0$.
(ב) האם הטור מגדיר ב $(0,\infty)$ פונקציה רציפה?
(ג) האם f גזירה?

פתרון

(א)
יהי $x_0>0$ ויהי α כך ש: $x_0>\alpha>0$.

$$\left|e^{-nx}\cos(n^2x^2)\right| \le e^{-nx} \le e^{-n\alpha}$$

הטור $\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\alpha}$ מתכנס (טור הנדסי עם $q=e^{-\alpha}<1$).
מסקנה: הטור המקורי מתכנס לפי ווירשטראס, ב- $[\alpha,\infty)$.
בפרט הטור מתכנס ב- x_0.

(ב)
נסמן $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx}\cos(n^2x^2)$, לכל $x>0$.

לפי סעיף (א) זה מוגדר היטב.
לפי משפט, טור של פונקציות רציפות (ב- $[a,b]$) המתכנס במ"ש לפונקציה $f \Leftarrow f$ רציפה.
לכן f שלנו רציפה בכל קטע $[a,b], a>0$.
$\Leftarrow$ f רציפה ב- $(0,\infty)$.

(ג)
לבית

תרגול 15: טורי חזקות

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(x-\alpha\right)^n$$

(1)

נתון הטור: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$. מצא תחום התכנסות.

<u>*פתרון*</u>

$a_n = \frac{1}{n}$.

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1 \Rightarrow R = 1$$

$\Leftarrow$ הטור מתכנס ב- $(-1,1)$. נבדוק בקצוות.

x=1: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ מתבדר.

x=-1: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ מתכנס.

$\Leftarrow$ תחום ההתכנסות $[-1,1)$.

(2)

נתון הטור: $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}\underbrace{\left(x-2\right)^n}_{y}$. מצא תחום התכנסות.

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\ln(n+2)}{n+2}\cdot\frac{n+1}{\ln(n+1)} = \frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

$$\left[\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(n+2)}{\ln(n+1)} \underset{LOP}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x+2}}{\frac{1}{x+1}} = 1\right]$$

$\Leftarrow R = 1$

$\Leftarrow$ הטור מתכנס עבור $-1 < y < 1$

$\Leftarrow$ הטור מתכנס עבור $1 < x < 3$.

נבדוק בקצוות:

$$x=3: \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}$$

ל- n מספיק גדול $\log(n+1)>1$, ולכן $\frac{\ln(n+1)}{n+1}>\frac{1}{n+1}$ ולכן לפי מבחן ההשוואה לטורים חיוביים הטור מתבדר.

$$x=1: \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\ln(n+1)}{n+1}(-1)^n$$

מתכנס לפי לייבניץ.

$\frac{\ln(n+1)}{n+1}\xrightarrow{n\to\infty}0$ (למשל לפי לופיטל כמו הקודם).

מונוטוניות: $\left(\frac{\ln x}{x}\right)'=\frac{1-\ln x}{x^2}\underset{x>e}{<}0$.

$\Leftarrow$ תחום ההתכנסות הוא $[1,3)$.

(3)

פתחו לטור חזקות: $\frac{x}{7-x^2}$.

<u>פתרון</u>

פיתוח ידוע: $\frac{1}{1-t}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n, |t|<1$.

$$\frac{1}{1-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}t^{2n}, \left|t^2\right|<1$$

$$\frac{x}{7-x^2}=\frac{\frac{x}{7}}{1-\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2}=\frac{x}{7}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2}=\frac{x}{7}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{7^{n+1}}x^{2n+1}$$

$$|x|<\sqrt{7}$$

תרגיל בית: למצוא את רדיוס ההתכנסות.

(4)

חשבו $\sum \frac{n}{2^n}$

פתרון

נסתכל על

$$f(x)=\frac{1}{1-x} \underset{|x|<1}{=} \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$x\cdot f'(x)=\frac{x}{(1-x)^2}=x\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty} n\cdot x^n$$

נציב $x=\frac{1}{2}$ ונקבל $\sum \frac{n}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2}=2$

(5)

מצאו סכום $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

פתרון

$$\frac{1}{1-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} \qquad |x|<1$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} t^{2n}dt \underset{\substack{\text{integration element}\\ \text{by element}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x t^{2n}dt=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

$$\int_0^x \frac{dt}{1-t^2}=\frac{1}{2}\left(\int_0^x \frac{dt}{1-t}+\int_0^x \frac{dt}{1+t}\right)=\frac{1}{2}\left[\ln(1-x)+\ln(1+x)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-+....$$

$$\ln(1-x)=-x+\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}+-....$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=2\left[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+...\right]=2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1}x^{2n+1}$$

הערה: נסמן $t=\dfrac{1+x}{1-x}$ $\quad 0<t<\infty$

$$\Rightarrow x=\frac{t-1}{t+1}$$

לכן הטור $\ln(t)=2\sum\dfrac{1}{2n+1}\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)^{2n+1}$ מתכנס עבור $0<t<\infty$, ומאפשר לחשב, למשל, $\ln 5$.

תרגול 16: טורי חזקות (המשך)

במהלך התרגול נוכיח את הטענה הבאה:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

(1)

$\alpha\in\mathbb{R}$, $f(x)=(1+x)^{\alpha}$. יש לפתח לטור מקלורן.

טענה: $(1+x)^{\alpha}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\cdot x^n$ כאשר

$$\binom{\alpha}{0}=1$$

$$\alpha\in\mathbb{R},\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)...(a-n+1)}{n!}$$

הערה:

אלו בדיוק $\frac{1}{k!}f^{(k)}(0)$.

הוכחה:

ראשית נבדוק מתי הטור $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\cdot x^n$ מתכנס.

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\left|\frac{\binom{\alpha}{n}}{\binom{\alpha}{n+1}}\right|=\left|\frac{\alpha(\alpha-1)...(a-n+1)}{n!}\cdot\frac{(n+1)!}{\alpha(\alpha-1)...(a-n1)}\right|=\left|\frac{n+1}{\alpha-n}\right|\xrightarrow{n\to\infty}1$$

$\Leftarrow$ רדיוס ההתכנסות $R=1$.

נסמן $f_{\alpha}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\cdot x^n$ צריך להוכיח: $|x|<1$, $f_{\alpha}(x)=(1+x)^{\alpha}$.

$$f_{\alpha}'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\binom{\alpha}{n}\cdot x^{n-1}$$

$$n\binom{\alpha}{n}=n\frac{\alpha(\alpha-1)...(a-n+1)}{n!}=\frac{\alpha(\alpha-1)...(a-n+1)}{(n-1)!}=$$

$$=\alpha\binom{\alpha-1}{n-1}$$

$$\Rightarrow f_\alpha'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n-1}\cdot x^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha-1}{n-1}\cdot x^{n}$$

$$\Rightarrow f_\alpha'(x)=\alpha f_{\alpha-1}(x) \qquad (*)$$

$$(1+x)f_\alpha(x)=(1+x)\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\cdot x^n=$$

$$=1+\left[\binom{\alpha}{0}+\binom{\alpha}{1}\right]x+\left[\binom{\alpha}{1}+\binom{\alpha}{2}\right]x^2+...=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\binom{\alpha}{n-1}+\binom{\alpha}{n}\right]\cdot x^n=$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\alpha+1}{n}\cdot x^n=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+1}{n}\cdot x^n$$

$$\Rightarrow (1+x)f_\alpha(x)=f_{\alpha+1}(x) \qquad (**)$$

נתבונן בפונקציה $\frac{f_\alpha(x)}{(1+x)^\alpha}, |x|<1$

$$\left[\frac{f_\alpha(x)}{(1+x)^\alpha}\right]'=\frac{f_\alpha'(x)(1+x)^\alpha-\alpha(1+x)^{\alpha-1}f_\alpha(x)}{(1+x)^{2\alpha}}=$$

$$\left(f_\alpha'(x)(1+x)\underset{(*)}{=}\alpha f_{\alpha-1}(x)(1+x)\underset{(**)}{=}\alpha f_\alpha(x)\right)$$

$$=0$$

$$\Leftarrow \frac{f_\alpha(x)}{\left(1+x\right)^\alpha}=const$$

$$f_\alpha(0)=1$$

$$(1+0)^\alpha=1$$

$$\Leftarrow \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\cdot x^n=f_\alpha(x)=(1+x)^\alpha; \alpha\in\mathbb{R}, |x|<1$$

(2)

נתון $f(x)=\arcsin x$. פתחו לטור מקלורן.

פתרון

נציב בטור מתרגיל 1: $\alpha=-\frac{1}{2}, x=-t^2$.

$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n t^{2n}=\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$. נבצע אינטגרציה $\int_0^x$.

$$\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=\arcsin x \underset{\substack{\text{integration element}\\ \text{by element}}}{=} \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}=$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-\frac{1}{2}}{n}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=x+\frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{x^5}{5}+\ldots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{x^{2n+1}}{2n+1}+\ldots$$

$$|x|<1$$

(3)

הוכיחו כי $\frac{\pi^2}{8}=\sum\frac{1}{(2n-1)^2}$.

פתרון

נסתכל על הטור של $\arcsin x$. נבדוק בקצוות. $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+1}{(2n+2)(2n+3)}\xrightarrow{n\to\infty}1$

מבחן המנה נכשל. נבדוק ע"י מבחן ראבה:

$$n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=\ldots=\frac{n(6n+5)}{4n^2+10n+6}\xrightarrow{n\to\infty}\frac{3}{2}>1$$

$\Leftarrow$ מתכנס ב- $x=1$, ולכן גם ב- $x=(-1)$.

$\Leftarrow$ הטור של $\arcsin x$ מתכנס בתחום $[-1,1]$. לכן הוא מתכנס במ"ש שם ומותר לבצע אינטגרציה איבר-איבר.

נציב $x=\sin t$, $-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}$ ונקבל $t=\sin t+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{\sin^{2n+1}(t)}{(2n+1)}$ ונבצע אינטגרציה מ-0 עד $\frac{\pi}{2}$ לשני האגפים. נקבל:

$$\frac{\pi^2}{8}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin tdt+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}t\cdot dt=$$

נשתמש כעת בנוסחאות WALLIS מתרגול 6 שאלה 5.

$$\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n+1}(x)dx=\frac{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)}{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}\right)$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n+1\right)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(2n-1\right)^2}$$

(4)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\ldots=\left(1+\frac{1}{2^2}\right)+\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}\right)+\ldots=$$

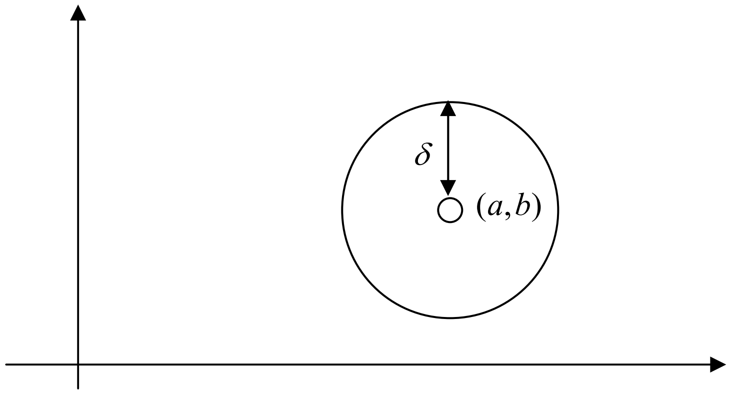
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(2n-1)^2}+\frac{1}{(2n)^2}\right]=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}$$

$$\Rightarrow\frac{3}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8}$$

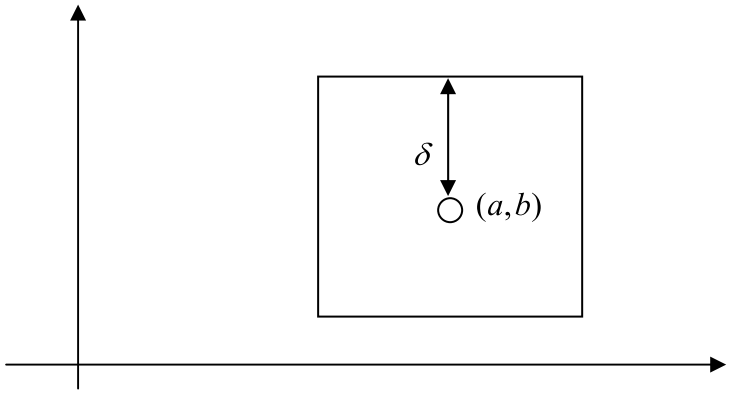
תרגול 17: פונקציות בשני משתנים

נאמר ש $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x)=L$: (שתי הגדרות שקולות)

א) אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש: $0<\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}<\delta \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$



ב) אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך ש:
$|x-a|<\delta$ ו- $|y-b|<\delta$ ו- $|x-a|+|y-b|>0 \Rightarrow |f(x,y)-L|<\varepsilon$



(1)

תהי הפונקציה $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq 0\\ 0 & (x,y)=0\end{cases}$. האם לפונקציה יש גבול ב- $(0,0)$?

פתרון

$f(x,y)$ מתאפסת על שני הצירים $\begin{matrix}x=0\Rightarrow f=0\\ y=0\Rightarrow f=0\end{matrix}$. אבל לאורך קרן $\left(0\neq \mathrm{m}\in\mathbb{R}\right)$ $y=mx$.

$$f(x,mx)=\frac{xmx}{x^2+\left(mx\right)^2}=\frac{m}{1+m^2},\forall x$$

$\Leftarrow$ אין ל- f גבול ב- $(0,0)$.

(2)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

גם כאן $f(x,y)$ מתאפסת על שני הצירים $\begin{matrix}x=0\Rightarrow f=0\\ y=0\Rightarrow f=0\end{matrix}$.

$$f(x,y)=\frac{x^2mx}{x^4+(mx)^2}=\frac{mx}{x^2+m^2}\xrightarrow{x\to 0}0$$

אבל לאורך הפרבולה $y=x^2$.

$$f(x,x^2)=\frac{x^2x^2}{x^4+\left(x^2\right)^2}=\frac{1}{2}$$

$\Leftarrow$ אין ל- f גבול בראשית.

(3)

$$f(x,y)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{y}+y\sin\frac{1}{x} & x\wedge y\neq 0 \\ 0 & x\vee y=0 \end{cases}$$

נראה שיש גבול ב- $(0,0)$ והוא $L=0$:

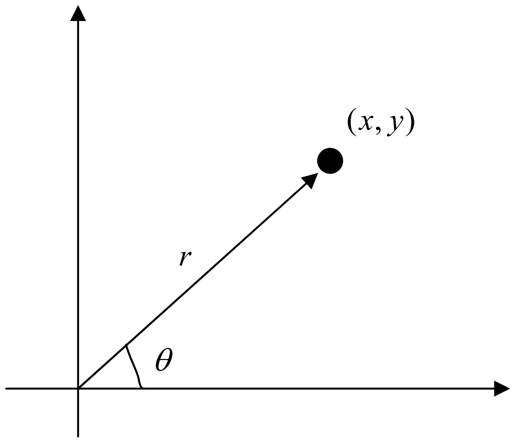
$$\left|f(x,y)\right|\le\left|x\sin\frac{1}{y}\right|+\left|y\sin\frac{1}{x}\right|\le|x|+|y|<\varepsilon$$

ניקח $\delta=\frac{\varepsilon}{2}$

הערה: שני הגבולות הנשניים <u>לא</u> קיימים.

קואורדינאטות פולאריות

תהי $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



$$x = r\cos\theta$$
$$y = r\sin\theta$$

נניח כי $f(r\cos\theta, r\sin\theta) = F(r) = F(\theta)$ כאשר G חסומה ו $F(r) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$. הוכיחו כי $f(x,y) \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$.

<u>פתרון:</u>

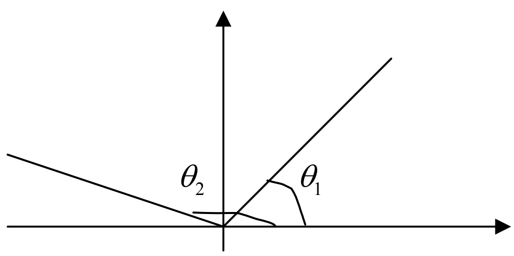
נסמן ב- M את החסם של $G(\theta)$. אזי $|G(\theta)| \le M$ לכל θ. יהי $\varepsilon > 0$. יהי $\delta > 0$ כך ש-

$$|F(r)| < \frac{\varepsilon}{M} \Leftarrow r < \delta$$

אזי $$|f(x,y) - L| \underset{L=0}{=} |f(x,y)| = |F(r)G(\theta)| < \frac{\varepsilon}{M}M = \varepsilon$$

אם $r < \delta \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2} < \delta$

מתי משתמשים במעבר לקואורדינאטות פולאריות:



1) על מנת לומר שאין גבול. "נקפיא" θ וניקח את r ל-0. ובודקים: אם עבור θ_1 ו- θ_2 יש גבולות שונים כאשר $r \to 0$.
2) על מנת לומר שיש גבול חייבים שיתקיימו תנאי המשפט. <u>לא נכון</u> לומר שאם לכל θ בנפרד יש אותו גבול אז לפונקציה יש גבול. זה לומר בדיוק שרק לאורך קרנות יש גבול.

(4)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}=\lim_{r\to0}\frac{r^2\cos^2\theta r^2\sin^2\theta}{r^2}=\lim_{r\to0}\underbrace{r^2}_{F(r)}\underbrace{\cos^2\theta\sin^2\theta}_{G(\theta)}=0$$

בתנאי המשפט

לכן הגבול בראשית הוא אכן 0.

(5)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (0,0)\end{cases}$$

$$\lim_{r\to0}\frac{r^2\cos^2\theta r\sin\theta}{r^4\cos^4\theta+r^2\sin^2\theta}=\lim_{r\to0}\frac{r\cos^2\theta\sin\theta}{r^2\cos^4\theta+\sin^2\theta}$$

אם $\theta\neq\pi k$ אזי הגבול הוא 0.
אם $\theta=\pi k$ אזי הביטוי הוא 0 לכל r ובפרט הגבול הוא 0.

למרות זאת ראינו של f ***אין*** גבול ב-0.

תרגול 18: פונקציות בשני משתנים

(6)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y\sin(x-y)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{8}}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (0,0)\end{cases}$$

האם הפונקציה רציפה?

$$0\xleftarrow[(x,y)\to(0,0)]{}\frac{-y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{8}}}\leq\frac{y\sin(x-y)}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{8}}}\leq\frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{8}}}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$$

$$\frac{-y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{8}}}=\frac{-r\sin\theta}{r^{\frac{1}{4}}}=-r^{\frac{3}{4}}\underbrace{\sin\theta}_{bounded}\xrightarrow[r\to0]{}0 \qquad \frac{y}{\left(x^2+y^2\right)^{\frac{1}{8}}}=\frac{r\sin\theta}{r^{\frac{1}{4}}}=r^{\frac{3}{4}}\underbrace{\sin\theta}_{bounded}\xrightarrow[r\to0]{}0$$

$\Leftarrow$ לפי משפט הסנוויץ' $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0=f(0,0)$, אזי f רציפה ב- $(0,0)$.

(7)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (0,0)\end{cases}\qquad,\qquad \alpha>0$$

לאילו ערכי α הפונקציה f רציפה?

<u>תשובה:</u>

בכל $(x,y)\neq(0,0)$, f רציפה. יש לבדוק מה קורה ב $(0,0)$.

$$\lim_{r\to0}\frac{r^2\cos^2\theta r\sin\theta}{r^{2\alpha}}=\lim_{r\to0}\underbrace{r^{3-2\alpha}}_{F(r)}\underbrace{\cos^2\theta\sin\theta}_{G(\theta)}$$

חסומה

אם $\left(3-2\alpha\right)<0$ כלומר $\alpha<\frac{3}{2}$ אזי $F(r)\xrightarrow[r\to0]{}0$

אזי לפי משפט $f(x,y)\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$.

$\Leftarrow$ עבור $\alpha<\frac{3}{2}$ f רציפה גם ב- $(0,0)$ ולכן רציפה.

אם $\alpha\geq\frac{3}{2}$ נסתכל על הקרן $y=x$.

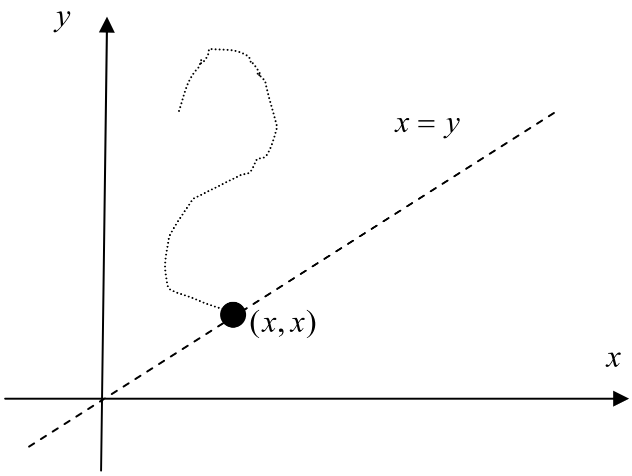
$$f(x,y)=f(x,x)=\frac{x^3}{\left(2x^2\right)^{\alpha}}=\frac{1}{2^{\alpha}}x^{3-2\alpha}\xrightarrow[x\to0]{}\begin{cases}\infty & \alpha>\frac{3}{2}\\ 1 & \alpha=\frac{3}{2}\end{cases}$$

מסקנה: אם $\alpha\geq\frac{3}{2}$ אזי f לא רציפה כי היא לא רציפה ב $(0,0)$. אזי f רציפה אם ורק אם $\alpha<\frac{3}{2}$.

(8)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{\sin x-\sin y}{x-y} & x\neq y\\ \cos x & x=y\end{cases}$$

האם הפונקציה רציפה?



<u>פתרון:</u>

בכל נקודה $x\neq y$ f רציפה. נבדוק בנקודות מהצורה (x,x). נסתכל על סדרה $(x_n,x_x)\to(x,x)$.

<u>$\forall n\ \ x_n\neq y_n$</u>

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n-\sin y_n}{x_n-y_n}=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sin\dfrac{x_n-y_n}{2}\cos\dfrac{x_n+y_n}{2}}{2\dfrac{x_n-y_n}{2}}=\cos x=f(x,x)$$

$$f(x_n,x_n)=\cos x\xrightarrow[n\to\infty]{}\cos x$$

לכן לפי היינה f רציפה.

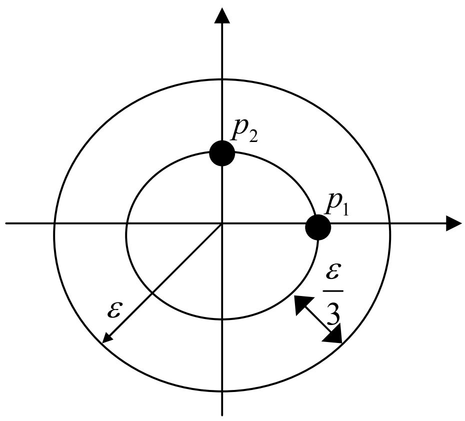
(9)

תהי f :

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (0,0)\end{cases}$$

הוכיחו כי בכל סביבה של $(0,0)$ f מקבלת כל ערך בין -1 ל- 1.

