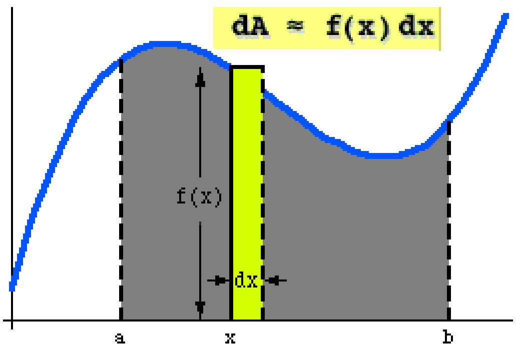
חוברת עזר לקורס

חשבון אינפיטיסימלי 1

104195



תוכן העניינים

בהצלחה!

כללי

אי שוויון המשולש :
$$|a+b| \le |a| + |b|$$
$$|a-b| \ge \big||a|-|b|\big|$$

אי שוויון ברנולי: $(1+x)^n \ge 1+nx$

אי שוויון קושי-שוורץ: $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \le \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

בינום ניוטון וזהויות קומבינטוריות:
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$
$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$
$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k+1} + \binom{n}{k}$$

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + b^{n-1})$$

אי שוויון הממוצעים : $\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}} \le \left(\prod_{i=1}^{n} x_i\right)^{\frac{1}{n}} \le \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$

ממוצע הרמוני $\le$ ממוצע הנדסי $\le$ ממוצע חשבוני

סדרת פיבונצ'י: $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n \right)$

זהויות טריגונומטריות

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\sin(90-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\cos(90-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\tan(90-\alpha) = \cot\alpha$$
$$\cot(90-\alpha) = \tan\alpha$$
$$\sin(180-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(180-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(180-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\tan\alpha = \sin\alpha / \cos\alpha$$
$$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$$
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$
$$1+\tan^2\alpha = 1/\cos^2\alpha$$
$$1+\cot^2\alpha = 1/\sin^2\alpha$$
$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$
$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$\cos(2\alpha) = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\tan(2\alpha) = 2\tan\alpha/(1-\tan^2\alpha)$$
$$\sin(3\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$$
$$\cos(3\alpha) = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$$
$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(a/2+\beta/2)\cos(a/2-\beta/2)$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin(a/2-\beta/2)\cos(a/2+\beta/2)$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos(a/2+\beta/2)\cos(a/2-\beta/2)$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin(a/2+\beta/2)\sin(a/2-\beta/2)$$
$$\sin\alpha\cos\beta = 1/2\left(\sin(a+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$
$$\sin\alpha\sin\beta = 1/2\left(\cos(a-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$
$$\cos\alpha\cos\beta = 1/2\left(\cos(a+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\right)$$
$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$
$$\tan(\alpha+\beta) = (\tan\alpha+\tan\beta)/(1-\tan\alpha\tan\beta)$$
$$\tan(\alpha-\beta) = (\tan\alpha-\tan\beta)/(1+\tan\alpha\tan\beta)$$
$$\tan(\alpha+\beta) - \tan\alpha - \tan\beta = \tan(\alpha+\beta)\tan\alpha\tan\beta$$
$$\arcsin\alpha + \arccos\alpha = \pi/2$$

חסמים

<u>הגדרות</u>

- נאמר כי "קבוצת מספרים A חסומה מלעיל" אם קיים מספר קבוע M כך שלכל $x \in A$ מתקיים $x \le M$. M הנ"ל נקרא ***<u>חסם מלעיל</u>*** של הקבוצה.

- נאמר כי "קבוצת מספרים A חסומה מלרע" אם קיים מספר קבוע m כך שלכל $x \in A$ מתקיים $x \ge m$. m הנ"ל נקרא ***<u>חסם מלרע</u>*** של קבוצה.

- אם A חסומה גם מלעיל וגם מלרע נאמר כי A ***<u>חסומה</u>***.

- תנאי הכרחי ומספיק לכך ש-A תהיה חסומה הוא שיהיה קיים מספר L כך שלכל $x \in A$ מתקיים $|x| \le L$.

- תהי A קבוצת מספרים. למספר הגדול ביותר בקבוצה (אם קיים כזה) קוראים **<u>המקסימום</u>** של הקבוצה. סימונו $\max(x)_{x\in A}$ או $\max\{x \mid x \in A\}$.

- תהי A קבוצת מספרים. למספר הקטן ביותר בקבוצה (אם קיים כזה) קוראים **<u>המינימום</u>** של הקבוצה. סימונו $\min(x)_{x\in A}$ או $\min\{x \mid x \in A\}$.

- תהי A קבוצת מספרים חסומה מלעיל. לחסם הקטן ביותר של A (אם קיים כזה) קוראים **<u>הסופרימום</u>** או **<u>החסם העליון</u>** של הקבוצה. סימונו $\sup(x)_{x\in A}$.
  נובע מההגדרה:
  תנאי הכרחי ומספיק לכך ש M יהיה הסופרימום של A הוא:
  1) $x \le M$ לכל $x \in A$ (תנאי לחסימות).
  2) לכל $\varepsilon > 0$ קיים $x_\varepsilon \in A$ כך ש $x_\varepsilon > M - \varepsilon$ (תנאי למינימלי)
  או
  2א) $\forall M^* < M, \exists x_0 \in A \mid x_0 > M^*$.

- תהי A קבוצת מספרים חסומה מלרע. לחסם הגדול ביותר של A (אם קיים כזה) קוראים **<u>האינפימום</u>** או **<u>החסם התחתון</u>** של הקבוצה. סימונו $\inf(x)_{x\in A}$.
  נובע מההגדרה:
  תנאי הכרחי ומספיק לכך ש M יהיה האינפימום של A הוא:
  1) $x \ge m$ לכל $x \in A$ (תנאי לחסימות).
  2) לכל $\varepsilon > 0$ קיים $x_\varepsilon \in A$ כך ש $x_\varepsilon < M - \varepsilon$ (תנאי למקסימלי)
  או
  2א) $\forall m^* > m, \exists x_0 \in A \mid x_0 < m^*$.

- את העובדה ש A אינה חסומה מלעיל מציינים לפעמים כך: $\sup_{x\in A}(x) = \infty$.

תהי C קבוצת מספרים. תנאי הכרחי מספיק לכך ש C אינה חסומה מלעיל הוא שלכל מספר ממשי M קיים $\gamma \in C$ כך ש M ש $\gamma > M$.

- את העובדה ש A אינה חסומה מלרע מציינים לפעמים כך: $\inf_{x\in A}(x) = -\infty$.

תהי C קבוצת מספרים. תנאי הכרחי מספיק לכך ש C אינה חסומה מלרע הוא שלכל מספר ממשי M קיים $\gamma \in C$ כך ש $\gamma < M$.

<u>משפט</u>

לכל קבוצת מספרים A לא ריקה וחסומה מלעיל יש סופרימום.
לכל קבוצת מספרים A לא ריקה וחסומה מלרע יש אינפימום.

<u>משפט</u>

לכל $\alpha > 0$ ולכל n טבעי קיים מספר ממשי אחד ויחיד $x > 0$ המקיים $x^n = \alpha$. x זה ייקרא השורש ה n-י של α ויסומן ב $x = \sqrt[n]{\alpha}$ או $x = \alpha^{\frac{1}{n}}$.

סדרות והתכנסות במובן הצר

הגדרות

- **סדרה** $\{a_n\}$ היא קבוצת מספרים עם אינדקס בר מניה. סדרה יכולה להיות סופית או אינסופית.

- לקבוצה $\{x\in\mathbb{R}:|x-a|<\varepsilon\}$ קוראים **סביבת** ε של a עבור $\varepsilon>0$ כלשהו.
או:
יהי a מספר ממשי ויהי $\varepsilon>0$ כלשהו. אזי הקטע $(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$ נקרא סביבת ε של a.

- סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ תיקרא **מתכנסת לגבול** L אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $|a_n-L|<\varepsilon$.
או:
$\forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N}\mid\forall n>n_0\,|a_n-L|<\varepsilon\Leftrightarrow a_n\underset{n\to\infty}{\to}L$.