<u>פתרון:</u>



$$f(p_1)=f\left(\frac{2\varepsilon}{3},0\right)=1$$

$$f(p_2)=f\left(0,\frac{2\varepsilon}{3}\right)=-1$$

f רציפה על הטבעת. לכן לפי משפט ערך הביניים היא מקבלת כל ערך בקטע $[-1,1]$ שם.

הגדרה – רציפות במידה שווה

$f(x,y)$ רציפה במידה שווה בתחום D אם לכל ε קיים δ כך שלכל 2 נקודות בתחום D מתקיים:

$$\|x-y\|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(y)|<\varepsilon$$

(10)

$f(x,y)=x^2-xy+y^2$. האם הפונקציה רציפה במידה שווה ב- $\mathbb{R}^2$?

<u>פתרון:</u>

נשים לב כי $f(x,0)=x^2$.

יהי $\varepsilon=1$. לכל δ:

ניקח :

$$p_1=(x,0)$$

$$p_2=(x+\frac{\delta}{2},0)$$

$$|f(p_2)-f(p_1)|=\left|x^2+\delta x+\frac{\delta^2}{4}-x^2\right|=\delta\left|x+\frac{\delta}{4}\right|>\delta x \underset{x=\frac{1}{\delta}}{=} 1$$

x מיד יהיה חיובי

לכן ניקח:

$$p_1=(x,0)=\left(\frac{1}{\delta},0\right)$$

$$p_2=(x+\frac{\delta}{2},0)=\left(\frac{1}{\delta}+\frac{\delta}{2},0\right)$$

$\Leftarrow$ f אינה רציפה במידה שווה.

<u>תרגיל לבית:</u>

יש לבדוק רציפות במ"ש של: $f(x,y)=\sin(x+y)$ ב: $\mathbb{R}^2$.

תרגול 19: גזירה של פונקציות בשני משתנים

(1)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^\alpha} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (0,0)\end{cases}\qquad,\qquad \alpha>0$$

(א) לאילו ערכי α f רציפה?

(ב) לאילו ערכי α קיימת ל- f ב- $(0,0)$ נגזרת מכוונת בכיוון הוקטור $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$?

(ג) לאילו ערכי α f גזירה?

פתרון:

(א) תרגול קודם, תרגיל 7. הראנו ש f רציפה אם ורק אם $\alpha<\frac{3}{2}$.

(ב)

<u>תזכורת</u>:

יהי $u=(u_1,u_2)$ וקטור יחידה $(u_1{}^2+u_2{}^2=1)$, נגזרת מכוונת בכוון u:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)=\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+hu_1,y_0+hu_2)-f(x_0,y_0)}{h}$$

בתנאי שהגבול קיים.

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{f\left(\frac{h}{\sqrt{2}},\frac{h}{\sqrt{2}}\right)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\left(\dfrac{\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^3}{\left[2\left(\frac{h}{\sqrt{2}}\right)^2\right]^\alpha}-0\right)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{1}{2\sqrt{2}}h^{2-2\alpha}=\begin{cases}0 & \alpha<1\\ \dfrac{1}{2\sqrt{2}} & \alpha=1\\ \infty & \alpha>1\end{cases}$$

לסיכום:

$\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$ קיימת אם ורק אם $\alpha\leq1$.

(ג)

תזכורת:

$f(x,y)$ גזירה בנקודה (x_0,y_0) אם קיימים A,B כך שלכל h,k מתקיים:

$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+Ah+Bk+\alpha(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$ כאשר

$\alpha(h,k)\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{}0$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

לכן,

f גזירה ב- $(0,0)$ אם :

$$f(x,y)-f(0,0)=\alpha(x,y)\sqrt{x^2+y^2} \text{ ו- } \alpha(x,y)\to 0$$

$$\alpha(x,y)=\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^{\alpha+\frac{1}{2}}}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$$

לפי סעיף א: אם ורק אם $\frac{3}{2}<\alpha+\frac{1}{2}$, לכן f גזירה ב- $(0,0)$ אם ורק אם $\alpha<1$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\frac{2xy\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}-x^2y\left(x^2+y^2\right)^{\alpha-1}\alpha 2x}{\left(x^2+y^2\right)^{2\alpha}}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^2\left(x^2+y^2\right)^{\alpha}-x^2y\left(x^2+y^2\right)^{\alpha-1}\alpha 2y}{\left(x^2+y^2\right)^{2\alpha}}$$

$\Leftarrow$ הנגזרות החלקיות קיימות בסביבת x,y ורציפות שם לכל α.

משפט:

תרגיל לבית (דוגמאות נגדיות):

$$1)\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (0,0)\end{cases}$$

לא רציפה בראשית, אבל יש לה נגזרות חלקיות.

$$2)\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (0,0)\end{cases}$$

יש נגזרות חלקיות ב $(0,0)$, אבל לא גזירה.

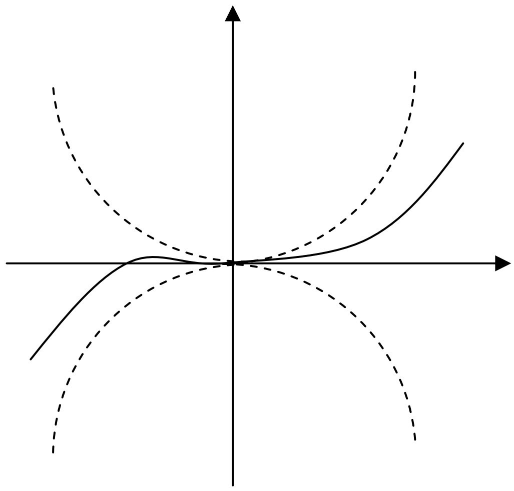
$$3)\quad f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (0,0)\end{cases}$$

גזירה ב $(0,0)$, אבל הנגזרות החלקיות לא רציפות.

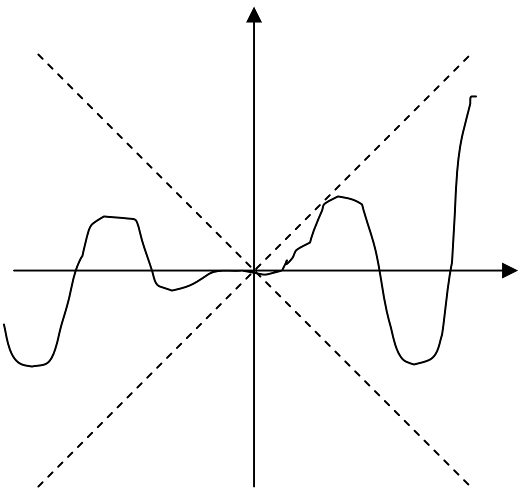
(2)

נתון כי $f(x,y)$ מקיימת $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 \quad , \quad |f(x,y)| \le x^2+y^2$. הוכיחו כי f גזירה ב $(0,0)$.

אינטואיציה:



$|f(x)| < x^2 \Leftarrow f$ גזירה ב $(0,0)$.



$|f(x)| < x \Leftarrow f$ רציפה ב $(0,0)$.

פתרון:

$$f(0,0)=0 \Leftarrow |f(0,0)| \le 0^2+0^2=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)}{h}$$

$$h\neq 0, \left|\frac{f(h,0)}{h}\right| \le \left|\frac{h^2}{h}\right| = h \xrightarrow[h\to 0]{} 0$$

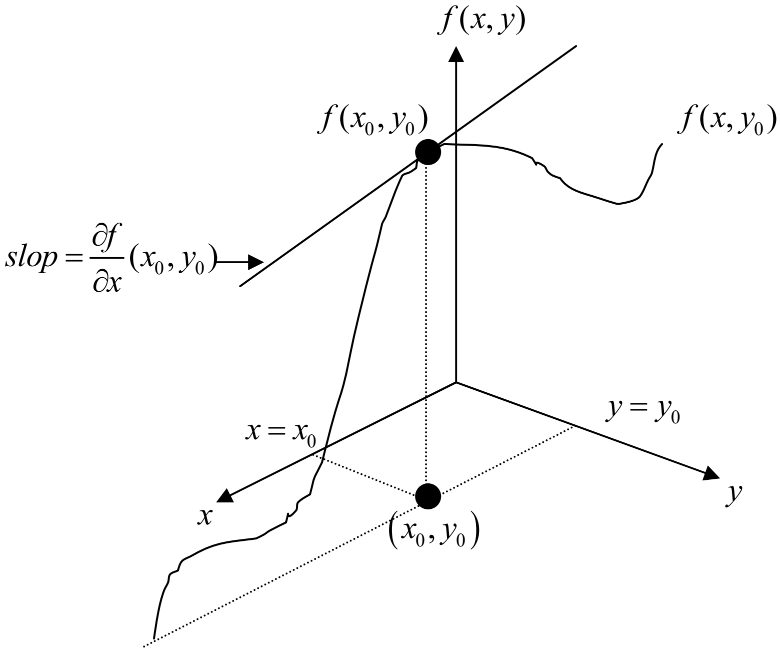
אזי הנגזרת החלקית שווה ל- 0. אזי f גזירה ב- $(0,0)$ אם :

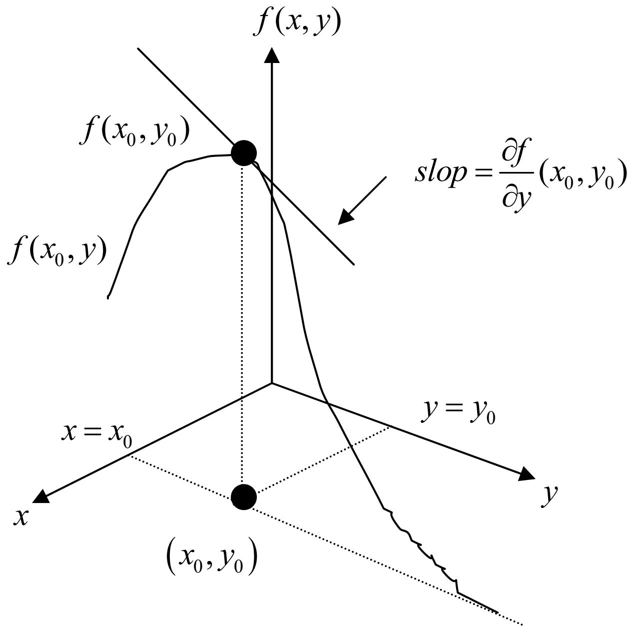
$$f(x,y)-f(0,0)=\alpha(x,y)\sqrt{x^2+y^2} \quad \text{ומתקיים} \quad \alpha(x,y)\to 0$$

(כי בהגדרת הנגזרת $B=\frac{\partial f}{\partial y}=0 \quad ; \quad A=\frac{\partial f}{\partial x}=0$)

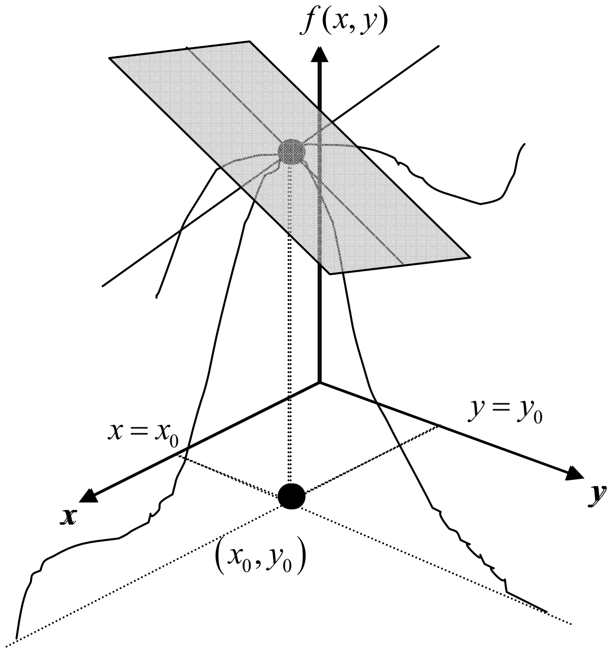
$$|\alpha(x,y)| = \left|\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| \le \left|\frac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| = \sqrt{x^2+y^2} \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

לכן, f גזירה ב-0 לפי ההגדרה.


$f(x,y)$
$f(x_0,y_0)$
$f(x,y_0)$
$slop=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$
$x=x_0$
$y=y_0$
x
y
(x_0,y_0)


$f(x,y)$
$f(x_0,y_0)$
$slop=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$
$f(x_0,y)$
$x=x_0$
$y=y_0$
x
y
(x_0,y_0)

2 הישרים הללו מגדירים מישור בנקודה $g(x,y)=f(x_0,y_0)+A(x-x_0)+B(y-y_0)$.
(f גזירה רק אם יש לה מישור משיק).



תרגול 20: גזירה של פונקציות בשני משתנים

(1)

יש למצוא משוואת המישור למשיק לפונקציה $f(x,y)=e^x \sin y$ בנקודה $(0,0)$.

<u>***פתרון***</u>:

f גזירה אם ורק אם יש לה מישור משיק. ראינו בשיעור הקודם כיצד נראה המישור המשיק.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=e^{x_0}\sin y_0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=A=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=e^{x_0}\cos y_0 \quad , \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=B=1$$

כעת נותר לחשב את משוואת המישור המשיק:

$$g(x,y)=f(0,0)+A(x-0)+B(y-0)=y \; .$$

(2)

תהי $f(x,y)$ גזירה ב-$\left(x_0,y_0\right)$. הוכיחו שבהכרח קיים כוון שבו הנגזרת המכוונת קיימת ושווה ל-0.

<u>***פתרון***</u>:

<u>משפט</u>: אם f גזירה ב $\left(x_0,y_0\right)$ אזי הנגזרת המכוונת ניתנת על ידי:

$\frac{\partial f}{\partial u}\left(x_0,y_0\right)=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x_0,y_0\right)u_1+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x_0,y_0\right)u_2$ כאשר $u=\left(u_1,u_2\right)$ הוא וקטור יחידה.

ניסוח חלופי:

$$\vec{\nabla} f=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$ נקרא "הגרדיאנט של f".

$$\frac{\partial f}{\partial u}=\vec{\nabla} f\cdot\vec{u}$$

אם $\vec{\nabla} f\left(x_0,y_0\right)=(0,0)$ אזי לכל $\vec{u}$ $\frac{\partial f}{\partial u}\left(x_0,y_0\right)=0$. אחרת, $\frac{\partial f}{\partial u}\left(x_0,y_0\right)=(a,b)\neq(0,0)$.

וקטור היחידה $\vec{u}=\left(\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}},\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ מקיים $\frac{\partial f}{\partial u}\left(x_0,y_0\right)=(a,b)\cdot\vec{u}=0$.

(3) כלל השרשרת

תהי $f(x,y)=e^{xy^2}$, נניח $x=t\cos t$ ו- $y=t\sin t$. יש למצוא את $\frac{df}{dt}$ בנקודה $t=\frac{\pi}{2}$.

<u>***פתרון:***</u>

<u>דרך א</u>

נציב x ו- y ונקבל:

$$f(t)=e^{t^3\cos t\sin^2 t}$$
$$f'(t)=e^{t^3\cos t\sin^2 t}\cdot\left(t^3\cos t\sin^2 t\right)'=...$$

<u>דרך ב</u>

אם $f(x,y)$ גזירה, $x(t)$ ו- $y(t)$ גזירות ו- $F(t)=f\left(x(t),y(t)\right)$ אזי F גזירה ו-

$$F'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

אצלנו:

$\frac{df}{dt}=y^2e^{xy^2}\left(\cos t-t\sin t\right)+2xye^{xy^2}\left(\sin t+t\cos t\right)$ בנקודה $t=\frac{\pi}{2}$: $x=0$ ו- $y=\frac{\pi}{2}$.

$$\left.\frac{df}{dt}\right|_{t=\frac{\pi}{2}}=\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi^3}{8}$$

(4)

תהי $f(x,y)$ גזירה. נתון:

$$i)\ f(x,x^2)=1\ ,\ \forall x$$

$$ii)\ \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=x$$

חשבו את הנגזרת החלקית של $\frac{\partial f}{\partial y}(x,x^2)$, $x\neq 0$.

<u>פתרון</u>

$$F(t)=f\left(x(t),y(t)\right)=f(t,t^2)$$

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[rr, bend left] & \underset{(x,y)}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "f"'] & \underset{(x,y)}{\mathbb{R}} \end{tikzcd}$$

$$t \longrightarrow \underbrace{x(t)}_{\substack{\parallel \\ t}},\underbrace{y(t)}_{\substack{\parallel \\ t^2}}$$

כלל השרשרת:

$$\frac{dF}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}$$

אנחנו מחפשים את זה

לפי נתון (i) : $F(t)=f(t,t^2)=1$ אזי $\frac{dF}{dt}=0$. לכן,

$$0=\frac{\partial f}{\partial x}\left(x(t),y(t)\right)\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x(t),y(t)\right)\cdot\frac{dy}{dt}\underset{by\ (ii)}{=}$$

$$=x(t)\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\left(x(t),y(t)\right)\cdot\frac{dy}{dt}=$$

$$=t\cdot 1+\frac{\partial f}{\partial y}\left(t,t^2\right)\cdot 2t$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}\left(t,t^2\right)=-\frac{1}{2}\qquad (t\neq 0)$$

הכללה:

$$F(t)=f\left(x(t),y(t)\right)$$

$$G(u,v)=g\left(x(u,v),y(u,v)\right)$$

(5)

הוכיחו כי כל פונקציה מהצורה $\omega(t,x) = f(x+ct) + g(x-ct)$ מקיימת את משוואת הגלים:

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

<u>פתרון</u>:

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = f'(x+ct)\cdot c + g'(x-ct)\cdot(-c)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = f'(x+ct)\cdot 1 + g'(x-ct)\cdot 1$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = f''(x+ct)\cdot c^2 + g'(x-ct)\cdot c^2$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} = f''(x+ct)\cdot 1 + g''(x-ct)\cdot 1$$

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \qquad \Leftarrow$$

תרגול 21: אינטגרל פרמטרי

אינטגרל התלוי בפרמטר

דף עזר להרצאה:

משפטים:

1. תהא $f(x,y)$ רציפה במלבן $[a,b]\times[c,d]$. נגדיר: $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$. אזי F רציפה ב- $[c,d]$.

2. כלל לייבניץ - גזירה תחת סימן האינטגרל:

תהא $f(x,y)$ מוגדרת במלבן $[a,b]\times[c,d]$. נגדיר $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ ונניח ש - F מוגדרת לכל y ב - $[c,d]$ (למשל, אפשר לדרוש שלכל y ב - $[c,d]$, $f(x,y)$ רציפה כפונקציה של x).

כמו כן נניח ש - $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ רציפה במלבן.

אזי:

$$F'(y)=\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx .$$

3. משפט פוביני - החלפת סדר אינטגרציה:

תהא $f(x,y)$ רציפה במלבן $[a,b]\times[c,d]$. אזי:

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy .$$

4. משפט לייבניץ - הכללה:

תהא $f(x,y)$ רציפה במלבן $[a,b]\times[c,d]$. תהיינה $\varphi(y),\psi(y)$ פונקציות רציפות ב - $[c,d]$, כך שלכל y, $a\le\varphi(y),\psi(y)\le b$. נגדיר: $F(y)=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$.

אזי F רציפה ב- $[c,d]$.

אם בנוסף $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ רציפה במלבן ו - $\varphi(y),\psi(y)$ גזירות, אזי:

$$F'(y)=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx+f(\psi(y),y)\psi'(y)-f(\varphi(y),y)\varphi'(y) .$$

(1)

תהי $F(x)=\int_1^2 \sin(xe^y)dy$. חשבו את $F'(x)$.

<u>***פתרון***</u>:

נסמן את $F(x,y)=\sin(xe^y)$ אז $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\cos(xe^y)\cdot e^y$

f ו- $\frac{\partial f}{\partial x}$ רציפות (כפונקציות של 2 משתנים) בכל $\mathbb{R}^2$. לכן, לפי לייבניץ:

$$F'(x)=\int_1^2 \cos(xe^y)\cdot e^y dy \underset{\substack{t=xe^y \\ dt=xe^y dy}}{=} \int_{xe}^{xe^2} \frac{1}{x}\cos t dt =$$

$$=\frac{1}{x}\left(\sin t\Big|_{t=xe}^{t=xe^2}\right)=\frac{1}{x}\left(\sin(xe^2)-\sin(xe)\right)$$

(2)

חשבו $\int_0^1 \frac{xdx}{(1+2x)^2}$.

פתרון:

נגדיר $F(a)=\int_0^1 \frac{xdx}{(1+ax)^2}$. נחפש את $F(2)$.

הרעיון: למצוא פונקציה בשני משתנים $f(x,a)$ כך ש: $\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{x}{(1+ax)^2}$ ואז

$$F(a)=\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial a}(x,a)dx=\frac{d}{da}\int_0^1 f(x,a)dx$$

הערה: צריך להזהר לא להתבלבל בגזירה ובאינטגרציה לפי המשתנים השונים!

כדי למצוא $f(x,a)$ עושים אינטגרציה לא מסויימת לפי a:

$$\int \frac{x}{(1+ax)^2}da=-\frac{1}{1+ax}=f(x,a)$$

בדיקת תנאי המשפט:

במלבן $[0,1]\times[1,3]$ f ו- $\frac{\partial f}{\partial a}$ רציפות.

$$F(a)=\int_0^1 \frac{x}{(1+ax)^2}dx \underset{by\ \text{Leibniz}}{=} \frac{d}{da}\int_0^1\left(-\frac{1}{1+ax}\right)dx=$$

$$=\frac{d}{da}\left[-\frac{1}{a}\ln(1+ax)\Big|_{x=0}^{x=1}\right]=-\frac{d}{da}\ln\left(\frac{1+a}{a}\right)=$$

$$=-\frac{1}{a^2}\left(\frac{1}{1+a}a-\ln(1+a)\right)=\frac{\ln(1+a)}{a^2}-\frac{1}{a(a+1)}$$

$$\Rightarrow F(2)=\frac{\ln 3}{4}-\frac{1}{6}$$

(3)

חשבו $\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$ $.(0 < a < b)$

פתרון

נשים לב: $\int_a^b x^t dt = \frac{x^b - x^a}{\ln x}$.

נגדיר $f(x,t) = x^t$. פונקציה זו רציפה במלבן $[0,1]\times[a,b]$.

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx = \int_0^1 \left(\int_a^b x^t dt \right) dx \underset{\substack{by \\ fubini}}{=} \int_a^b \left(\int_0^1 x^t dx \right) dt =$$

$$= \int_a^b \left(\left. \frac{x^{t+1}}{t+1} \right|_{x=0}^{x=1} \right) dt = \int_a^b \left(\frac{1}{t+1} \right) dt = \ln \frac{b+1}{a+1}$$

(4)

תהי $f(x,y) = \begin{cases} \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$. האם אפשר לשנות סדר אינטגרציה?

לשון אחר, האם השוויון הבא מתקיים:

$$\int_0^1 \int_0^1 \left(f(x,y) dx \right) dy \overset{?}{=} \int_0^1 \int_0^1 \left(f(x,y) dy \right) dx$$

פתרון

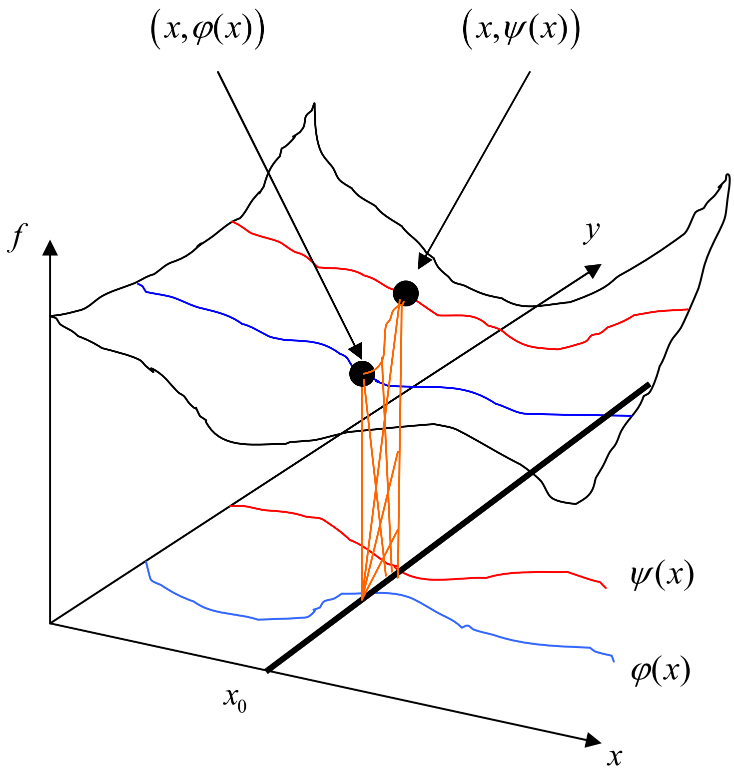
נבדוק אם $f(x,y)$ רציפה ב $(0,0)$.

יש תלות ב- θ ולכן אין גבול! $f(r,\theta) = \frac{r^2(\sin^2\theta - \cos^2\theta)}{r^4} = -\frac{\cos(2\theta)}{r^2}$

הפונקציה <u>לא</u> רציפה ב $(0,0)$.

לכן פוביני לא תופס. אמנם, חישוב נותן $\frac{\pi}{4}$ או $-\frac{\pi}{4}$ תלוי בסדר האינטגרציה.

תרגול 22: אינטגרל פרמטרי



השטח המסומן: $F(x)=\int\limits_{\varphi(x_0)}^{\psi(x_0)} f(x_0,y)dy$.

(5)

חשבו $\int_0^1 \frac{\log(1+x)}{1+x^2}dx$.

פתרון:

נגדיר $I(\alpha)=\int_0^\alpha \frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2}dx$. מחפשים את $I(1)$.

$$\psi(\alpha)=\alpha \qquad \varphi(\alpha)=0$$

$f(x,\alpha)=\frac{\log(1+\alpha x)}{1+x^2}$. f רציפה במלבן $[0,2]\times[0,2]$.

$\frac{\partial f}{\partial \alpha}=\frac{1}{1+x^2}\cdot\frac{1}{1+\alpha x}\cdot x$ גם רציפה במלבן.

לכן, לפי לייבניץ: $I'(\alpha)=\int_0^\alpha \frac{xdx}{(1+x^2)(1+\alpha x)}+\underbrace{\frac{\log(1+\alpha^2)}{(1+\alpha^2)}}_{f(\psi(\alpha),\alpha)}\cdot \underbrace{1}_{\psi'(\alpha)}-\underbrace{0}_{\varphi'(\alpha)}$

נעשה פרוק לשברים חלקיים:

$$\frac{xdx}{(1+x^2)(1+\alpha x)}=\frac{A+Bx}{1+x^2}+\frac{C}{1+\alpha x}$$

$\Leftarrow$

$$A=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}$$
$$B=\frac{1}{1+\alpha^2}$$
$$C=\frac{-\alpha}{1+\alpha^2}$$

$$=\frac{1}{1+\alpha^2}\int_0^\alpha\frac{\alpha+x}{1+x^2}-\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\int_0^\alpha\frac{dx}{1+\alpha x}+\frac{\log(1+\alpha^2)}{(1+\alpha^2)}$$ $\longleftarrow$מהפירוק לשברים חלקיים

$$=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\arctan(\alpha)+\frac{1}{1+\alpha^2}\frac{\log(1+x^2)}{2}\Bigg|_{x=0}^{x=\alpha}-\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\frac{1}{\alpha}\log(1+\alpha x)\Big|_{x=0}^{x=\alpha}+\frac{\log(1+\alpha^2)}{(1+\alpha^2)}=$$

$$=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\arctan(\alpha)+\frac{1}{2}\frac{\log(1+\alpha^2)}{(1+\alpha^2)}$$

$$I'(\alpha)=\frac{\alpha}{1+\alpha^2}\arctan(\alpha)+\frac{1}{2}\frac{\log(1+\alpha^2)}{(1+\alpha^2)}$$

$$I(\alpha)=\frac{1}{2}\left(\arctan(\alpha)\right)\left(\log(1+\alpha^2)\right)+C$$

$$I(0)=\int_0^0\frac{\log(1)}{1+x^2}dx=0\Rightarrow C=0$$

$$\Rightarrow I(1)=\frac{\pi}{8}\log 2$$

(6)

יהיו $f,y\in C^2$ (גזירות ברציפות פעמיים). הוכיחו שאם $y(x)$ מקיימת את המשוואה האינטגרלית:

$$y(x)=4\int_0^x(t-x)y(t)dt-\int_0^x(t-x)f(t)dt$$

אז y מקיימת את המשוואה הדיפרנציאלית:

$y''(x)+4y(x)=f(x)$ עם תנאי התחלה $y'(0)=0,y(0)=0$.

פתרון

$$y'(x)=4\left[\int_0^x -y(t)dt+(x-x)y(x)\cdot 1-(0-x)y(0)\cdot\underbrace{0}_{\varphi'}\right]-\left[\int_0^x -f(t)dt+(x-x)f(x)\cdot 1-(0-x)f(0)\cdot 0\right]=$$

$$=-4\int_0^x y(t)dt+\int_0^x f(t)dt$$

$$\Rightarrow y'(x)=-4\int_0^x y(t)dt+\int_0^x f(t)dt$$

$$y''(x)=-4y(x)+f(x)$$

מהמשפט היסודי
ולא מלייבניץ

אינפי 2 - דף עזר בנושא התכנסות במ"ש של אינטגרלים פרמטריים.

הגדרה: נאמר ש - $F(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx$ מתכנס במ"ש עבור $y\in E$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים x_ε כך

ש - $\left|\int_a^\infty f(x,y)dx-\int_a^x f(x,y)dx\right|<\varepsilon$ = $\left|\int_x^\infty f(x,y)dx\right|$ לכל $x>x_\varepsilon$ ולכל $y\in E$.

משפטים:

1. משפט ויירשטראס:

תהא $f(x,y)$ מוגדרת לכל $x\in[a,\infty)$ ולכל $y\in E$, ותהא $M(x)$ מוגדרת לכל $x\in[a,\infty)$.

נניח שמתקיימים התנאים הבאים:

א. $M(x)$ ו- $f(x,y)$ אינטגרביליות לפי x בכל קטע מהצורה $[a,b]$.

ב. $|f(x,y)|\le M(x)$ לכל $y\in E$.

ג. $\int_a^\infty M(x)dx$ מתכנס.

אזי $F(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx$ מתכנס במ"ש ב - E.

2. תהא $f(x,y)$ רציפה ב - $[a,\infty)\times[c,d]$, ונניח ש - $F(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx$ מתכנס במ"ש ב- $[c.d]$. אזי $F:[c,d]\to R$ רציפה.

3. משפט לייבניץ:

תהיינה $f(x,y)$ ו - $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ רציפות ברצועה $[a,\infty)\times[c,d]$, ונניח שמתקיימים התנאים הבאים:

א. $\int_a^\infty f(x,y)dx$ מתכנס לכל $y\in[c,d]$.

ב. $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ מתכנס במ"ש ב - $[c,d]$.

אזי:

א. $\int_a^\infty f(x,y)dx$ מתכנס במ"ש ב -$[c,d]$.

ב. $F(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx$ גזירה, ומתקיים: $F'(y)=\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$.

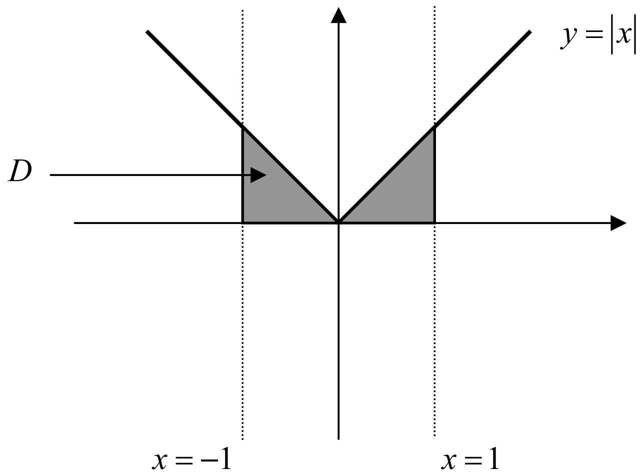
4. משפט פוביני:

בהנחות משפט 2 לעיל: $\int_c^d\left[\int_a^\infty f(x,y)dx\right]dy=\int_a^\infty\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$

תרגול 23: אינטגרלים כפולים

(1)

חשבו את $\iint_D ydxdy$ כאשר D הוא התחום החסום ע"י הישרים $x=\pm 1$, $y=0$, $y=|x|$.



<u>הגדרה</u>: התחום D נקרא "תחום פשוט" (או נורמלי) אם

$$D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b, y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$$

כאשר y_1, y_2 רציפות

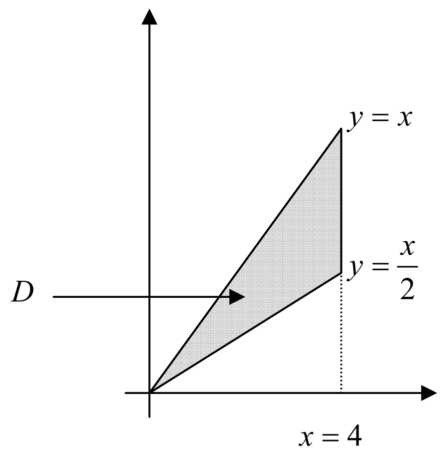
<u>משפט</u>: אם D תחום פשוט אז $\iint_D f(x,y)ds=\int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$

בחזרה לתרגיל:

$$\iint_D ydxdy=\int_{-1}^{1}\left(\int_0^{|x|} ydy\right)dx=\int_{-1}^{1}\left(\frac{y^2}{2}\Bigg|_{y=0}^{y=|x|}\right)dx=\int_{-1}^{1}\frac{x^2}{2}dx=\frac{x^3}{6}\Bigg|_{x=-1}^{x=1}=\frac{1}{3}$$

(2)

חשבו את $\iint\limits_D \left(x^3+y^3\right)ds$ כאשר D הוא התחום החסום על ידי $x=4,\ y=\frac{x}{2},\ y=x$.



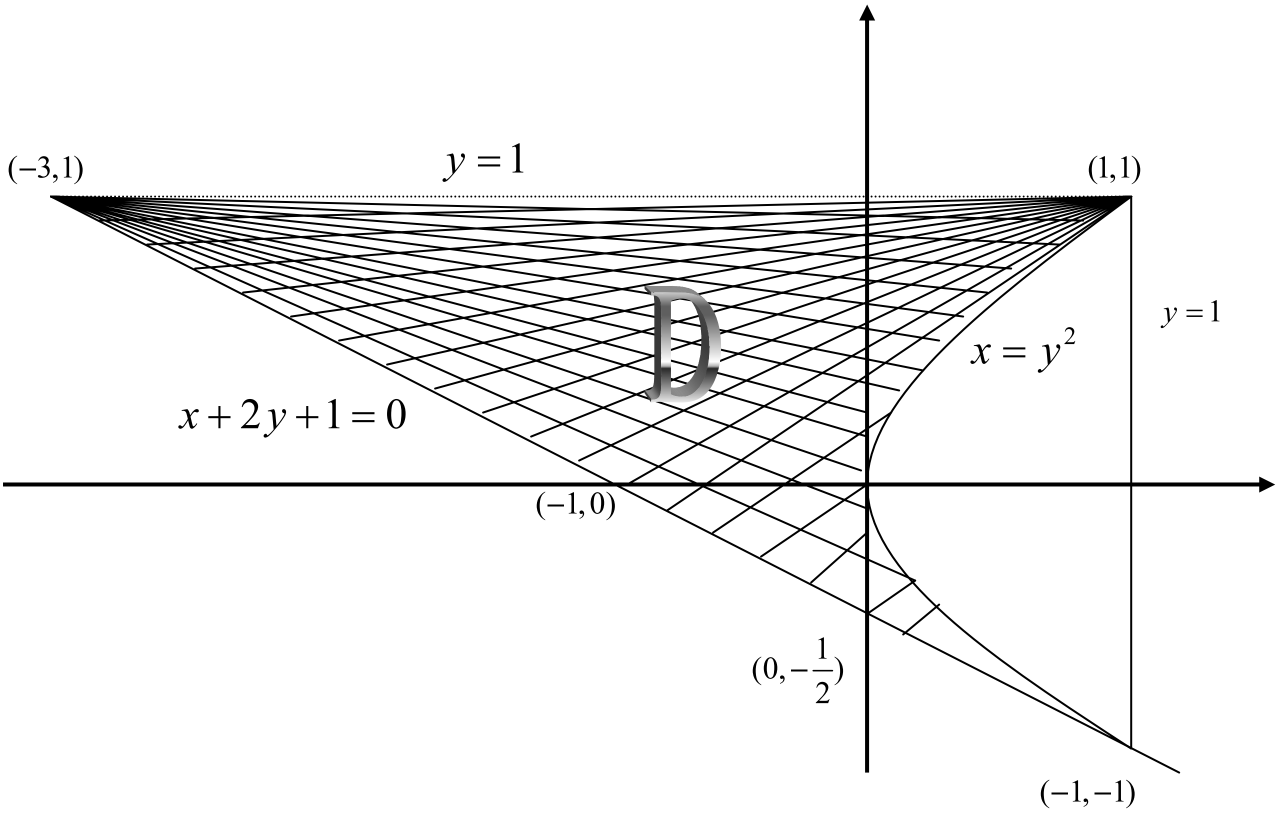
האם התחום הנ"ל פשוט? כן, על שני הצירים.

$$\iint\limits_D \left(x^3+y^3\right)ds=\int_0^4\left(\int_{\frac{x}{2}}^{x}\left(x^3+y^3\right)\right)dx=\int_0^4\left(x^3y+\frac{y^4}{4}\Bigg|_{y=\frac{x}{2}}^{y=x}\right)dx=\int_0^4\left(x^4+\frac{x^4}{4}-\frac{x^4}{2}-\frac{x^4}{64}\right)dx=$$

$$=\int_0^4\frac{47}{64}x^4dx=\frac{47}{64}\cdot\frac{x^5}{5}\Bigg|_0^4=\frac{752}{5}$$

(3)

חשבו את $\iint_D dxdy$ כאשר D חסום על ידי: $x=y^2, y=1, x+2y+1=0$.



זהו תחום פשוט ביחס לציר x .

$$\iint_D dxdy=\int_{-1}^{1}\left(\int_{-2y-1}^{y^2}1\cdot dx\right)dy=\int_{-1}^{1}\left(y^2+2x+1\right)dy=$$
$$=\frac{y^3}{3}+2\frac{x^2}{2}+y\Big|_{-1}^{1}=\frac{8}{3}$$

(4)

$$I=\int_0^1\int_0^{1-\sqrt{1-y}} f(x,y)dxdy+\int_0^1\int_{1+\sqrt{1-y}}^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dxdy+\int_1^2\int_0^{\sqrt{4-y^2}} f(x,y)dxdy$$

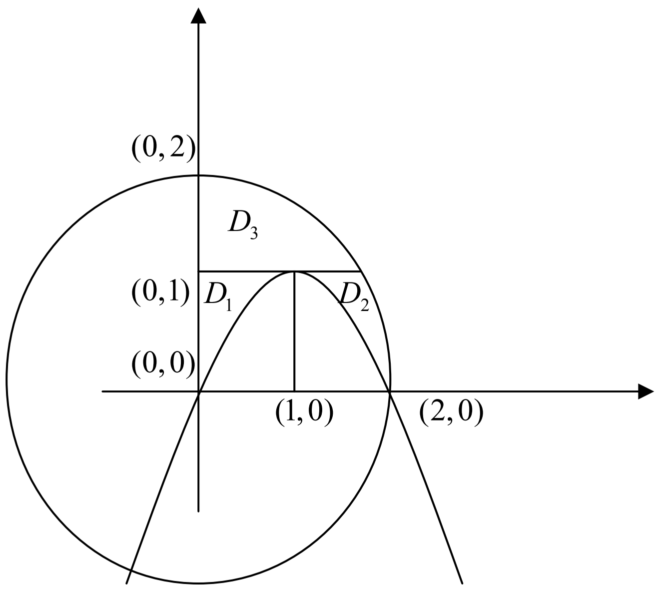
א) ציירו את תחום האינטגרציה D.
ב) כתבו את I כאינטגרל מהצורה $\iint F\cdot dydx$.
ג) חשבו את השטח D.

__*פתרון*__

א)

חישוב עזר:
$$x=1-\sqrt{1-y}$$
$$x-1=-\sqrt{1-y}$$
$$1-y=x^2-2x+1$$
$$y=-x^2+2x$$

חישוב עזר:
$$x=\sqrt{4-y}$$
$$x^2+y^2=4$$



$$D=D_1+D_2+D_3$$

ב)

$$I=\int_0^2\left(\int_{-x^2+2x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)dy\right)dx$$

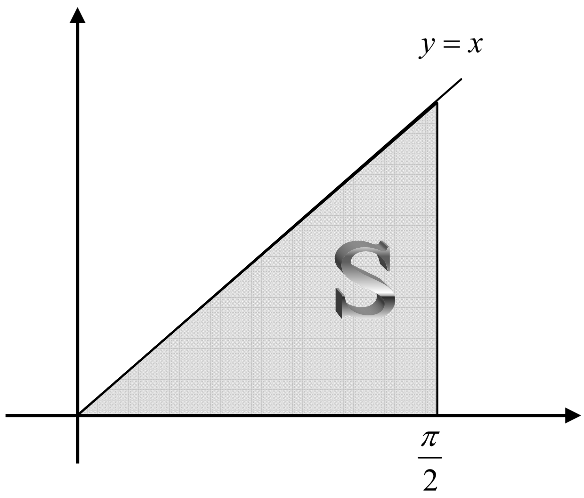
ג)

$$D=\int_0^2\left(\int_{-x^2+2x}^{\sqrt{4-x^2}} 1\cdot dy\right)dx=$$

$$=\int_0^2\left(\sqrt{4-x^2}+x^2-2x\right)dx=\underbrace{\int_0^2\sqrt{4-x^2}dx}_{\frac{1}{4}\text{ of the area of a circle}}+\int_0^2\left(x^2-2x\right)dx=\pi+\left(\frac{x^3}{3}-2\frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^2=\pi-\frac{4}{3}$$

(5)

$$S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} 0\le y\le x \\ 0\le x\le \frac{\pi}{2}\end{matrix}\right\}$$



חשבו: $I=\iint_S \frac{\sin x}{x+y}dxdy$

פתרון:

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^x \frac{\sin x}{x+y}dy\right)dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\left(\left(\ln|x+y|\right)\Big|_{y=0}^{y=x}\right)dx=$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\left(\ln 2\right)dx=\ln 2$$

אבל הפונקציה $f(x,y)=\frac{\sin x}{x+y}$ לא רציפה בתחום. למשל, כי על הישר $y=0$ מקבלים 1 בגבול בשאיפה ל-0 ואילו על $y=x$ מקבלים $\frac{1}{2}$. מסקנה: הפונקציה לא רציפה בראשית.

נצדיק שהפונקציה חסומה בתחום, ולכן החישוב בכל זאת תקף (כי יש רק נקודת אי-רציפות אחת).

$$\left|\frac{\sin x}{x+y}\right|\overset{?}{\le}M$$

$$|\sin x|\overset{?}{\le}M|x-y|$$

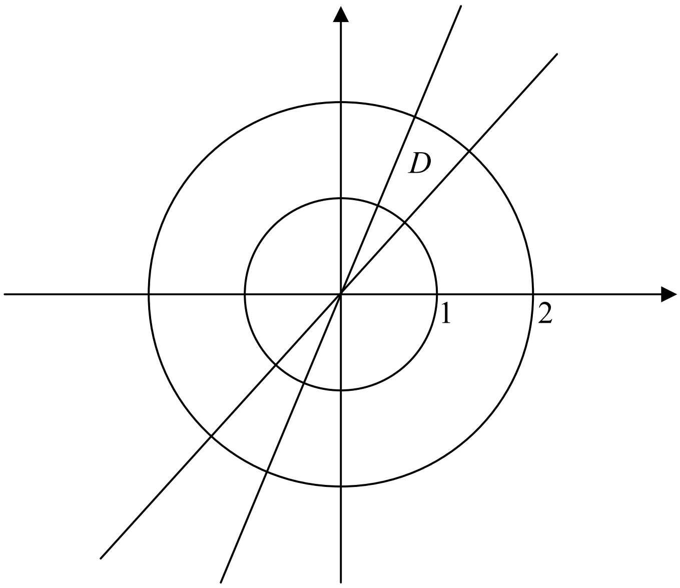
$$|\sin x|\le|x|\underset{\substack{\text{in}\\ \text{our}\\ \text{domain}}}{\le}|x+y|$$

מסקנה: חסומה על ידי $M=1$.

תרגול 24: אינטגרלים כפולים

(6) החלפת משתנים באינטגרל כפול

$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}dxdy$ כאשר D חסום בין המעגלים: $x^2+y^2=4, x^2+y^2=1$ והישרים: $y=\sqrt{3}x, y=x, x\geq 0$.



נבצע החלפת משתנים ל- r,θ.

$$\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{3} \quad ; \quad 1\leq r\leq 2$$

הערה: במישור r,θ התחום הוא מלבן!

$$\iint\limits_D \arctan\frac{y}{x}dxdy=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\int_1^2 \theta\cdot r\cdot dr\right)d\theta=$$

$$x=r\cos\theta$$

$$y=r\sin\theta$$

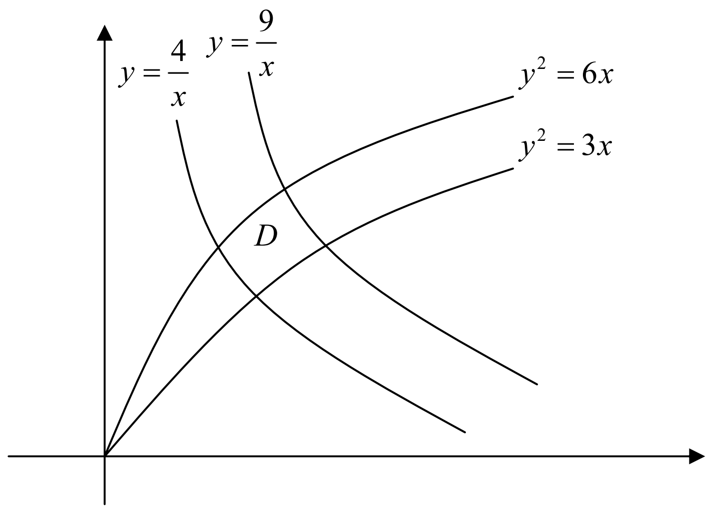
$$J=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial\theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial\theta}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r$$

$$=\left(\frac{\theta^2}{2}\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\right)\left(\frac{r^2}{2}\Bigg|_1^2\right)=\ldots=\frac{7\pi^2}{192}$$

נערך ע"י הדר בן-דוד

(7)

חשבו $\iint\limits_D \sqrt{xy}\,dxdy$ כאשר D חסום ע"י ההיפרבולות $y=\frac{9}{x}, y=\frac{4}{x}$ והפרבולות $y^2=6x, y^2=3x$.



נגדיר: $y^2=ux, y=\frac{v}{x}$ כי אז הפרבולות עוברות לישרים $u=3, u=6$
וההיפרבולות יעברו ל- $v=4, v=9$.

$$y=\frac{v}{x}\Rightarrow x=\frac{v}{y}\Rightarrow y^2=ux=\frac{uv}{y}\Rightarrow y^3=uv\Rightarrow y=\sqrt[3]{uv}$$

$$\Rightarrow x=\frac{v}{y}=\frac{v}{\sqrt[3]{uv}}$$

$$\Rightarrow\begin{cases} y=u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{1}{3}} \\ x=v^{\frac{2}{3}}u^{-\frac{1}{3}} \end{cases}$$

$$|J|=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|=\left\|\begin{matrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{matrix}\right\|=\left\|\begin{matrix}-\frac{1}{3}v^{\frac{2}{3}}u^{-\frac{4}{3}} & \frac{2}{3}v^{-\frac{1}{3}}u^{-\frac{1}{3}}\\ \frac{1}{3}v^{\frac{1}{3}}u^{-\frac{2}{3}} & \frac{1}{3}v^{-\frac{2}{3}}u^{\frac{1}{3}}\end{matrix}\right\|=$$

$$=\left|-\frac{1}{9}u^{-1}-\frac{2}{9}u^{-1}\right|=\left|-\frac{1}{3u}\right|=\frac{1}{3u}$$

כש u נע בין 3 ל-6 הוא לא מתאפס.

כעת נחשב את האינטגרל:

$$\iint\limits_D \sqrt{xy}\,dxdy=\int_4^9\left(\int_3^6\sqrt{v}\,\frac{1}{3u}\,du\right)dv=\int_4^9\left(\int_3^6\frac{\sqrt{v}}{3}\ln|u|\Big|_{u=3}^{u=6}\right)dv=\frac{\ln 2}{3}\left[\frac{2}{3}v^{\frac{3}{2}}\Big|_4^9\right]=\frac{38}{9}\ln 2$$

הערה:

$\widetilde{J}=\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$ של ההעתקה ההפוכה.

משפט:

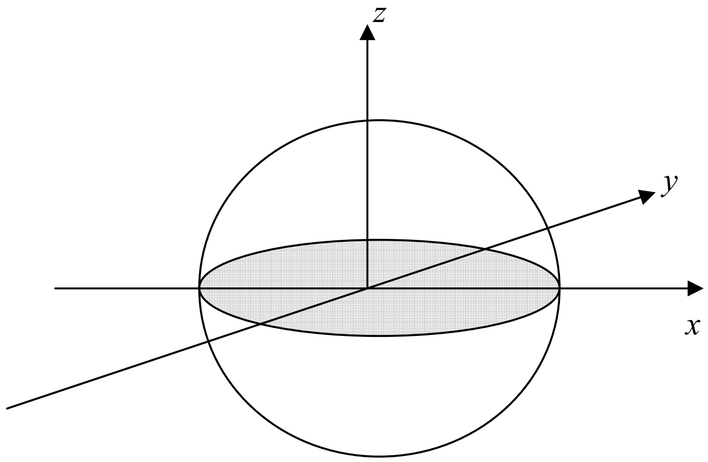
$J=\dfrac{1}{\widetilde{J}}$

(8)

חשבו נפח V של כדור ב-$\mathbb{R}^3$ שרדיוסו a.

פתרון:

כדור נתון ע"י: $x^2+y^2+z^2=a^2$



חצי הכדור העליון: $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ לכן, $\dfrac{V}{2}=\iint\limits_{circle}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\,dxdy$.

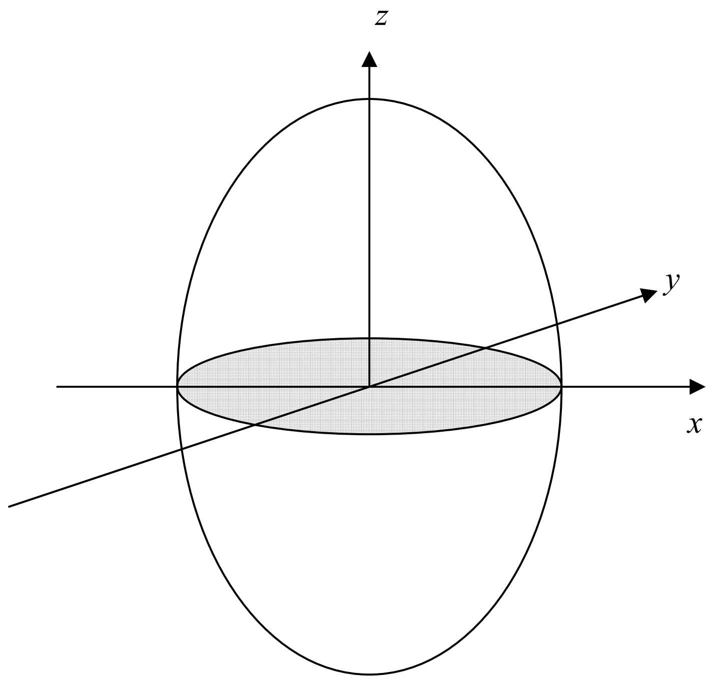
$$\Rightarrow \frac{V}{2}=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^a\sqrt{a^2-r^2}\cdot r\cdot dr\right)d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\left(a^2-r^2\right)^{\frac{3}{2}}\Bigg|_{r=0}^{r=a}\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1}{3}a^3d\theta=\frac{2\pi}{3}a^3$$

$$\Rightarrow V=\frac{4\pi}{3}a^3$$

(9)

חשבו נפח אליפסואיד הנתון ע"י $\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2=1$.



חצי האליפסואיד העליון: $z=c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}$.

$$\frac{V}{2}=\iint\limits_{ellipse} c\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2-\left(\frac{y}{b}\right)^2}\,dxdy$$

נבצע החלפת משתנים:

$$x=ar\cos\theta$$
$$y=br\cos\theta$$

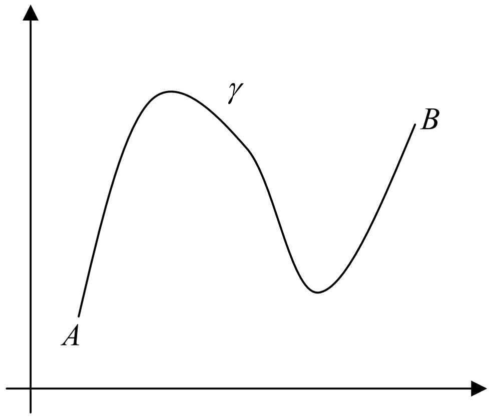
כאשר
$$0\le r\le 1$$
$$0\le\theta\le 2\pi$$

$$J=\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}=\begin{vmatrix} a\cos\theta & -ar\sin\theta \\ b\sin\theta & br\cos\theta \end{vmatrix}=abr$$

$$\Rightarrow \frac{V}{2}=\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 c\sqrt{1-r^2}\cdot abr\cdot dr\right)d\theta=\frac{2\pi}{3}abc$$

$$\Rightarrow V=\frac{4\pi}{3}abc$$

תרגול 25: אינטגרל קווי



γ עקום חלק במישור:

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad \text{גזירות ברציפות}, \quad a \le t \le b$$

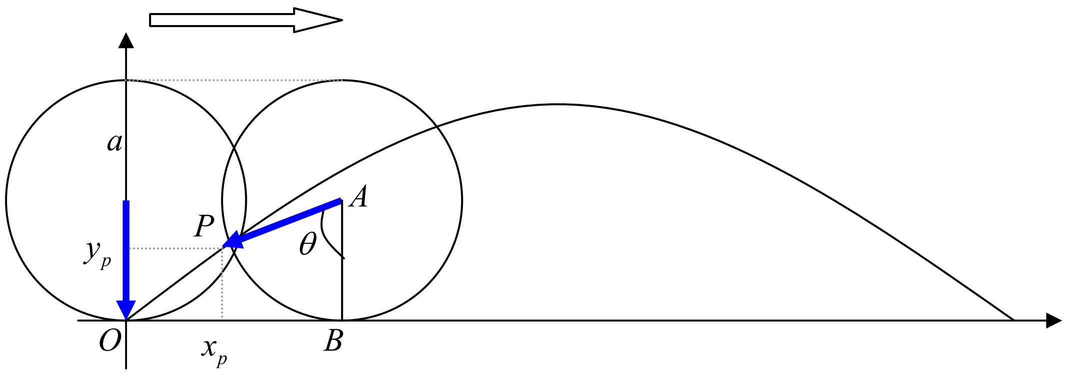
אורך העקום γ: $L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$.

(באופן כללי אם העקום הוא: $\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$ אזי $L = \int_a^b |r'(t)|dt$).

אם γ נתון בצורה מפורשת $y = f(x)$, $a \le x \le b$. אזי: $L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$.

(1)

$x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$ כאשר $0 \le t \le 2\pi$. חשבו את אורך העקום.



זוהי ***ציקלואידה***. הנקודה P על הציקלואידה $y_p = a - a\cos t$.

בנוסף: $x_p + a\sin t = \overleftrightarrow{OB} = \overset{\frown}{PB} = at \Leftarrow x_p = at - a\sin t$.

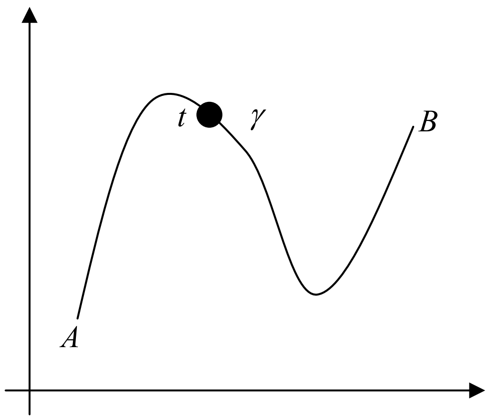
$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(1-\cos t)^2 + a^2\sin^2 t} \cdot dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2(2-2\cos t)} \cdot dt = \qquad \leftarrow \left(1\text{-}\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$= a\int_0^{2\pi} \sqrt{4\sin^2\frac{t}{2}} \cdot dt = a\int_0^{2\pi} 2\sin\frac{t}{2} \cdot dt =$$

$$= 2a\left(-2\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}\right) = -4a(-1-1) = 8a$$

~~~~~~



$s = s(t) = \int_a^t \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$ זהו אורך הקשת עד נקודה t .

אם $s = s(t)$ אזי $s'(t) = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ (מהמשפט היסודי).

$\Leftarrow$ הצגה פרמטרית $\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \end{cases}$.

$0 \le s \le L$

s נקרא פרמטר אורך הקשת.
~~~~~~

אינטגרל קווי מסוג ראשון

$f(x,y)$ פונקציה סקלרית $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ רציפה. γ עקום חלק. f על γ. $f=f(x(t),y(t))$.

$$\int_\gamma f\cdot ds=\int_a^b f(x(t),y(t))\underbrace{\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}}_{r'(t)}dt .$$

הערות

1) אם $f\equiv 1$ אזי נקבל את אורך העקום.
2) אם העקום נתון בצורה מפורשת ע"י $y=\varphi(x)$, אז:
$$\int_\gamma f\cdot ds=\int_a^b f(x,\varphi(x))\sqrt{1+\varphi'(x)^2}\,dx .$$
3) אם העקום נתון בהצגה פולארית $\theta,\rho(\theta)$ כלומר
$$x=\rho(\theta)\cos\theta$$
$$y=\rho(\theta)\sin\theta$$
$$a\le\theta\le b$$
אז

$$\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}=\sqrt{\left(\rho'(\theta)\cos\theta-\rho(\theta)\sin\theta\right)^2+\left(\rho'(\theta)\sin\theta+\rho\cos\theta\right)^2}=$$
$$=\sqrt{\rho'(\theta)^2+\rho(\theta)^2}$$
$$\Rightarrow\int_\gamma f\cdot ds=\int_a^b f(\rho(\theta)\cos\theta,\rho(\theta)\sin\theta)\sqrt{\left(\rho'(\theta)\right)^2+\left(\rho(\theta)\right)^2}\,d\theta$$

(2)

חשבו את $\int_\gamma (x^2+y^2+z^2)ds$ כאשר $\gamma = 2\cos t\cdot\hat{i} + 2\sin t\cdot\hat{j} + 1\cdot\hat{k}$, $0\le t\le 2\pi$.

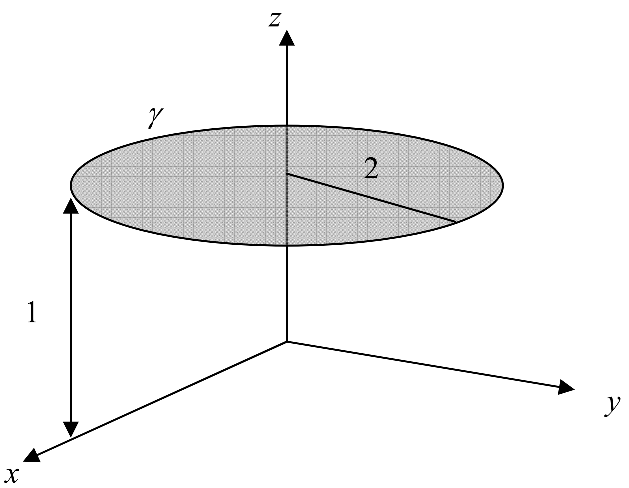
פתרון i

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2}$$

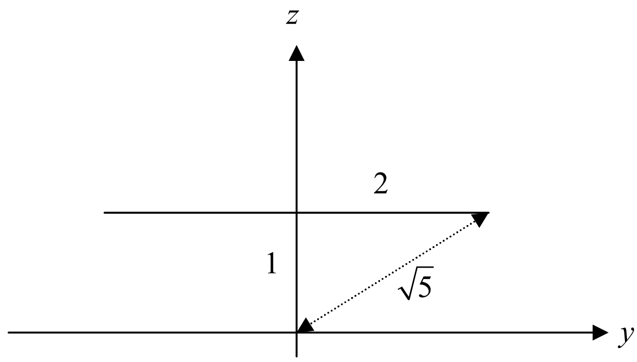
$$\Rightarrow \int_\gamma f\cdot ds = \int_0^{2\pi}\left((2\cos t)^2 + (2\sin t)^2 + 1^2\right)\cdot 2dt = 20\pi$$

פתרון ii

מבט תלת מימדי:



מבט מהצד (חתך):



- γ הוא מעגל ברדיוס 2 במישור $z=1$.
- f הנ"ל הוא ריבוע המרחק מהראשית.
- f היא קבועה על המעגל ושווה 5.

$$\int_\gamma f\cdot ds = 5\int_\gamma 1\cdot ds = 5\cdot \underbrace{4\pi}_{\substack{\text{length}\\ \text{of}\\ \gamma}} = 20\pi$$

(3)

חשבו $\int_{\gamma}(3x+4y+2z-2)ds$ כאשר γ זה קטע הישר המחבר בין $\begin{matrix} A(2,-5,5) \\ B(4,-3,6) \end{matrix}$.

<u>פתרון</u>

הצגה פרמטרית:

$$\begin{aligned}
&x = 2+(4-2)t = 2+2t \\
&y = -5+(-3+5)t = -5+2t \\
&z = 5+(6-5)t = 5+t \\
&0 \le t \le 1
\end{aligned}$$

$$|\gamma'(t)| = \sqrt{4+4+1} = 3$$

$$\int_{\gamma} f \cdot ds = \int_0^1 \left(3(2+2t)+4(-5+2t)+2(5+t)+2\right)3dt = \int_0^1 \left(48t-18\right)dt = \left(24t^2-18t\right)\Big|_0^1 = 6$$

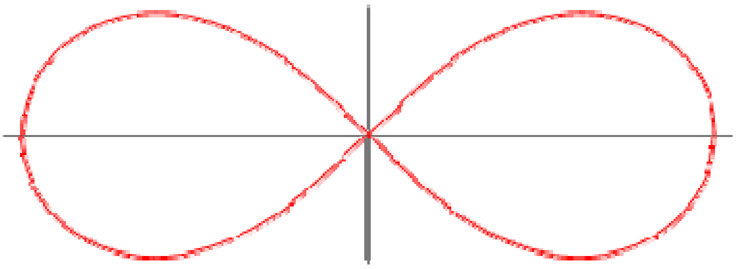
תרגול 26: אינטגרל קווי

(4) הלמניסקטה (lemniscate) של ברנולי

מצאו את מסת העקום $\left(x^2+y^2\right)^2=4(x^2-y^2)$, $x\geq 0$ בעל צפיפות מסה קווית $f(x,y)=x+y$.

<u>*פתרון*</u>

זוהי הלמניסקטה (lemniscate) של ברנולי.



$$m=\int_{\gamma} f(x,y)\cdot ds$$

העקום בהצגה פולארית:

$$\left(\rho^2\right)^2=4\rho^2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)$$
$$\Rightarrow \rho^2=4\cos 2\theta$$
$$\Rightarrow \rho=2\sqrt{\cos 2\theta}$$

מציאת גבולות θ:

$$x\geq 0\Rightarrow \cos\theta\geq 0\Rightarrow -\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$$

בנוסף $\cos 2\theta\geq 0\Rightarrow -\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$

חיתוך התנאים נותן: $-\frac{\pi}{4}\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}$

$$m=\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left(\underbrace{2\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta}_{x}+\underbrace{2\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta}_{y}\right)\cdot\sqrt{\underbrace{\left(2\sqrt{\cos 2\theta}\right)^2}_{\rho(\theta)}+\underbrace{\left(\frac{-\cancel{2}\sin 2\theta}{\cancel{2}\sqrt{\cos 2\theta}}\right)^2}_{\rho'(\theta)}}\cdot d\theta=$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cancel{\sqrt{\cos 2\theta}}\left(\cos\theta+\sin\theta\right)\cdot\frac{\sqrt{4\left(\cos 2\theta\right)^2+4\left(\sin 2\theta\right)^2}}{\cancel{\sqrt{\cos 2\theta}}}\cdot d\theta=$$

$$=4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}(\cos\theta+\sin\theta)d\theta=4\left[-\cos\theta+\sin\theta\right]\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=4\sqrt{2}$$

(5)

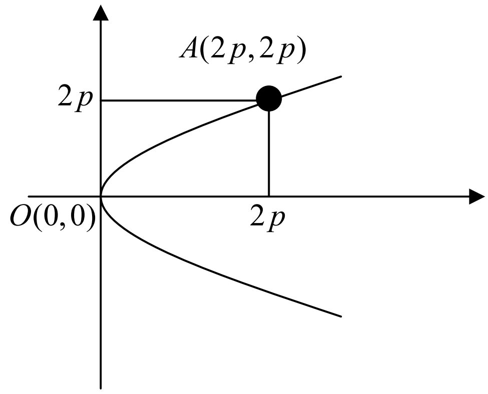
חשבו את $\int_\gamma y\cdot ds$ כאשר γ : $y^2=2px, p\geq 0$, מנקודה $O(0,0)$ ועד נקודה $A(2p,2p)$.

<u>פתרון</u>

<u>דרך א</u>

$y=\sqrt{2px}$

<u>דרך ב</u>



פרמטריזציה:

$$\begin{cases} x=\dfrac{t^2}{2p} \\ y=t \end{cases}$$
$$0\leq t\leq 2p$$

$$\int_\gamma y\cdot ds=\int_0^{2p} t\sqrt{\left(\frac{t}{p}\right)^2+1^2}\cdot dt=\frac{p^2}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}}{3}\cdot\left[\left(\frac{t^2}{p^2}+1\right)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{2p}=\frac{p^2}{3}(5^{\frac{3}{2}}-1)$$

אינטגרל קווי מסוג שני

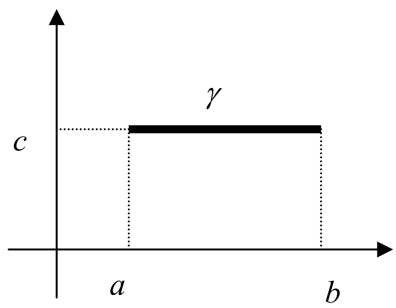
$\vec{F}$ שדה וקטורי. $\vec{F}(x,y)=P(x,y)\cdot\hat{i}+Q(x,y)\cdot\hat{j}$ כאשר P,Q גזירות ברציפות (הנגזרות החלקיות קיימות ורציפות).

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\gamma Pdx+Qdy=\int_a^b\Big[P\big(x(t),y(t)\big)\cdot x'(t)+Q\big(x(t),y(t)\big)\cdot y'(t)\Big]\cdot dt$$

אם העקום נתון בצורה מפורשת: $\int_a^b\Big[P\big(x,\varphi(x)\big)+Q\big(x,\varphi(x)\big)\cdot\varphi'(x)\Big]\cdot dx$

<u>הערה</u>: אם :

$\gamma=\{(x,c)\,|\,a\le x\le b\}$

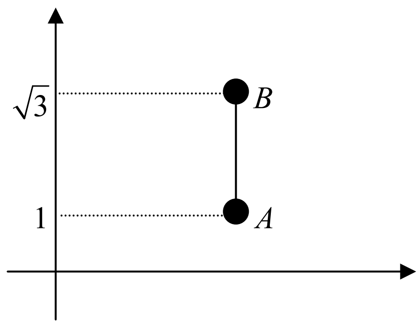


אז :

$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_a^b P(x,c)dx$ כי רכיב Q של השדה לא תורם: $\int_a^b Q(x,c)\underbrace{\frac{dy}{dx}}_{0}dx$.

(6)

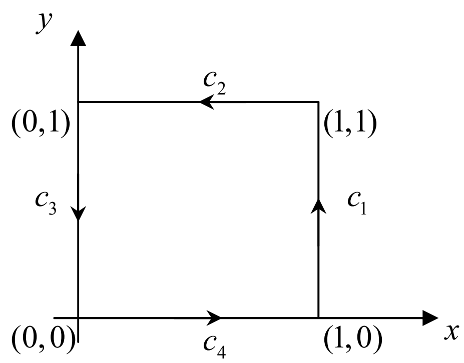
חשבו: $\int_\gamma \frac{y}{x^2+y^2}dx+\frac{x}{x^2+y^2}dy$ כאשר γ הוא הישר המחבר בין $A(1,1)$ ל- $B(1,\sqrt{3})$.



$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_1^{\sqrt{3}}\frac{1}{1+y^2}dy=\arctan y\Big|_1^{\sqrt{3}}=\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{12}$$

(7)

חשבו $\int_c xydx+(x^2+y^2)dy$ כאשר c הוא המסלול המופיע בגרף:



$$I=\int_0^1\left(1+y^2\right)dy+\int_1^0 xdx+\int_1^0 y^2dy+\int_0^1 0dx=\ldots=\frac{1}{2}$$

(8)

חשבו את $\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$, עבור :

$$\vec{F} = -y\cdot\hat{i} + x\cdot\hat{j}$$
$$\gamma = (\cos t + \sqrt{3}\sin t)\cdot\hat{i} + \left(2\cos t + 1\right)\cdot\hat{j}$$
$$0 \le t \le 2\pi$$

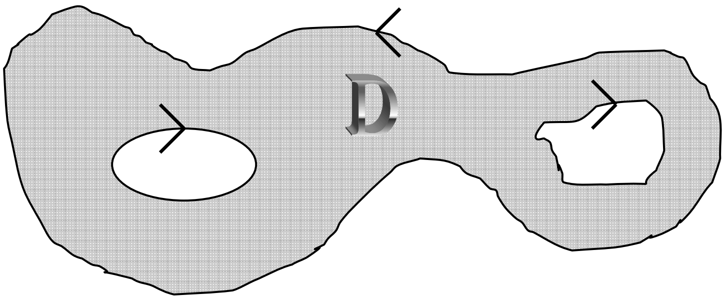
פתרון:

$$\vec{\gamma}'(t) = (-\sin t + \sqrt{3}\cos t)\cdot\hat{i} + 2(-2\sin t)\cdot\hat{j}$$
$$P = -\left(2\cos t + 1\right)$$
$$Q = \cos t + \sqrt{3}\sin t$$

$$\int_\gamma \vec{F}\cdot d\vec{r} = \int_0^{2\pi}\left[-\left(2\cos t + 1\right)(-\sin t + \sqrt{3}\cos t) + \left(\cos t + \sqrt{3}\sin t\right)\left(-2\sin t\right)\right]dt =$$
$$= \int_0^{2\pi}\left(-2\sqrt{3} + \sin t - \sqrt{3}\cos t\right)dt = -2\sqrt{3}(2\pi) = -4\sqrt{3}\pi$$

תרגול 27: משפט גרין

D תחום קשיר $\Gamma=\partial D$ (Γ היאה שפה של D) עם מגמה חיובית (אם הולכים על השפה התחום תמיד לשמאלנו).



$$\vec{F}(x,y)=P(x,y)\cdot\hat{i}+Q(x,y)\cdot\hat{j}\in C^1 \text{ onto } \overline{D}$$

אזי:

$$\oint_{\gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_{D}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)dxdy$$

(1)

נתון: $\vec{F}=(e^{x^2}-x^2y)\cdot\hat{i}+(xy^2-e^{y^2})\cdot\hat{j}$

חשבו $\int_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ כאשר Γ היא $x^2+y^2=R^2$ בכיוון החיובי.

<u>פתרון</u>

$$\begin{matrix} P=e^{x^2}-x^2y \\ Q=xy^2-e^{y^2} \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \dfrac{\partial P}{\partial y}=-x^2 \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x}=y^2 \end{matrix}$$

אזי לפי משפט גרין שתנאיו מתקיימים:

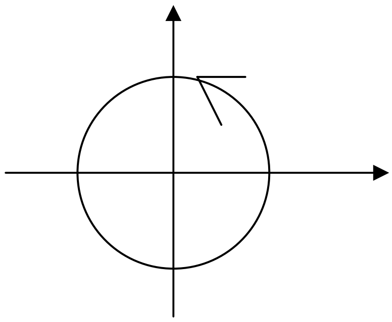
$$\Rightarrow \int_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_{x^2+y^2\le R^2}(x^2+y^2)dxdy=\int_0^{2\pi}\int_0^R\left(r^2\cdot\overbrace{r}^{Jacobian}\cdot dr\right)d\theta=\int_0^{2\pi}\left(\left.\frac{r^4}{4}\right|_0^R\right)d\theta=\frac{\pi R^4}{2}$$

(2)

נתון: $\vec{F}=\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\cdot\hat{i}+\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cdot\hat{j}$

חשבו $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ כאשר Γ היא $x^2+y^2=R^2$ בכיוון החיובי.

<u>פתרון</u>



תנאי משפט גרין **<u>לא</u>** מתקיימים בגלל שבנקודה $(0,0)$ הפונקציה לא רציפה, ובפרט לא מוגדרת.

<u>חישוב ישיר:</u>

פרמטריזציה של Γ:

$$R\cos\theta\cdot\hat{i}+R\sin\theta\cdot\hat{j}\quad,\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

$$\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_0^{2\pi}\left(\overbrace{\frac{-R\sin\theta}{R^2}}^{P}\cdot\overbrace{(-R\sin\theta)}^{x'(\theta)}+\overbrace{\frac{R\sin\theta}{R^2}}^{Q}\cdot\overbrace{(R\cos\theta)}^{y'(\theta)}\right)d\theta=\int_0^{2\pi}d\theta=2\pi$$

נשים לב (לו היינו משתמשים במשפט גרין בכל אופן היינו מקבלים תוצאה שגויה):

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\left(x^2+y^2\right)-x(2x)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{-\left(x^2+y^2\right)+y(2y)}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

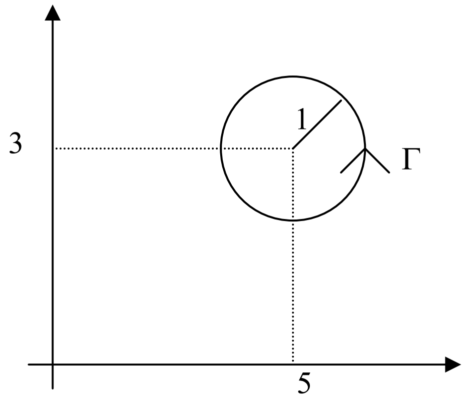
$$\Leftarrow\ \frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0 \text{ ולכן } \iint_\Gamma\underbrace{\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)}_{0}=0$$

אכן נוסחת גרין לא תקפה במקרה זה.

(3)

נתון: $\vec{F}=\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\cdot\hat{i}+\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cdot\hat{j}$

חשבו $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ כאשר Γ היא $(x-5)^2+(y-3)^2=1$ בכיוון החיובי.



<u>פתרון</u>

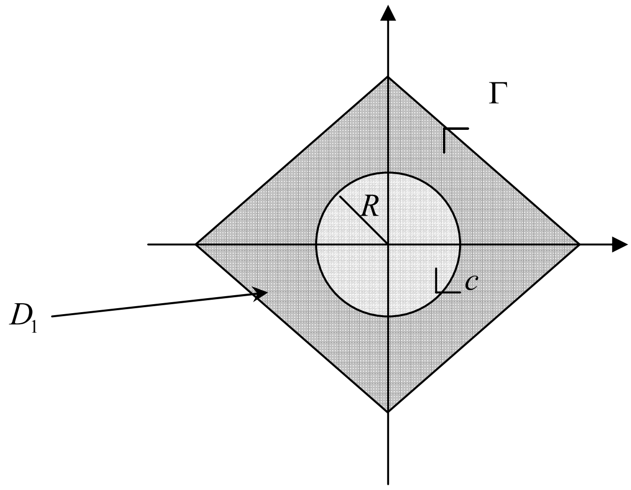
בתחום D (פנים המעגל) תנאי משפט גרין מתקיימים, לכן $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)=0$.

(4)

נתון: $\vec{F}=\left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\cdot\hat{i}+\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cdot\hat{j}$

חשבו $\int_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}$ כאשר Γ היא $|x|+|y|=100$ בכיוון החיובי.

<u>פתרון</u>



תנאי משפט גרין לא מתקיימים ב- D.

אבל בתחום D_1 מתקיימים $P,Q\in C^1$, לכן לפי משפט גרין:

$$\int_{\Gamma\cup c}\vec{F}\cdot d\vec{r}\underset{green}{=}\iint_D\left(\overbrace{\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}}^{\text{by the previous exercise}}\right)=0$$

$$\Rightarrow 0=\int_{\Gamma\cup c}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_\Gamma\vec{F}\cdot d\vec{r}+\int_c\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\Rightarrow \int_\Gamma\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\int_c\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_c\vec{F}\cdot d\vec{r}=2\pi$$

מתרגיל 2

בכיוון שלילי

c בכיוון החיובי

<u>תרגיל לבית</u>

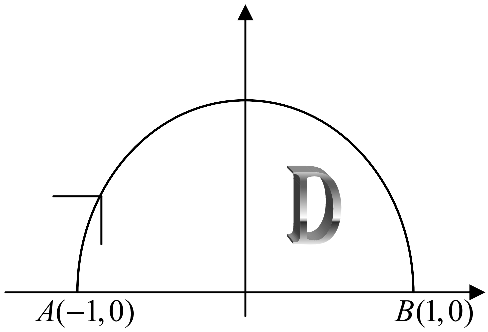
נתון השדה: $\vec{F}=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{-(y-y_o)\cdot\hat{i}+(x-x_o)\cdot\hat{j}}{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}\right)$

הוכיחו כי $\int_\Gamma\vec{F}\cdot d\vec{r}=1$ לכל מסלול סגור חלק סביב (x_0,y_0) בכיוון החיובי.

(5)

נתון: $\vec{F}=\left(\dfrac{2x(2-e^y)}{\left(1+x^2\right)^2}\right)\cdot\hat{i}+\left(\dfrac{e^y}{1+x^2}+3x\right)\cdot\hat{j}$

חשבו $\int\limits_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}$ כאשר Γ היא החלק העליון של המעגל $x^2+y^2=1$ מהנקודה $(-1,0)$ ל- $(1,0)$.



<u>***פתרון***</u>

$$\int\limits_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\limits_{\Gamma\cup BA}\vec{F}\cdot d\vec{r}-\int\limits_{BA}\vec{F}\cdot d\vec{r}$$

$$\int\limits_{\Gamma\cup BA}\vec{F}\cdot d\vec{r}\underbrace{=}_{green}-\iint\limits_{D}\left[\underbrace{\left(3-\frac{e^y\cdot 2x}{\left(1+x^2\right)^2}\right)}_{\frac{\partial Q}{\partial x}}+\underbrace{\left(\frac{2x\cdot e^y}{\left(1+x^2\right)^2}\right)}_{-\frac{\partial P}{\partial y}}\right]dxdy=-3\iint\limits_{D}dxdy=-3\frac{\pi}{2}$$

$$\int\limits_{BA}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\limits_{1}^{-1}\frac{2x(2-e^0)}{\left(1+x^2\right)^2}dx=-\frac{1}{1+x^2}\Bigg|_{1}^{-1}=0$$

$$\Rightarrow\int\limits_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int\limits_{\Gamma\cup BA}\vec{F}\cdot d\vec{r}-\int\limits_{BA}\vec{F}\cdot d\vec{r}=-\frac{3\pi}{2}$$

הערה:

אם $\Gamma=\partial D$ אז : $\iint_D dxdy = \text{area of D} = \frac{1}{2}\iint_D (\underbrace{1}_{\frac{\partial Q}{\partial x}} + \underbrace{1}_{\frac{\partial P}{\partial y}})dxdy \underbrace{=}_{green} \frac{1}{2}\int_\Gamma \underbrace{x}_{Q} dy - \underbrace{y}_{Q} dx$.

(6)

חשבו שטח אליפסה $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

פתרון

פרמטריזציה של האליפסה : $0\le t\le 2\pi \quad , \quad \Gamma = a\cos t\cdot\hat{i} + b\sin t\cdot\hat{j}$.

$\Leftarrow$

$$S=\frac{1}{2}\int_\Gamma xdy-ydx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\left[\underbrace{a\cos t}_{Q}\cdot\underbrace{b\cos t}_{y'(t)}+\underbrace{(-b\sin t)}_{P}\underbrace{(-a\sin t)}_{x'(t)}\right]dt=\pi ab$$

תרגול 28: משפט גרין, אי תלות של אינטגרל קווי במסלול

משפט 1

יהי $\vec{F}$ שדה וקטורי רציף על תחום D. אזי התנאים הבאים שקולים:

1) לכל מסלול סגור Γ ב-D מתקיים $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

2) האינטגרל $\int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ אינו תלוי במסלול המחבר את A ו-B.

3) $Pdx + Qdy$ דיפרנציאל מדויק, ו- $\int_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(B) - \phi(A)$

דיפרנציאל מדוייק

<u>הגדרה:</u>

אם קיימת פונקציה $\phi(x,y)$ פונקציה סקלרית כך ש: $\nabla\varphi = \vec{F}(x,y) = (P,Q)$ (גרדיאנט),

(כלומר $\frac{\partial\phi}{\partial y} = Q$ ו- $\frac{\partial\phi}{\partial x} = P$),

אזי ϕ כזו נקראת ***<u>פונקצית פונטנציאל</u>*** של $\vec{F}$ ו- $\vec{F}$ נקרא ***<u>שדה משמר.</u>***

משפט 2

אם $\vec{F} \in C^1$ ו- D פשוט קשר (ללא חורים) אזי $(1),(2),(3)$ ממשפט 1 שקולים גם ל:

$$(4) \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$$

<u>הערה:</u>

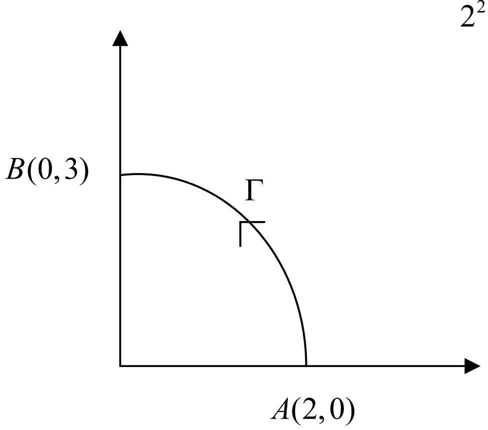
$\vec{F} = \left(\frac{-y}{x^2+y^2}\right)\cdot\hat{i} + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\cdot\hat{j}$. ראינו שמתקיים $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. לכן, אם Γ לא מקיף את הראשית אז לפי משפט 2 $\oint_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

(7)

חשבו $\int\limits_{\Gamma} 2xydx+(x^2+y^2)dy$ כאשר Γ הוא רבע אליפסה $9x^2+4y^2=36$ בין הנקודות $(2,0)$ ו-$(0,3)$.

<u>פתרון</u>

האליפסה בצורה קנונית: $\frac{x^2}{2^2}+\frac{y^2}{3^2}=36$



- התחום פשוט קשר (ניקח אותו כזה).
- $\vec{F}\in C^1$
-

$$P=2xy \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=2x$$

$$Q=x^2+y^2 \Rightarrow \frac{\partial Q}{\partial x}=2x$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2x$$

לכן משפט 2 מתקיים, ולפיו $Pdx=Qdy$ דיפרנציאל מדויק, ואם נמצא את ϕ אזי:
$\int\limits_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\phi(B)-\phi(A)$.

מציאת ϕ: יודעים ש: $\frac{\partial\phi}{\partial x}=P$, לכן נבצע $\int dx$ על P: $\int 2xy\cdot dx=\underbrace{x^2y+\psi(y)}_{\text{candidat for }\phi}$.

יודעים גם: $\frac{\partial\phi}{\partial y}=Q$. לכן נדרוש $\frac{\partial}{\partial y}\left(x^2y+\psi(y)\right)=x^2+y^2$.

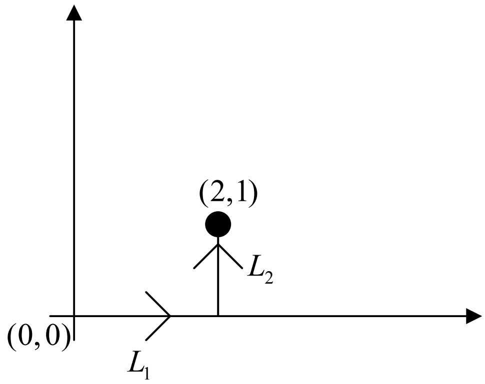
המשך הפתרון בעמוד הבא...

$$\Rightarrow x^2 + \psi'(y) = x^2 + y^2$$
$$\Rightarrow \psi'(y) = y^2$$
$$\Rightarrow \psi(y) = \frac{y^3}{3} + c$$
$$\Rightarrow \phi(x,y) = x^2 y + \frac{y^3}{3}$$
$$\Rightarrow \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(B) - \phi(A) = \phi(0,3) - \phi(2,0) = 9 - 0 = 9$$

(8)

חשבו $\int_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r}$ עבור $\vec{F}=\left(10x^4-2xy^3\right)\cdot\hat{i}+\left(-3x^2y^2\right)\cdot\hat{j}$ ו- γ נתון על ידי $x^4-6xy^3=4y^2$ מהנקודה $(0,0)$ לנקודה $(2,1)$.

<u>פתרון</u>



$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-6xy^2=\frac{\partial P}{\partial y}$$

(D בסדר, $\vec{F}\in C^1$).

$\Leftarrow$ האינטגרל לא תלוי במסלול.

$$\int_{\gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{L_1}+\int_{L_2}=\int_0^2 10x^4dx+\int_0^1 -12y^2dy=\frac{10x^5}{5}\bigg|_0^2+\frac{12y^3}{3}\bigg|_0^1=60$$

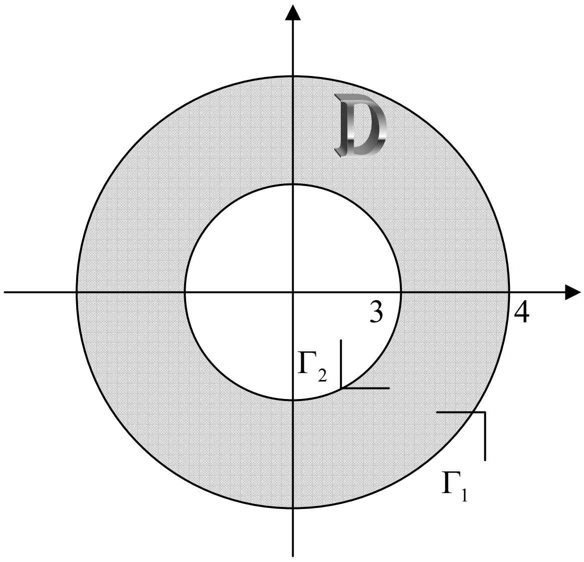
פתרון חלופי: לפי המשפט זהו דיפרנציאל מדויק. פונקצית הפוטנציאל: $\phi(x,y)=2x^5-x^2y^2$ ולכן $\int_{\Gamma}\vec{F}\cdot d\vec{r}=\phi(2,1)-\phi(0,0)=60$.

(9)

חשבו

$$\iint_D \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^4}\right)dxdy$$

$$D=\left\{(x,y)\middle|9\le x^2+y^2\le 16\right\}$$



<u>פתרון</u>

נגדיר $\vec{F}=\underbrace{0}_{P}\cdot\hat{i}+\underbrace{\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^4}}_{Q}\cdot\hat{j}$. אזי $F\in C^1$ על D (כי $(0,0)$ לא בתחום).

לפי גרין:

$$\iint_D\left(\frac{\partial P}{\partial x}-\frac{\partial Q}{\partial y}\right)=\oint_\Gamma \vec{F}\cdot d\vec{r}=\int_{\Gamma_1}\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^4}dy+\int_{\Gamma_2}\frac{x}{\left(x^2+y^2\right)^4}dy=$$

פרמטריזציה של Γ_1:	פרמטריזציה של Γ_2:
$x=4\cos\theta$ $y=4\sin\theta$ θ goes from 0 to 2π	$x=3\cos\theta$ $y=3\sin\theta$ θ goes from 2π to 0

$$=\int_0^{2\pi}\frac{4\cos\theta}{\left(4^2\right)^4}4\cos\theta d\theta+\int_{2\pi}^{0}\frac{3\cos\theta}{\left(3^2\right)^4}3\cos\theta d\theta=$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4^6}\cos^2\theta-\frac{1}{3^6}\cos^2\theta\right)d\theta=\left(\frac{1}{4^6}-\frac{1}{3^6}\right)\pi$$

להוכיח בבית

$$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta=\pi$$

תרגול 29: חזרה לבחינה

(1)

תהי f אינטגרבילית ב- $[0,1]$ הוכיחו שקיימת $0 \le \theta \le 1$ כך ש: $\int_{\theta}^{1} f(x)dx = \int_{0}^{\theta} f(x)dx$.

פתרון

f אינטגרבילית $\Leftarrow$ $F(t) = \int_{0}^{t} f(x)dx$ רציפה על $[0,1]$.

$F(0) = 0$

$F(1) = a$

סימון

לפי משפט ערך הביניים לפונקציות רציפות קיים θ כך ש: $F(\theta) = \frac{a}{2}$.

$\Leftarrow \int_{0}^{1} f(x)dx = a \quad , \quad \int_{0}^{\theta} f(x)dx = \frac{a}{2}$

$\Leftarrow$ מאדיטיביות האינטגרל $\int_{\theta}^{1} f(x)dx = \frac{a}{2}$ מש"ל.

(2)

פתרו את המשוואה:

$$\int_{\ln 2}^{x} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} = \frac{\pi}{6}$$

<u>פתרון</u>

$$\int_{\ln 2}^{x} \frac{dt}{\sqrt{e^t-1}} \underset{\substack{y=e^t \\ dy=e^t dt \\ \Rightarrow dt=\frac{dy}{y}}}{=} \int_{2}^{e^x} \frac{dy}{y\sqrt{y-1}} \underset{\substack{s=\sqrt{y-1} \\ s^2=y-1 \\ y=s^2+1 \\ \Rightarrow dy=2sds}}{=} \int_{1}^{\sqrt{e^x-1}} \frac{2sds}{(s^2+1)s} = 2\arctan(s)\Big|_1^{\sqrt{e^x-1}} = 2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right) - 2\arctan(1) =$$

$$= 2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right) - \frac{\pi}{2} \overset{!}{=} \frac{\pi}{6}$$

$$2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right) - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}$$

$$2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right) = \frac{2}{3}\pi$$

$$\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right) = \frac{1}{3}\pi$$

$$\left(\sqrt{e^x-1}\right) = \sqrt{3}$$

$$x = \ln 4$$

(3)

תהי $f:[-1,1]\to\mathbb{R}$ גזירה , $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$.

<u>הוכיחו</u>

א) $\sum f\left(\frac{1}{n^2}\right)$ מתכנס.

ב) $\sum f\left(\frac{1}{n}\right)$ מתבדר.

<u>פתרון</u>

א)

$$\lim_{n\to 0}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to 0}\frac{f\left(\frac{1}{n^2}\right)}{\frac{1}{n^2}}\underbrace{=}_{heine}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=c\underbrace{<}_{\text{WLOG}}0$$

כיוון ש: $\frac{a_n}{b_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}c<0$ ו- $b_n\to 0$ $\forall n$, מתקיים שהחל ממקום מסוים $a_n>0$. לכן לפי מבחן ההשוואה כיוון ש $\sum b_n=\sum\frac{1}{n^2}$ מתכנס, גם $\sum a_n=\sum f\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

ב)

לפי אותו פתרון, כיוון ש $\sum\frac{1}{n}$ מתבדר, גם $\sum f\left(\frac{1}{n}\right)$ מתבדר.

(4)

נתון: f_0 פונקציה אינטגרבילית ב-$[0,5]$. נגדיר $f_n(x)=\int\limits_0^x f_{n-1}(t)dt$.

הוכיחו:

(א) לכל n , $\left|f_n(x)\right|\le\frac{M\cdot x^n}{n!}$, כאשר $M=\sup\limits_{[0,5]}\left|f_n\right|$.

(ב) $f_n\to 0$ במ"ש ב$[0,5]$.

פתרון

(א)
הוכחה באינדוקציה על n.

- ***בסיס:***

$$\underline{n=0}$$

f_0 אינטגרבילית ובפרט חסומה. $\left|f_0\right|\le\frac{M\cdot x^n}{0!}$

$$\underline{n=1}$$

$$\left|f_1(x)\right|=\left|\int\limits_0^x f_0(t)dt\right|\le\int\limits_0^x f_0(t)dt\le\int\limits_0^x Mdt=M\int\limits_0^x dt=Mx$$

- ***צעד האינדוקציה:***

בהנחה שנכון עבור n, נוכיח עבור $n+1$.

$$\left|f_{n+1}(x)\right|=\left|\int\limits_0^x f_{n+1}(t)dt\right|\le\int\limits_0^x f_{n+1}(t)dt\underbrace{\le}_{\text{induction hypothesis}}\int\limits_0^x\frac{Mt^n}{n!}dt=\frac{Mx^{n+1}}{(n+1)n!}$$

מש"ל

(ב)
בהינתן $\varepsilon>0$ מחפשים N שהחל ממנו $\forall x$, $\left|f_n(x)-0\right|<\varepsilon$.

$$\left|f_n(x)-0\right|=\left|f_n(x)\right|\underbrace{\le}_{(\text{א})}\frac{M\cdot x^n}{n!}\le\frac{M\cdot 5^n}{n!}.$$

(אם נראה שהסדרה $a_n=\frac{M\cdot 5^n}{n!}$ שואפת ל-0, אזי החל ממקום מסוים קטן מ- ε. אפשר למשל לפי מבחן המנה לסדרות).

$\Leftarrow$ $f_n\to 0$ במ"ש.

(5)

$$f(x,y)=\begin{cases}\left(x^2+2y^2\right)\sin\dfrac{1}{x^2+2y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (0,0)\end{cases}$$

(א) האם ל f נגזרות חלקיות רציפות ב- $\mathbb{R}^2$?

(ב) הוכיחו כי f גזירה ב- $\mathbb{R}^2$.

פתרון

(א)

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=(2x)\sin\left(\frac{1}{x^2+2y^2}\right)+\left(x^2+2y^2\right)\cos\left(\frac{1}{x^2+2y^2}\right)\cdot\left(\frac{-2x}{\left(x^2+2y^2\right)^2}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=(4y)\sin\left(\frac{1}{x^2+2y^2}\right)+\left(x^2+2y^2\right)\cos\left(\frac{1}{x^2+2y^2}\right)\cdot\left(\frac{-4y}{\left(x^2+2y^2\right)^2}\right)$$

זה נכון בכל $(x,y)\neq(0,0)$ ובפרט :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)=2x\sin\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}\cos\frac{1}{x^2}$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)=4y\sin\frac{1}{2y^2}-\frac{2}{y}\cos\frac{1}{2y^2}$$

ולכן, $\frac{\partial f}{\partial x}$ (ובאופן דומה $\frac{\partial f}{\partial y}$) אינה חסומה בסביבת $(0,0)$, (כי ניקח למשל $x_n=\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$), ולכן בוודאי אינה רציפה ב $(0,0)$.

(ב)

בכל $(x,y)\neq(0,0)$ f גזירה (דיברנציאבילית) כי לפי (א) הנגזרות החלקיות רציפות.
נותר להוכיח גזירות ב $(0,0)$.

לכל $(x,y)\neq(0,0)$, $\left|\sin\frac{1}{x^2+2y^2}\right|\leq 1$, לכן $\forall x,y$, $|f(x,y)|\leq x^2+2y^2$ (*).

בפרט, $f(0,0)=0$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)}{h}\underbrace{=}_{\text{by }(*)}0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)}{h}\underbrace{=}_{\text{by }(*)}0$$

נציב $A=B=0$ בהגדרת הגזירות. נקבל :

$$f(x,y)-f(0,0)=\varepsilon(x,y)\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\varepsilon(x,y)=\frac{f(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\left|\varepsilon(x,y)\right|=\frac{\left|f(x,y)\right|}{\sqrt{x^2+y^2}}\underbrace{\leq}_{(*)}\frac{x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{2x^2+2y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq\frac{2(x^2+2y^2)}{\sqrt{x^2+y^2}}\leq 2\sqrt{x^2+y^2}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$$

$\Leftarrow$ f גזירה ב $(0,0)$ על פי הגדרה.

תרגול 30: חזרה לבחינה

(6)

חשבו $I(a)=\int_0^{\pi}\frac{\ln(1+a\cos x)}{\cos x}dx \quad , \quad |a|<1$

פתרון

נגדיר:

$$f(x,a)=\frac{\ln(a+a\cos x)}{\cos x}$$
$$\frac{\partial f}{\partial a}=\frac{1}{\cancel{\cos x}}\cdot\frac{1}{1+a\cos x}\cdot\cancel{\cos x}$$

לפי לייבניץ:

$$I'(a)=\int_0^{\pi}\frac{dx}{1+a\cos x}\underset{\begin{pmatrix} t=tg\frac{x}{2} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}\end{pmatrix}}{=}\int_0^{\infty}\frac{2dt}{1+t^2}\cdot\frac{1}{1+a\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)}=2\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+t^2+a(1-t^2)}=2\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+a+(1-a)t^2}=$$

$$=\frac{2}{1+a}\int_0^{\infty}\frac{dt}{1+\left(\frac{1-a}{1+a}\right)t^2}=\frac{2}{1+a}\cdot\left(\frac{1+a}{1-a}\right)\arctan\sqrt{\left(\frac{1-a}{1+a}\right)}\cdot t\Bigg|_{t=0}^{t=\infty}=\frac{2}{\sqrt{1-a^2}}\left(\frac{\pi}{2}-0\right)=\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}$$

לפיכך:

$$\Rightarrow I(a)=\int\frac{\pi}{\sqrt{1-a^2}}da=\pi\cdot\arcsin a+C$$

ב $a=0$: $\quad I(a)=0$ (לפי האינטגרל המקורי).

$$\Rightarrow I(0)=\pi\cdot\arcsin 0+C=0\Rightarrow C=0$$

צריך להצדיק את השימוש בלייבניץ. מחפשים מלבן $\underbrace{[s,t]}_{a\in}\times\underbrace{[0,\pi]}_{x\in}$ בו $f(x,a)$ מקיימת:

(1) לכל $a\in[s,t]$, $I(a)=\int_0^{\pi}f(x,a)dx$ מוגדר.

(2) $\frac{\partial f}{\partial a}$ רציפה במלבן. ✓

כדי שגם (1) יתקיים מספיק ש $f(x,a)$ תהיה רציפה כפונקציה של x, לכל a קבוע. אצלנו f לא מוגדרת ב- $\frac{\pi}{2}$. אבל:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x,a)=\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\ln(1+a_0\cos x)}{\cos x}\sim\frac{0}{0}\Rightarrow LOP$$

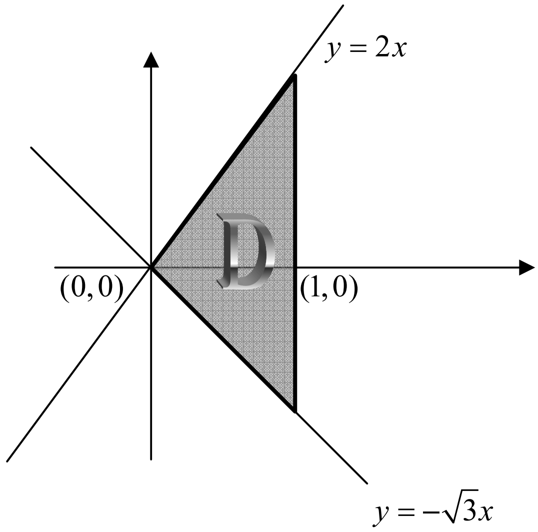
$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\frac{\frac{1}{1+a_0\cos x}-a_0\sin x}{-\sin x}=a_0$$

לכן אם נגדיר $\widetilde{f}=\begin{cases} f(x,a) & x\neq\frac{\pi}{2} \\ a & x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$ אזי $\widetilde{f}$ רציפה (ונבדלת מ- f בדיוק בנקודה אחת). אזי $\widetilde{f}$ אינטגרבילית. לכן, $I(a)=\int_0^\pi f(x,a)dx$ מוגדר היטב, והאינטגרל הזה לא שונה מהאינטגרל על f (כי הם שונים זה מזה בנקודה אחת בלבד). לכן, במלבן $[-1+\varepsilon,1-\varepsilon]\times[0,\pi]$ יש לייבניץ.

(7)

חשבו $\iint\limits_D \sqrt{4x^2-y^2}\,dxdy$ כאשר $D=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le 1,-\sqrt{3}\le y\le 2x\right\}$.

<u>***פתרון***</u>



זהו תחום פשוט, לכן $I=\int\limits_0^1\left(\int\limits_{-\sqrt{3}}^{2x}\sqrt{4x^2-y^2}\,dy\right)dx$.

תרגיל עזר: נחשב:

$$J=\int\sqrt{a^2-y^2}\,dy \underset{\begin{pmatrix} u=\sqrt{a^2-y^2} & v'=1 \\ u'=\frac{-2y}{2\sqrt{a^2-y^2}} & v=y \end{pmatrix}}{=} y\sqrt{a^2-y^2}+\int\frac{y^2}{\sqrt{a^2-y^2}}dy=y\sqrt{a^2-y^2}-J+\int\frac{a^2}{\sqrt{a^2-y^2}}dy$$

$$\Rightarrow J=\frac{1}{2}\left(y\sqrt{a^2-y^2}+a^2\arcsin\left(\frac{y}{a}\right)\right)+C$$

נחזור לתרגיל המקורי:

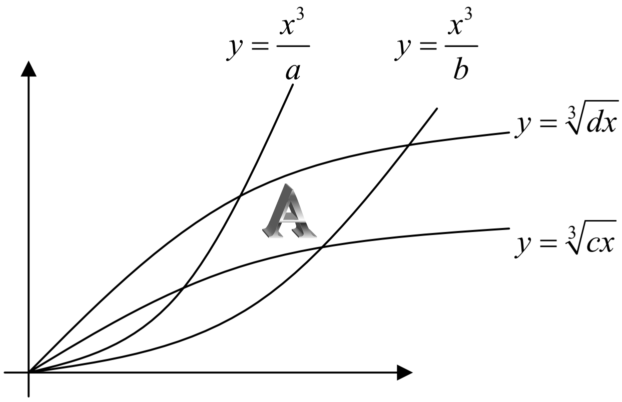
$$I=\int\limits_0^1\left(\int\limits_{-\sqrt{3}}^{2x}\sqrt{4x^2-y^2}\,dy\right)dx=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{2}\left[y\sqrt{4x^2-y^2}+4x^2\arcsin\left(\frac{y}{2x}\right)\right]\Bigg|_{y=\sqrt{3}x}^{y=2x}\right)dx=$$

$$=\int\limits_0^1\left(\frac{1}{2}4x^2\underbrace{\arcsin 1}_{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\left[-\sqrt{3}x\cdot x+4x^2\underbrace{\arcsin\frac{-\sqrt{3}}{2}}_{-\frac{\pi}{3}}\right]\right)dx=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}$$

(8)

חשבו את שטח הקבוצה A :

$$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, x>0 \ , \ y>0 \ , \ \begin{matrix} ay\le x^3\le by \\ cx\le y^3\le dx \end{matrix} \ , \ \begin{matrix} 0<a<b \\ 0<c<d \end{matrix}\right\}$$



נגדיר :

$$\begin{matrix} y=\frac{x^3}{u} & & y=\sqrt[3]{vx} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ u=\frac{x^3}{y} & & u=\frac{x^3}{x} \end{matrix}$$

מחפשים את $|J|$:

(כדאי לפי $\frac{1}{|J^{-1}|}$ (משפט)).

יוצא $|J|=\frac{1}{8\sqrt{uv}}$ ואז השטח המבוקש הוא: $\int_a^b\int_c^d\frac{1}{8\sqrt{uv}}dudv$.

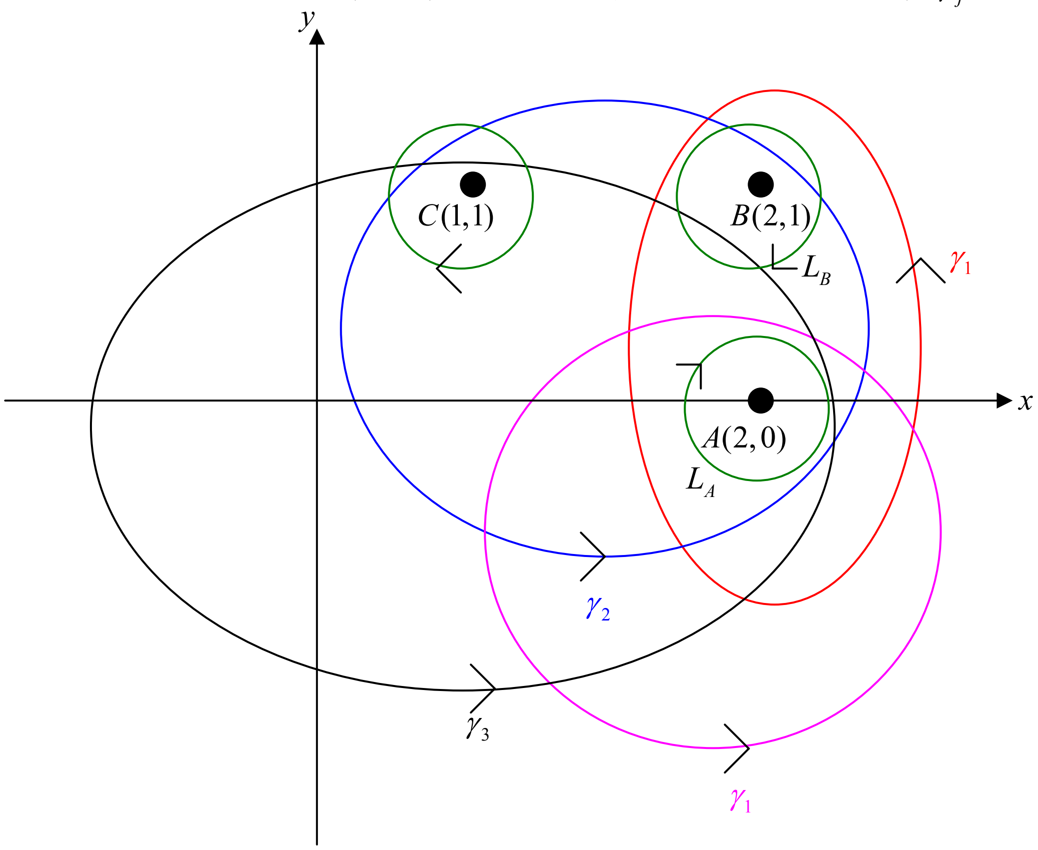
(9)

תהי $\widehat{F}=(P,Q)$ גזירה ברציפות בתחום: $\mathbb{R}^2 \setminus \{(2,0),(1,1),(2,1)\}$. נתון גם ש- $\vec{F}$ שדה משמר בכל מסלול סגור שלא מכיל את 3 הנקודות הנ"ל. נסמן:

$$I_j = \oint_{\gamma_j} Pdx + Qdy$$

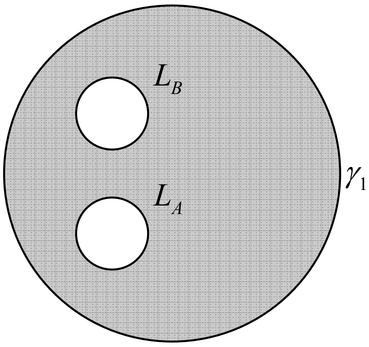
$$(j=1,2,3,4)$$

כאשר γ_j הן המסילות המופיעות בציור, מכוונות נגד כיוון השעון.



הוכיחו: $I_1+I_3=I_2+I_4$

<u>פתרון</u>



$$J_1 = \oint_{\gamma_1 \cup L_A \cup L_B} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$J_2 = \oint_{\gamma_2 \cup L_A \cup L_B \cup L_C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$J_3 = \oint_{\gamma_3 \cup L_A \cup L_C} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$J_4 = \oint_{\gamma_4 \cup L_A} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$$

$$\Rightarrow$$

$$I_1 + I_3 = \cancel{J_1} - \oint_{L_A} - \oint_{L_B} + \cancel{J_3} - \oint_{L_A} - \oint_{L_C}$$

$$I_2 + I_4 = \cancel{J_2} - \oint_{L_A} - \oint_{L_B} - \oint_{L_C} + \cancel{J_4} - \oint_{L_A}$$

$$\Rightarrow I_1 + I_3 = I_2 + I_4$$

נספחים: דפי עזר להרצאה

חדו"א 1מ' - אביב תשס"א - דף עזר בנושא סדרות

הגדרת הגבול:
תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נאמר כי $L \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_n$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N = N(\varepsilon)$ טבעי, כך שאם $N < n$ אז $|a_n - L| < \varepsilon$.

משפטים:

1. סדרה מתכנסת $\Longleftarrow$ חסומה
2. סדרה מונוטונית וחסומה $\Longleftarrow$ מתכנסת
3. אם סדרה מתכנסת לגבול, אז הוא יחיד.
4. אם $a_n \longrightarrow a$ ו- $b_n \longrightarrow b$, אז:
   (א) $a_n + b_n \longrightarrow a + b$
   (ב) $a_n b_n \longrightarrow ab$
   (ג) $\dfrac{a_n}{b_n} \longrightarrow \dfrac{a}{b} \quad (b \neq 0)$
5. אם $a_n \longrightarrow 0$, ו- $\{b_n\}$ חסומה, אז $a_n b_n \longrightarrow 0$.
6. אם $a_n \longrightarrow L$, $b_n \longrightarrow L$ ו- $\forall n \;\; a_n \le c_n \le b_n$, אז $c_n \longrightarrow L$ ('כלל הסנדביץ').
7. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 \quad (a > 0)$
8. $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$
9. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$, $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n = e^x$
10. אם $\forall n \;\; a_n > 0$, ומתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_{n+1}}{a_n} = L$, אז $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

חדו"א 1מ' - אביב תשס"א - דף עזר 2 בנושא סדרות

משפטים:

1. תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה המקיימת $a_n \neq 0 \quad \forall$, ו- $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.
   אזי $\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n} = e$.
2. אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מתכנסת, אז כל תת-סדרה שלה מתכנסת, ולאותו גבול.
3. אם לסדרה יש גבול חלקי יחיד, אז היא מתכנסת אליו.
4. <u>בולצנו-ויירשטראס</u>: לכל סדרה חסומה יש תת-סדרה מתכנסת.
5. תהי $\{a_n\}$ סדרה. אזי:
   L הוא גבול חלקי $\Longleftrightarrow$ בכל ε-סביבה של L יש ∞ מאברי הסדרה.
6. תהי $\{a_n\}$ סדרה חסומה. אזי:
   $\{a_n\}$ מתכנסת $\Longleftrightarrow$ $\overline{\lim}\, a_n = \underline{\lim}\, a_n$.
7. <u>קריטריון קושי</u>: $\{a_n\}$ מתכנסת (במובן הצר) $\Longleftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ קיים N כך שאם $m, n > N$ אז $|a_m - a_n| < \varepsilon$.
8. <u>מבחן השורש</u>:
   תהי $\{a_n\}$ סדרה חיובית המקיימת $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$. אזי:
   $$q < 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
   $$q > 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$
9. <u>מבחן המנה</u>:
   תהי $\{a_n\}$ סדרה חיובית המקיימת $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q$. אזי:
   $$q < 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$
   $$q > 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

חדו"א 1מ' - אביב תשס"א - דף עזר בנושא פונקציות

<u>מושגים</u>: פונקציה, תחום, טווח, מקור, תמונה, זוגית/אי-זוגית, גרף, מחזורית, הרכבה, חח"ע, על, הפיכה, מונוטונית/עולה/יורדת, אלמנטרית.

<u>משפט</u>: f הפיכה $\Longleftrightarrow$ f חח"ע ועל.

<u>הגדרות</u>: $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת הנקודה $x = a$ (פרט אולי לנקודה a עצמה).

1) נאמר ש- $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $0 < |x-a| < \delta$ אז $|f(x)-L| < \varepsilon$.

2) (שקול ל- (1)) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ אם לכל סדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ שמתכנסת ל- a ומקיימת $x_n \neq a \ \ \forall n$, מתקיים שהסדרה $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-L.

<u>הגדרות נוספות</u>:

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ וכו'; גבולות חד–צדדיים.

<u>משפטים</u>:

1) אם קיים הגבול $\lim f(x)$ אז הוא יחיד.

2) אם קיים $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$ ו–f מוגדרת ב–a, אז f חסומה בסביבת a.

3) הגבול $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ קיים $\Longleftrightarrow$ 2 הגבולות החד–צדדיים קיימים ושוים.

4) כללי חשבון של גבולות.

5) כלל <u>הסנדביץ'</u>: אם בסביבת $x = a$ (פרט אולי ל–a עצמה) מתקיים $f(x) \le g(x) \le h(x)$ וקיימים $L = \lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x)$ אז גם קיים $L = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

6) אם $f(x)$ חסומה בסביבת $x = a$ ו– $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ אז $\lim\limits_{x\to a} f(x)g(x) = 0$.

7) גבולות שימושיים: $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim\limits_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$.

8) אם $f(x)$ פונקציה אלמנטרית המוגדרת בנקודה $x = x_0$ אז $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

9) קריטריון <u>קושי</u>: הגבול $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ קיים וסופי $\Longleftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שאם $0 < |x-a| < \delta$ ו– $0 < |y-a| < \delta$ אז $|f(y)-f(x)| < \varepsilon$.

חדו״א 1מ׳ - אביב תשס״א - דף עזר בנושא פונקציות רציפות

הגדרה:

פונקציה f תיקרא רציפה בנקודה a אם $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

הגדרה שקולה:

פונקציה f תיקרא רציפה בנקודה a אם לכל $0 < \varepsilon$ קיים $0 < \delta$ כך שאם $|x-a| < \delta$ אז $|f(x)-f(a)| < \varepsilon$.

סוגי נקודות אי-רציפות:

א) סליקה: הגבול $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ קיים, אך שונה מ- $f(a)$.

ב) סוג I: הגבולות $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ו- $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ קיימים וסופיים, אך אינם שווים.

ג) סוג II: אחד הגבולות החד-צדדיים לפחות אינו קיים וסופי.

משפטים:

1) אם f, g רציפות ב-a, אז גם $f+g$, fg, $\dfrac{f}{g}$ (בתנאי ש $g(a) \neq 0$).

2) אם g רציפה ב-a ו-f רציפה ב-$g(a)$, אז $f \circ g$ רציפה ב-a.

3) פונקציה אלמנטרית רציפה בתחום הגדרתה.

מושגים:

רציפות מימין, רציפות משמאל, רציפות בקטע פתוח/סגור.

משפטים:

4) אם f רציפה בקטע סגור $[a,b]$ ול- $f(a)$ ו- $f(b)$ סימנים מנוגדים, אז קיים $x \in [a,b]$ כך ש- $f(x) = 0$.

5) אם f רציפה ב- $[a,b]$, אז לכל ערך y בין $f(a)$ ו- $f(b)$ קיים $x \in [a,b]$ כך ש- $f(x) = y$.

6) אם f רציפה ב- $[a,b]$, אז f חסומה שם.

7) אם f רציפה ב- $[a,b]$, אז f מקבלת שם מינימום ומקסימום.

8) אם $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ מונוטונית, אז f רציפה $\Longleftrightarrow$ התמונה של f היא קטע סגור.

9) אם $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה ומונוטונית ממש, אז f הפיכה ו- f^{-1} רציפה ומונוטונית.

10) אם $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ רציפה והפיכה, אז היא מונוטונית ממש.

חדו"א 1מ' - אביב תשס"א - דף עזר בנושא נגזרות

<u>הגדרה</u>: תהי f מוגדרת בסביבת x_0. אם הגבול $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = L$ קיים וסופי, נאמר כי f גזירה ב-x_0. נסמן $L = f'(x_0)$.

<u>הגדרה שקולה</u>: $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$.

<u>כללי גזירה</u>: f, g גזירות ב-x_0.

1. $(f\pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0)$ (נגזרת של סכום)
2. $(cf)'(x_0) = c\cdot f'(x_0) \quad c\in\mathbb{R}$
3. $fg' = f'g + g'f$ (נגזרת של מכפלה)
4. $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g-g'f}{g^2} \quad g(x_0)\neq 0$ (נגזרת של מנה)

<u>משפטים</u>:

5. f גזירה ב-x_0 $\Leftarrow$ f רציפה ב-x_0
6. <u>כלל השרשרת</u>: אם f גזירה ב-x_0 ו-g גזירה ב-$y_0 = f(x_0)$ אז

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(y_0)\cdot \underbrace{f'(x_0)}_{\text{"הנגזרת הפנימית"}}$$

7. תהי f רציפה וחח"ע בסביבת x_0, גזירה ב-x_0, ו- $f'(x_0)\neq 0$. אזי:

   (א) קיימת ל-f בסביבת x_0 פונקציה הפוכה g, המוגדרת בסביבת $y_0 = f(x_0)$.

   (ב) g גזירה ב-y_0, ו- $g'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

<u>נגזרות מסדר גבוה</u>: אם f, g גזירות n פעמים אז:

8. $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)}$
9. $(cf)^{(n)} = c\cdot f^{(n)}$
10. לייבניץ: $(fg)^{(n)} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$

חדו"א 1מ' - אביב תשס"א - נגזרות אלמנטריות

הנגזרת	הפונקציה
0	c
$\alpha x^{\alpha-1}$	x^α
$\cos x$	$\sin x$
$-\sin x$	$\cos x$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathrm{tg} x$
$\frac{-1}{\sin^2 x}$	$\mathrm{ctg} x$
e^x	e^x
$a^x \ln a$	a^x
$\frac{1}{x}$	$\ln x$
$\frac{1}{x \ln a}$	$\log_a x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos x$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arctg} x$
$-\frac{1}{1+x^2}$	$\mathrm{arcctg} x$
$\cosh x$	$\sinh x$
$\sinh x$	$\cosh x$

חדו"א 1מ' - אביב תשס"א - דף עזר II בנושא נגזרות

משפטים:

1. $(Fermat)$ תהי f מוגדרת ב-(a,b), ותהי x_0 נקודת מקסימום או מינימום, בה f גזירה. אזי $f'(x_0)=0$.
2. $(Rolle)$ תהי f רציפה על $[a,b]$, גזירה ב-(a,b), ומקיימת $f(a)=f(b)$. אזי קיים $x_0\in(a,b)$ כך ש- $f'(x_0)=0$.
3. $(Lagrange)$ תהי f רציפה על $[a,b]$ וגזירה ב-(a,b). אזי קיים $x_0\in(a,b)$ כך ש- $f'(x_0)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.
4. $(Cauchy)$ יהיו f, g רציפות ב-$[a,b]$, גזירות ב-(a,b), ו- $g'(x)\neq 0$ לכל $x\in(a,b)$. אזי $g(a)\neq g(b)$, וקיימת נק' $x_0\in(a,b)$ כך ש- $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.
5. $(Darboux)$ תהי f גזירה ב-$[a,b]$ (בנקודות הקצה קיימות $f'_+(a)$, $f'_-(b)$), ויהי $f'_+(a)<c<f'_-(b)$. אזי קיים $x_0\in(a,b)$ כך ש- $f'(x_0)=c$.
6. $f'(x)=0$ לכל x בקטע $\Leftarrow$ f קבועה בקטע.
7. $f'(x)=g'(x)$ לכל x בקטע $\Leftarrow$ קיים c כך ש- $f(x)=g(x)+c$.
8. $f'(x)>0$ לכל x בקטע $\Leftarrow$ f מונוטונית עולה.

   $f'(x)>0$ לכל x בקטע $\Leftarrow$ f מונוטונית יורדת.
9. תהי f רציפה ב- (a,b), גזירה ב- $(a,b)/\{c\}$, וקיים $\lim\limits_{x\to c}f'(x)$, $a<c<b$. אזי f גזירה ב- c וגם $f'(c)=\lim\limits_{x\to c}f'(x)$.

כלל לופיטל

א) המקרה $\frac{0}{0}$, $x\to a$: אם $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ וקיים $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$, אזי $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

ב) המקרה $\frac{0}{0}$, $x\to\infty$: אם $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$ וקיים $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$, אזי $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

ג) המקרה $\frac{\infty}{\infty}$, $x\to a$: אם $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ וקיים $\lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$, אזי $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

ד) המקרה $\frac{\infty}{\infty}$, $x\to\infty$: אם $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$ וקיים $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=L$, אזי $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=L$.

חדו"א 1מ' - אביב תשס"א - דף עזר בנושא משפט טיילור

<u>משפט:</u>
תהי f פונקציה גזירה $n+1$ פעמים בסיבת נקודה a, ותהי x נקודה כלשהי בסביבה זו. אזי קיימת נקודה c בין a ל- x כך ש-

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x)$$

כאשר $R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$ השארית (בצורת לגרנז').

<u>פיתוחי טיילור שימושיים:</u>

1. $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x)$
2. $\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+2}(x)$
3. $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n+1}(x)$
4. $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} + R_{n+1}(x)$
5. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^n + R_{n+1}(x)$
6. $\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+2}(x)$
7. $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{x^5}{5} + \ldots$
   $\ldots + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 2 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + R_{2n+2}(x)$

<u>הערה:</u> סעיפים 1 עד 3 נכונים לכל x.
סעיפים 4 עד 7 מתייחסים רק ל- $|x| < 1$.

חדו"א 1מ' - אביב תשס"א - דף עזר בנושא אינטגרלים מסוימים

<u>מושגים</u>: $*$ סכומי דרבו, סכומי רימן, פרמטר חלוקה, עידון

<u>כללים</u>:

א) $\int_a^a f(x)dx = 0$

ב) $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

ג) (אדיטיביות) $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

ד) $f(x) \geq 0 \Longrightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

ה) $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$

ו) $g \leq f \Longrightarrow \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)dx$

ז) $m \leq f(x) \leq M \Longrightarrow m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a)$

ח) (לינאריות) $\int_a^b cf = c\int_a^b f \quad , \int_a^b f+g = \int_a^b f + \int_a^b g$

<u>משפטים</u>:

1. f מונוטונית $\Longleftarrow$ f אינטגרבילית.
2. f רציפה $\Longleftarrow$ f אינטגרבילית.
3. f רציפה פרט למספר נקודות סופי (ו- f חסומה) $\Longleftarrow$ f אינטגרבילית.

*4. f אינטגרבילית $\Longleftrightarrow$ קבוצת נקודות אי הרציפות של f היא ממידה 0.

5. שינוי f במספר סופי של נקודות אינו משנה את האינטגרביליות (ואת ערך האינטגרל).
6. f אינטגרבילית על $[a,b]$ $\Longleftarrow$ f אינטגרבילית על כל $[a,b] \supseteq [c,d]$.
7. f,g אינטגרביליות $\Longleftarrow$ fg אינטגרבילית.
8. f אינטגרבילית $\Longleftarrow$ $|f|$ אינטגרבילית.
9. (<u>ערך הביניים</u>) f רציפה $\Longleftarrow$ קיימת $c \in [a,b]$ כך ש-

$$\int_a^b f(x)dx = (b-a)\cdot f(c)$$

10. f אינטגרבילית $\Longleftarrow$ $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ רציפה.

11. (המשפט היסודי) f רציפה $\Longleftarrow$ $F(x)=\int\limits_a^x f(t)dt$ גזירה ו- $F'(x)=f(x)$.

12. (נוסחת ניוטון) אם F פונקציה קדומה של f, אזי $\int\limits_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

13. (אינטגרציה בחלקים) אם u,v גזירות עם נגזרות אינטגרביליות, אזי:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b u'(x)v(x)dx$$

14. (שיטת ההצבה) אם f רציפה ב- $[a,b]$, $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ על, גזירה, φ' אינטגרבילית ו- $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, אזי:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

15. אינטגרל של פונקציה אינטגרבילית אי זוגית בתחום סימטרי הוא 0.

16. (אי שוויון קושי-שוורץ) אם f,g אינטגרביליות, אזי:

$$\int_a^b |f(x)g(x)|dx\le\left(\int_a^b |f(x)|^2dx\right)^{1/2}\cdot\left(\int_a^b |g(x)|^2dx\right)^{1/2}$$

17. אם f רציפה ו- $g\ge 0$ אינטגרבילית, אזי קיים $c\in[a,b]$ כך ש- $\int\limits_a^b fg=f(c)\int\limits_a^b g$.

18. אם f מונוטונית וגזירה, f' אינטגרבילית, ו-g אינטגרבילית, אזי קיים $c\in[a,b]$ כך ש- $\int\limits_a^b fg=f(a)\int\limits_a^c g+f(b)\int\limits_c^b g$.

נוסחאות:

אורך קשת: $L=\int\limits_a^b \left(x'(t)^2+y'(t)^2\right)^{1/2}dt$

$L=\int\limits_a^b (1+y'(x)^2)^{1/2}dx$

נפח גוף סיבוב: $v=\pi\int\limits_a^b f^2(x)dx$

חדו"א 1מ' - אביב תשס"א - דף עזר בנושא האינטגרל הלא-מסוים

אינטגרלים מיידיים:

$$\int x^\alpha\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+c \qquad (\alpha\neq -1)$$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x|+c$$

$$\int e^x\,dx = e^x+c$$

$$\int \sin x\,dx = -\cos x+c$$

$$\int \cos x\,dx = \sin x+c$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x+c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x+c$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x+c$$

שיטות אינטגרציה:

1. אינטגרלים מיידיים וכמעט מיידיים
2. אינטגרציה בחלקים: $\int uv' = uv - \int u'v$
3. אינטגרציה של פונקציות רציונליות (פירוק לשברים חלקיים)
4. שיטת ההצבה: $\int f(x)\,dx \underset{\substack{x=\varphi(t)\\ dx=\varphi'(t)\,dt}}{=} \dots$

הצבות שימושיות:

א) $x = \pi - t$, $\quad dx = -dt$

ב) אוילר: $t = x + \sqrt{1+x^2}$, $\quad \dfrac{dt}{t} = \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}}$

ג) טריגונומטריות: $\quad \tan\frac{x}{2} = t$

$$dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

חדו"א 1מ' - אביב תשס"א - דף עזר בנושא אינטגרלים מוכללים

הדף מנוסח עבור אינטגרלים מוכללים מהצורה $\int_a^\infty$. יש כמובן גרסאות מקבילות עבור פונקציות לא חסומות. לאורך הדף נניח כי הפונקציות אינטגר-ביליות בקטעים סגורים $[a,x]$, לכל $a \le x$.

1. <u>הגדרה</u>: $\int_a^\infty f(x)dx \triangleq \lim_{u\to\infty} \int_a^u f(x)dx$ אם הגבול קיים וסופי.

2. <u>מבחן קושי</u>: $\int_a^\infty f$ מתכנס $\Longleftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ קיים M כך שאם $x,y > M$, אזי $\left|\int_x^y f\right| < \varepsilon$.

3. תהי $f \ge 0$. אזי $\int_a^\infty f$ מתכנס $\Longleftrightarrow$ הפונקציה $g(x) = \int_a^x f(t)dt$ חסומה.

4. $\int_a^\infty |f|$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\int_a^\infty f$ מתכנס.

5. <u>מבחן אבל</u>: אם f מונוטונית וחסומה, f' רציפה, g רציפה ו- $\int_a^\infty g$ מתכנס, אזי $\int_a^\infty fg$ מתכנס.

6. <u>מבחן דיריכלה</u>: אם f מונוטונית, $f(x) \underset{x\to\infty}{\longrightarrow} 0$, f' רציפה, g רציפה ו- $\int_a^x g$ פונקציה חסומה, אזי $\int_a^\infty fg$ מתכנס.

7. <u>מבחן ההשוואה</u>: אם f,g <u>אי שליליות</u>, ואם קיים c כך ש- $\forall x\ f(x) \le c \cdot g(x)$ אזי:

   (א) $\int_a^\infty g$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\int_a^\infty f$ מתכנס.

   (ב) $\int_a^\infty f$ מתבדר $\Longleftarrow$ $\int_a^\infty g$ מתבדר.

8. <u>מבחן ההשוואה II</u>: אם f, g <u>אי שליליות</u> וקיים $0 < L < \infty$ כך ש- $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f}{g} = L$,
אזי $\int\limits_a^\infty f$ ו- $\int\limits_a^\infty g$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

9. $\int\limits_1^\infty \frac{dx}{x^p}$ מתכנס $p > 1 \iff$.

10. אם f רציפה וקיים קבוע c כך ש- $\left|\int\limits_a^b f(x)\right| < c \quad \forall b > a$,
אזי $\int\limits_a^\infty \frac{f(x)}{x^\alpha}$ מתכנס לכל $\alpha > 0$.

<u>הערה</u>: את סעיפים 5 ו- 6 ניתן להוכיח גם ללא ההנחה כי g ו- f' רציפות.

חדו"א 1מ' - אביב תשס"א - דף עזר בנושא מבחנים להתכנסות טורים

1. תנאי הכרחי להתכנסות $\sum a_n$ הוא $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. מבחן האינטגרל: תהי $f(x)$ פונקציה חיובית מונוטונית יורדת על $[a,\infty)$, כך ש- $f(n)=a_n$. אזי:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ מתכנס } \Longleftrightarrow \int_a^{\infty} f(x)dx \text{ מתכנס.}$$

3. מבחן ההשוואה: $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ סדרות חיוביות, $a_n \le M\cdot b_n$ מ-n מסוים. אזי:
   (א) $\sum b_n$ מתכנס $\Longleftarrow$ $\sum a_n$ מתכנס.
   (ב) $\sum a_n$ מתבדר $\Longleftarrow$ $\sum b_n$ מתבדר.

4. הכללה של מבחן ההשוואה: $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ סדרות חיוביות, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=L$, $0<L<\infty$. אזי $\sum a_n$ ו- $\sum b_n$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

5. מבחן המנה: $\{a_n\}$ סדרה חיובית. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\rho$. אזי:
   (א) $0\le\rho<1 \Longleftarrow \sum a_n$ מתכנס (מספיק $\overline{\lim}<1$)
   (ב) $\rho>1 \Longleftarrow \sum a_n$ מתבדר (מספיק $\underline{\lim}>1$)
   (ג) $\rho=1$ המבחן נכשל.

6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ מתכנס $\Longleftrightarrow$ $\rho>1$.

7. מבחן קושי: $\sum a_n$ מתכנס $\Longleftrightarrow$ לכל $\varepsilon>0$ קיים $N(\varepsilon)$ כך ש- $|a_n+a_{n+1}+\ldots+a_p|<\varepsilon$ לכל $p\ge n\ge N(\varepsilon)$.

8. טור אי-שלילי מתכנס $\Longleftrightarrow$ סדרת הסכומים החלקיים שלו חסומה.

9. מבחן השורש: $\{a_n\}$ סדרה חיובית. $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n}=\sigma$. אזי:
   (א) $0\le\sigma<1 \Longleftarrow \sum a_n$ מתכנס
   (ב) $\sigma>1 \Longleftarrow \sum a_n$ מתבדר
   (ג) $\sigma=1$ המבחן נכשל.

10*. <u>מבחן הדלילות:</u> $\{a_n\}$ סדרה חיובית מונוטונית יורדת. אזי $\sum a_n$ ו- $\sum 2^n a_{2^n}$ מתכנסים ומתבדרים יחדיו.

11*. <u>מבחן ראבה:</u> $\{a_n\}$ סדרה חיובית. $\lim\limits_{n\to\infty} n\left(1-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)=L$. אזי:

(א) $L>1 \Longleftarrow \sum a_n$ מתכנס

(ב) $L<1 \Longleftarrow \sum a_n$ מתבדר

(ג) $L=1$ המבחן נכשל.

12*. <u>שיפור לראבה:</u> $\{a_n\}$ סדרה חיובית. $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n\left(1-n\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\right)=L$. אזי:

ראה 11 לעיל.

13. $\{a_n\}$ סדרה חיובית מונוטונית יורדת, $\sum a_n$ מתכנס $\Longleftarrow$ $na_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.

14. <u>משפט לייבניץ:</u> $\{a_n\}$ סדרה חיובית המקיימת: $(1) \quad \forall n \quad a_{n+1}\le a_n$

$(2) \quad na_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

אזי: $\sum(-1)^n a_n$ מתכנס, וכן מתקיים (S - הסכום):

(א) $|S|\le|a_1|$

(ב) $|S-S_n|\le|a_{n+1}|$

15. <u>חוק הצירוף:</u>

(א) אם $\sum a_n$ מתכנס, אז כל טור הנוצר ממנו ע"י הכנסת סוגריים מתכנס אף הוא, ולאותו סכום.

(ב) פתיחת סוגריים בטור מתכנס יכולה לגרום לו להתבדר.

(ג) אם בכל סוגריים האברים בעלי אותו סימן, אז (ב) לא נכון.

16. <u>חוק החילוף:</u>

(א) אם $\sum a_n$ מתכנס <u>בהחלט</u>, אזי כל טור הנוצר ממנו ע"י שינוי סדר האברים מתכנס אף הוא בהחלט, ולאותו סכום.

(ב) אם $\sum a_n$ מתכנס <u>בתנאי</u>, אז ניתן ע"י שינוי סדר האברים לגרום לו להתכנס לכל סכום, או להתבדר.

17. <u>מבחן אבל:</u> אם $\sum a_n$ מתכנס, $\{b_n\}$ מונוטונית וחסומה, אז $\sum a_n b_n$ מתכנס.

18. <u>מבחן דיריכלה:</u> אם סדרת הסכומים החלקיים של $\sum a_n$ חסומה, ו- $\{b_n\}$ שואפת מונוטונית ל-0, אזי $\sum a_n b_n$ מתכנס.

חדו"א 1מ' - אביב תשס"א - דף עזר בנושא התכנסות במ"ש וטורי חזקות

הגדרה: $\{f_n(x)\}$ מתכנסת ל- $f(x)$ במ"ש בתחום I אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N(\varepsilon)$ כך שלכל $n > N(\varepsilon)$ מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$, לכל $x \in I$.

הגדרה: $\{f_n(x)\}$ מתכנסת ל- $f(x)$ נקודתית בתחום I אם לכל $\varepsilon > 0$ ולכל $x \in I$ קיים $N(\varepsilon, x)$ כך שלכל $n > N(\varepsilon, x)$ מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

קריטריון קושי: $f_n \longrightarrow f$ במ"ש בתחום I $\iff$ לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N(\varepsilon)$ כך שאם $m, n > N(\varepsilon)$ אז $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ לכל $x \in I$.

הגדרה: טור פונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש בתחום I אם סדרת הסכומים החלקיים $S_k(x) = \sum_{n=1}^{k} f_n(x)$ מתכנסת במ"ש.

משפטים:

1. אם $f \longrightarrow f_n$ נקודתית בתחום I, ונסמן $M_n = \sup_{x \in I} \{|f_n(x) - f(x)|\}$, אזי:

$$f_n \longrightarrow f \text{ במ"ש} \iff \lim_{n \to \infty} M_n = 0$$

2. אם $f, f_n : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, $f_n \longrightarrow f$ נקודתית ומונוטונית, f_n רציפות, אזי:

$$f_n \longrightarrow f \text{ במ"ש} \iff f \text{ רציפה}$$

3. $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש $\Longleftarrow$ $f_n \longrightarrow 0$ רציפה.

4. (מבחן M של ויירשטראס) אם טור פונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ על תחום I מקיים $|f_n(x)| \le M$ לכל n ולכל $x \in I$, ו- $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ טור (אי-שלילי) מתכנס, אזי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש.

5. (אינטגרציה איבר-איבר) אם $\{f_n(x)\}$ פונקציות אינטגרביליות בקטע $[a,b]$ ואם הסדרה $\{f_n(x)\}$ / הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס במ"ש ל- $f(x)$, אזי

f אינטגרבילית בקטע $[a,b]$ ומתקיים:

<u>לסדרה</u>: $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx\left(=\int_a^b \lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)$$

<u>לטור</u>: $$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx=\int_a^b f(x)dx\left(=\int_a^b \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)$$

הערה: <u>לא</u> לאינטגרלים מוכללים!

6. (<u>גזירה איבר-איבר</u>) אם $\{f_n(x)\}$ פונקציות גזירות ברציפות בקטע $[a,b]$, הסדרה $\{f_n(x)\}$ / הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ מתכנס נקודתית ב-$x_0\in[a,b]$ מסוים, וסדרת הנגזרות $\{f_n'(x)\}$ / טור הנגזרות $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ מתכנס במ"ש ב- $[a,b]$, אזי:

   (א) הסדרה $\{f_n(x)\}$ / הטור $\sum f_n(x)$ מתכנס במ"ש בקטע.

   (ב) פונקצית הגבול $f(x)$ גזירה בקטע.

   (ג) <u>לסדרה</u>: $\lim\limits_{n\to\infty} f_n'(x) = f'(x) \left(=(\lim\limits_{n\to\infty} f_n)'\right)$.

   <u>לטור</u>: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = f'(x) \left(=(\sum f_n)'\right)$.

7. (<u>משפט</u> Abel) אם טור חזקות $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ מתכנס עבור $x=\alpha$ מסוים $(\alpha\neq 0)$ אזי הטור מתכנס בהחלט עבור כל $|x|<\alpha$.

8. (<u>משפט קושי-הדמר</u>) יהי $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ טור חזקות. רדיוס ההתכנסות נתון ע"י:

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

9. (<u>משפט דלמבר</u>) יהי $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ טור חזקות. רדיוס ההתכנסות נתון ע"י:

   $R=\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$ בתנאי שהגבול קיים.

10. טור חזקות $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ מתכנס במ"ש בכל קטע סגור המוכל בתחום התכנסותו.

11. יהי $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R, ונסמן את סכומו $f(x)$.
אזי:

(א) $f(x)$ רציפה בתחום התכנסותו של הטור.

(ב) $f(x)$ אינטגרבילית בכל קטע סגור בתחום התכנסותו של הטור, ומתקיים:

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^x t^n\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

ולטור זה אותו רדיוס התכנסות ולפחות אותו תחום התכנסות.

(ג) $f(x)$ גזירה בכל נקודה $-R < x < R$ ומתקיים:

$$f'(x) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

ולטור זה אותו רדיוס התכנסות ולכל היותר אותו תחום התכנסות.

בפרט, בכל נקודה בתוך תחום ההתכנסות של טור חזקות, מותר לגזור/לבצע אינטגרציה איבר-איבר.

12. (יחידות הצגת פונקציה כטור חזקות) אם $f(x) = \sum a_n x^n$ ב- $(-R, R)$ אזי f גזירה מכל סדר ומתקיים $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$.

13. אם f גזירה מכל סדר ב- $[-r, r]$ ויש M כך שלכל $x \in [-r, r]$ ולכל n, $|f^{(n)}(x)| \le M$, אזי:

$f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$ לכל x ב- $[-r, r]$.

(כלומר אם הנגזרות חסומות במשותף, אזי f היא הסכום של טור טיילור שלה.)

14. אם $\sum a_n x^n$ טור חזקות של $f_1(x)$,
ו- $\sum b_n x^n$ טור חזקות של $f_2(x)$, אזי:

(א) $\sum \gamma a_n x^n$ טור חזקות של $\gamma f_1(x)$ בתחום ההתכנסות של $\sum a_n x^n$.

(ב) $\sum (a_n \pm b_n) x^n$ טור חזקות של $f_1 \pm f_2$ בכל x ששייך ל-2 תחומי ההתכנסות.

(ג) נגדיר $c_n \triangleq \sum\limits_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. אזי $\sum c_n x^n$ טור חזקות של $f_1 \cdot f_2$ בכל x פנימי של 2 תחומי ההתכנסות.

אינפי 2 - דף עזר בנושא פונקציות של שני משתנים: גבולות ורציפות

גבולות

הגדרה: נאמר ש- $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך ש -
$0 < \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \delta \;\Rightarrow\; | f(x,y) - L | < \varepsilon$.

(ניסוח שקול: $| x-a | < \delta, \quad | y-b | < \delta$, ו - $0 < | y-b | + | x-a | \;\Rightarrow\; | f(x,y) - L | < \varepsilon$).

הגדרה שקולה (היינה): $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = L$ אם לכל סדרת נקודות המקיימת $(x_n, y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (a,b)$, $(a,b) \neq (x_n, y_n)$, מתקיים $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = L$.

גבולות נישנים: $\lim_{y\to0}\left(\lim_{x\to0} f(x,y)\right)$, $\lim_{x\to0}\left(\lim_{y\to0} f(x,y)\right)$.

משפטים:

1. אריתמטיקה של גבולות.
2. אם ל - $f(x,y)$ יש גבולות שונים כאשר (x,y) שואף ל - (a,b) לאורך מסלולים שונים, אז אין ל - $f(x,y)$ גבול ב - (a,b).
3. אם קיים הגבול $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$ וגם קיים אחד מהגבולות הנישנים, אז הם שווים.
4. מעבר לקואורדינטות פולריות: תהא $f(x,y)$ פונקציה של שני משתנים. אם $f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)) = F(r)G(\theta)$, ומתקיים $F(r) \xrightarrow[r\to0]{} 0$ ו - $G(\theta)$ חסומה, אז $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

רציפות

הגדרה: נאמר ש - $f(x,y)$ רציפה בנקודה (a,b) אם $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y) = f(a,b)$.

משפטים:

1. $f(x,y)$ רציפה בקבוצה סגורה וחסומה $\Leftarrow$ f חסומה ומקבלת מינימום ומקסימום
2. $f(x,y)$ רציפה בקבוצה קשירה (פתוחה/סגורה) $\Leftarrow$ f מקיימת את תכונות ערך הביניים.

הגדרה: $f: R^2 \to R$ תיקרא רציפה במ"ש בתחום $D \subseteq R^2$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in D$ מתקיים: $d(x,y) < \delta \;\Rightarrow\; | f(x) - f(y) | < \varepsilon$.
(כאן $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2)$).

משפט: $f(x,y)$ רציפה בקבוצה סגורה וחסומה $\Leftarrow$ f רציפה שם במ"ש.

אינפי 2 - דף עזר בנושא גזירות של פונקציות של שני משתנים

<u>הגדרה:</u> יהא $u=(u_1,u_2)$ וקטור יחידה: $u_1^2+u_2^2=1$. נגזרת מכוונת בכיוון u היא:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+hu_1,y_0+hu_2)-f(x_0,y_0)}{h}$$

(בתנאי שהגבול קיים).

נגזרת חלקית היא מקרה פרטי עבור $u=(0,1)$ או $u=(1,0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h,y_0)-f(x_0,y_0)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0,y_0+h)-f(x_0,y_0)}{h}$$

<u>הגדרה:</u> $f(x,y)$ תיקרא גזירה (דיפרנציאבילית) בנקודה (x_0,y_0) אם קיימים קבועים A,B כך שלכל h,k:

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+Ah+Bk+\alpha(h,k)\sqrt{h^2+k^2}$$

כאשר $\alpha(h,k)\xrightarrow[(h,k)\to(0,0)]{}0$.

<u>משפטים:</u>

1. אם $f(x,y)$ גזירה בנקודה (x_0,y_0) אז היא רציפה בה.
2. אם $f(x,y)$ גזירה בנקודה (x_0,y_0) אז יש לה בה נגזרות חלקיות, ומתקיים:

$$A=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\ B=\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

3. אם ל - $f(x,y)$ יש נגזרות חלקיות בסביבת (x_0,y_0) ונגזרות אלה רציפות בנקודה (x_0,y_0), אז $f(x,y)$ גזירה בנקודה (x_0,y_0).
4. אם $f(x,y)$ גזירה בנקודה (x_0,y_0), אז הנגזרת המכוונת של $f(x,y)$ בכיוון $u=(u_1,u_2)$ בנקודה (x_0,y_0) קיימת, ונתונה ע"י:

$$\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)=u_1\frac{\partial f}{\partial u}(x_0,y_0)+u_2\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

סימון: הווקטור $\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)$ נקרא הגרדיאנט של f ומסומן ב - ∇f.

בסימון זה, משפט 4 ינוסח: f גזירה $\Leftarrow$ $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}=\nabla f\cdot\vec{u}$ (מכפלה סקלרית).

5. אם $f(x,y)$ מוגדרת בסביבת (x_0,y_0), $\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}$ קיימות בסביבהּ, וקיימות $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y},\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$ בסביבת הנקודה (x_0,y_0), והן רציפות, אז הן שוות.
6. כלל השרשרת: תהא $f(x,y)$ גזירה. נסמן: $F(t)=f(x(t),y(t))$, כאשר $x(t),y(t)$ גזירות.

אזי F גזירה ו - $F'(t)=\frac{\partial f}{\partial x}x'(t)+\frac{\partial f}{\partial y}y'(t)$.

הכללה: תהיינה $g(x,y),x(u,v),y(u,v)$ פונקציות גזירות.

נסמן: $G(u,v)=g(x(u,v),y(u,v))$. אזי G גזירה ו -

$$\frac{\partial G}{\partial u}=\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial G}{\partial v}=\frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

אינפי 2 - דף עזר בנושא אינטגרלים פרמטריים

משפטים:

1. תהא $f(x,y)$ רציפה במלבן $[a,b]\times[c,d]$. נגדיר: $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$. אזי F רציפה ב- $[c,d]$.

2. <u>כלל לייבניץ</u> - גזירה תחת סימן האינטגרל:

תהא $f(x,y)$ מוגדרת במלבן $[a,b]\times[c,d]$. נגדיר $F(y)=\int_a^b f(x,y)dx$ ונניח ש - F מוגדרת לכל y ב - $[c,d]$ (למשל, אפשר לדרוש שלכל y ב - $[c,d]$, $f(x,y)$ רציפה כפונקציה של x).

כמו כן נניח ש - $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ רציפה במלבן.

אזי:

$$F'(y)=\frac{d}{dy}\int_a^b f(x,y)dx=\int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx.$$

3. <u>משפט פוביני -</u> החלפת סדר אינטגרציה:

תהא $f(x,y)$ רציפה במלבן $[a,b]\times[c,d]$. אזי:

$$\int_a^b\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx=\int_c^d\left[\int_a^b f(x,y)dx\right]dy.$$

4. <u>משפט לייבניץ</u> - הכללה:

תהא $f(x,y)$ רציפה במלבן $[a,b]\times[c,d]$. תהיינה $\varphi(y),\psi(y)$ פונקציות רציפות ב - $[c,d]$, כך שלכל y, $a\le\varphi(y),\psi(y)\le b$. נגדיר: $F(y)=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x,y)dx$.

אזי F רציפה ב- $[c,d]$.

אם בנוסף $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ רציפה במלבן ו - $\varphi(y),\psi(y)$ גזירות, אזי:

$$F'(y)=\int_{\varphi(y)}^{\psi(y)}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx+f(\psi(y),y)\psi'(y)-f(\varphi(y),y)\varphi'(y).$$

אינפי 2 - דף עזר בנושא התכנסות במ"ש של אינטגרלים פרמטריים.

<u>הגדרה:</u> נאמר ש - $F(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx$ מתכנס במ"ש עבור $y\in E$ אם לכל $\varepsilon>0$ קיים x_ε כך

ש - $\left|\int_a^\infty f(x,y)dx-\int_a^x f(x,y)dx\right|=\left|\int_x^\infty f(x,y)dx\right|<\varepsilon$ לכל $x>x_\varepsilon$ ולכל $y\in E$.

<u>משפטים:</u>

<u>1. משפט ויירשטראס:</u>

תהא $f(x,y)$ מוגדרת לכל $x\in[a,\infty)$ ולכל $y\in E$, ותהא $M(x)$ מוגדרת לכל $x\in[a,\infty)$.

נניח שמתקיימים התנאים הבאים:

א. $M(x)$ ו - $f(x,y)$ אינטגרביליות לפי x בכל קטע מהצורה $[a,b]$.

ב. $|f(x,y)|\le M(x)$ לכל $y\in E$.

ג. $\int_a^\infty M(x)dx$ מתכנס.

אזי $F(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx$ מתכנס במ"ש ב - E.

2. תהא $f(x,y)$ רציפה ב - $[a,\infty)\times[c,d]$, ונניח ש - $F(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx$ מתכנס במ"ש ב- $[c.d]$. אזי $F:[c,d]\to R$ רציפה.

<u>3. משפט לייבניץ:</u>

תהיינה $f(x,y)$ ו - $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ רציפות ברצועה $[a,\infty)\times[c,d]$, ונניח שמתקיימים התנאים הבאים:

א. $\int_a^\infty f(x,y)dx$ מתכנס לכל $y\in[c,d]$.

ב. $\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$ מתכנס במ"ש ב - $[c,d]$.

אזי:

א. $\int_a^\infty f(x,y)dx$ מתכנס במ"ש ב - $[c,d]$.

ב. $F(y)=\int_a^\infty f(x,y)dx$ גזירה, ומתקיים: $F'(y)=\int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)dx$.

<u>4. משפט פוביני:</u>

בהנחות משפט 2 לעיל: $\int_c^d\left[\int_a^\infty f(x,y)dx\right]dy=\int_a^\infty\left[\int_c^d f(x,y)dy\right]dx$

אינפי 2 - דף עזר בנושא אינטגרלים כפולים.

נסמן אינטגרל כפול ב - $\int_D f(x,y)ds$ או ב - $\iint_D f(x,y)dxdy$ כאשר D הוא תחום בעל שטח.

תכונות:

1. לינאריות: $\int_D cf+g = c\int_D f + \int_D g$
2. $\int_D 1ds = S(D)$ (כאשר $S(D)$ הוא השטח של D).
3. מונוטוניות: $f \le g \Leftarrow \int_D f \le \int_D g$.
4. אדיטיביות: אם ל - D_1 ול - D_2 אין נקודה פנימית משותפת, אז $\int_{D_1\cup D_2} f = \int_{D_1} f + \int_{D_2} f$.
5. $\left|\int_D f\right| \le \int_D |f|$.
6. אם $m \le f(x,y) \le M$ אז $m\cdot S(D) \le \int_D f \le M\cdot S(D)$.
7. אם f רציפה בתחום סגור וקשיר D, אז קיימת נקודה $(a,b)\in D$, כך ש- $\int_D f = f(a,b)\cdot S(D)$.

משפטים:

א. f רציפה $\Leftarrow$ f אינטגרבילית.

ב. f אינטגרבילית $\Leftrightarrow$ קבוצת נקודות אי הרציפות של f היא בעלת מידה 0.

ג. משפט פוביני: תהא $f(x,y)$ רציפה במלבן הסגור $D=[a,b]\times[c,d]$. אזי $\int_D f(x,y)ds = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx = \int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)dx\right)dy$.

ד. תהא $f(x,y)$ מוגדרת במלבן $D=[a,b]\times[c,d]$. אם $\int_D f(x,y)ds$ קיים, ולכל $x\in[a,b]$ גם האינטגרל $\int_c^d f(x,y)dy$ קיים, אזי $I(x)=\int_c^d f(x,y)dy$ אינטגרבילית ב - $[a,b]$, ו- $\int_D f(x,y)ds = \int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)dy\right)dx$.

ה. תהא $g(x)$ רציפה ב - $[a,b]$ ו - $h(y)$ רציפה ב - $[c,d]$. נסמן: $f(x,y)=g(x)h(y)$ ו - $D=[a,b]\times[c,d]$. אזי: $\int_D f(x,y)ds = \left(\int_a^b g(x)ds\right)\left(\int_c^d h(y)dy\right)$.

ו. אם D תחום פשוט (כלומר, $D=\{(x,y)\,|\,a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$, ו- $y_1(x),y_2(x)$ רציפות), אזי: $\int_D fds = \int_a^b\left(\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)dy\right)dx$ (ובאופן דומה אם התחום פשוט ביחס לציר השני).

החלפת משתנים באינטגרל כפול

משפט: אם שתי הפונקציות $x = x(u,v)$ ו - $y = y(u,v)$ הן גזירות ברציפות (כלומר, יש להן נגזרות חלקיות רציפות), ומגדירות העתקה חח"ע בין מישור (u,v) למישור (x,y) (בתחום הנידון), והיעקוביאן $J(u,v)$ אינו מתאפס בכל התחום הנידון במישור (u,v), אזי:

$$\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_S f(x(u,v),y(u,v))\,|J|\,dudv,$$

כאשר:

- S הוא התמונה של R ע"י ההעתקה $(x,y) \to (u,v)$ ו - R חסומה וסגורה ובעלת שטח
- היעקוביאן $J(u,v)$ מוגדר ע"י: $J(u,v) \equiv \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$.

מקרה פרטי: מעבר לקואורדינטות פולריות:

$$\begin{matrix} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{matrix} \Leftarrow \quad J \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\theta) & -r\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & r\cos(\theta) \end{vmatrix} = r.$$

לכן: $\iint_R f(x,y)dxdy = \iint_S f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))rdrd\theta$.

הערה: הנוסחה האחרונה נכונה גם כאשר S מכיל את הראשית, למרות שתנאי המשפט לפיו $J \neq 0$ לא מתקיים.

אינפי 2 - דף עזר בנושא אינטגרלים קוויים ומשפט גרין

אינטגרל קווי מסוג I .

תהא $f(x,y)$ פונקציה סקלרית רציפה.

יהא γ עקום חלק הנתון ע"י $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ל- $a \le t \le b$.

נגדיר: $\int\limits_{\gamma} fds \equiv \int\limits_{a}^{b} f(x(t), y(t))\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$.

הערות:

1. אם $f \equiv 1$, נקבל את אורך העקום γ.
2. אם העקום γ נתון בהצגה מפורשת $y = \varphi(x)$, אז $\int\limits_{\gamma} fds = \int\limits_{a}^{b} f(x, y(x))\sqrt{1+\varphi'(x)^2}\,dx$.
3. אם העקום γ נתון בהצגה פולרית $(\theta, \rho(\theta))$, כלומר: $\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos(\theta) \\ y = \rho(\theta)\sin(\theta) \end{cases}$ ל- $\alpha \le \theta \le \beta$,

   אזי $\int\limits_{\gamma} fds \equiv \int\limits_{\alpha}^{\beta} f(\rho\cos(\theta), \rho\sin(\theta))\sqrt{\rho(\theta)^2 + \rho'(\theta)^2}\,d\theta$.

אינטגרל קווי מסוג II.

יהא $\vec{F}$ שדה וקטורי רציף הנתון ע"י: $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j}$.

יהא γ עקום חלק הנתון ע"י $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ל- $a \le t \le b$.

נגדיר: $\int\limits_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} \equiv \int\limits_{a}^{b} [P(x(t), y(t))x'(t) + Q(x(t), y(t))y'(t)]dt$.

הערות:

1. אינטגרל קווי מסוג II מסומן גם ע"י: $\int\limits_{\gamma} Pdx + Qdy$.
2. המשמעות הפיסיקלית שלו היא עבודת שדה לאורך מסלול.
3. האינטגרל תלוי בכיוון המוגדר ע"י γ.
4. אם $\gamma = \{(x,c) \mid a \le x \le b\}$ (כלומר, מקביל לציר x), אז $\int\limits_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} \equiv \int\limits_{a}^{b} P(x,c)dx$

   (או, $\int\limits_{\gamma} \vec{F}\cdot d\vec{r} \equiv \int\limits_{a}^{b} Q(c,y)dy$ אם γ מקביל ציר y).

משפט גרין:

יהא D תחום קשיר ב - R^2. תהא $\Gamma = \partial D$ (שפת D) עם מגמה חיובית (כלומר, בתנועה לאורך Γ, תמיד D משמאל).

יהא $\vec{F}$ שדה וקטורי ב - C^1 (כלומר, בעל נגזרות חלקיות רציפות) על $\overline{D}$.

אזי: $\oint\limits_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint\limits_{D} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dxdy$.

מסקנה: אם $\Gamma = \partial D$, אז השטח של D נתון ע"י $\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma} xdy - ydx$.

הגדרה: יהא $\vec{F}(x,y) = P(x,y)\hat{i} + Q(x,y)\hat{j}$ שדה וקטורי.

אם קיימת פונקציה סקלרית $\phi(x,y)$ המקיימת $\nabla\phi = \vec{F}(x,y) = (P,Q)$ (כלומר, $\frac{\partial \phi}{\partial x} = P, \frac{\partial \phi}{\partial y} = Q$), אז:

$\phi(x,y)$ נקראת "הפוטנציאל הסקלרי של $\vec{F}$", והשדה $\vec{F}$ נקרא "שדה משמר."

במקרה זה נאמר ש - $Pdx + Qdy$ הוא דיפרנציאל מדוייק.

משפטים (אי תלות של אינטגרל קווי מסוג II במסלול):

1. יהא $\vec{F}$ שדה וקטורי רציף על תחום D. אז התנאים הבאים שקולים:

א. לכל מסלול סגור Γ ב - D מתקיים: $\oint\limits_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$.

ב. האינטגרל $\int\limits_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ על מסלול בין A ל - B אינו תלוי במסלול המחבר את הנקודות A ו- B.

ג. $Pdx + Qdy$ דיפרנציאל מדוייק, ו - $\int\limits_{AB} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \phi(B) - \phi(A)$.

2. אם $\vec{F}$ הוא C^1 והתחום D הוא פשוט קשר, אז התנאים הנ"ל שקולים גם ל -

ד. $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$.