דוגמא לחישוב גבול סדרה עפ"י ההגדרה:
צריך להוכיח כי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2+2n}{3n^2+1}=\frac{1}{3}$.
פתרון:

$$\left|\frac{n^2+2n}{3n^2+1}-\frac{1}{3}\right|=\left|\frac{\cancel{3n^2}+6n-\cancel{3n^2}-1}{9n^2+3}\right|=\frac{6n-1}{9n^2+3}\le\frac{6n}{9n^2}=\frac{2}{3n}$$

נדרוש כי $\frac{2}{3n}<\varepsilon$.
$N(\varepsilon)=\left[\frac{2}{3\varepsilon}\right]+1$.

- סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ **לא מתכנסת לגבול** L אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $n_0\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>n_0$ מתקיים $|a_n-L|\ge\varepsilon$.

- הגדרה נוספת של הגבול: המספר a הוא הגבול של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אם בכל ε סביבה של a נמצאים כמעט כל איברי הסדרה.

- סדרה שאין לה גבול נקראת מתבדרת.

- לסדרה מתכנסת גבול יחיד.

- אם יש $I\in\mathbb{R}$ כך שלכל n מתקיים $a_n=L$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=L$.

משפט

תהיינה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו- $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ שתי סדרות, $\lim_{n\to\infty} a_n = L$ ונניח שיש $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $a_n = b_n$ אזי $\lim_{n\to\infty} b_n = L$.

הערה: כשאנחנו מסתכלים לאן סדרה מתכנסת מעניין אותנו רק "זנב" הסדרה ולא ההתחלה שלה.

<u>משפט</u>

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L$ אזי $|a_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} |L|$.

<u>משפט</u>

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נגדיר קבוצה B כך $B = \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$. אם הקבוצה B חסומה מלעיל (מלרע) אזי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל (מלרע).

<u>משפט</u>

כל סדרה מתכנסת היא סדרה חסומה.

<u>משפט - אריתמטיקה של גבולות</u>

אם $a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} a$ ו- $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} b$ אזי:

1) $(a_n + b_n) = a + b$

2) $(a_n - b_n) = a - b$

3) $(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$

4) $(ca_n) = ca$

5) $(b_n \neq 0, b \neq 0)\dfrac{1}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{1}{b}$

6) $(b_n \neq 0, b \neq 0)\dfrac{a_n}{b_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{a}{b}$

ששת הפעולות הנ"ל נכונות גם ליותר משתי סדרות כל עוד מספר הסדרות הוא **<u>סופי</u>**.

<u>משפט</u>

אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה ו- $b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ אזי $a_n b_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

סדרות והתכנסות במובן הרחב

הגדרה

- נאמר כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת ל-∞ אם לכל $M \in \mathbb{R}$ יש $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ $a_n > M$.
- נאמר כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתבדרת ל-$-\infty$ אם לכל $m \in \mathbb{R}$ יש $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ $a_n < m$.

הגדרה

- אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ נאמר כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הצר.
- אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L/\infty/-\infty$ נאמר כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב.

משפט

אם $|a_n| \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \infty$ וכן $a_n \neq 0$ לכל n אזי $\frac{1}{a_n} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$.

אם $a_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} 0$ וכן $a_n \neq 0$ לכל n אזי $\frac{1}{|a_n|} \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \infty$.

משפט

אם $a_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} a$, $b_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} b$, $a < b$ אזי יש $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n > n_0$ מתקיים $a_n < b_n$.

מסקנות: 1) אם $a_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} a$ וכן $a < b$ אזי כמעט לכל n $a_n < b$.

2) אם $a_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} a$ וכן $a > b$ אזי כמעט לכל n $a_n > b$.

משפט

תהיינה $a_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} a$, $b_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} b$. אם כמעט לכל n $a_n \le b_n$ אזי $a \le b$.

מסקנות: 1) אם $a_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} a$ וכן $a_n \le b$ כמעט לכל n אזי $a \le b$.

2) אם $a_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} a$ וכן $a_n \ge b$ כמעט לכל n אזי $a \ge b$.

משפט הסנוויץ'

אם הסדרות $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}, \{b_n\}_{n=1}^{\infty}, \{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימות כמעט לכל n כי $a_n \le b_n \le c_n$ וכן $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} c_n = L$ אזי $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L$.

משפט הסנוויץ' המורחב

אם $a_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \infty$ וכן כמעט לכל n $a_n \le b_n$, אזי $b_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} \infty$.

אם $a_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} (-\infty)$ וכן כמעט לכל n $a_n \ge b_n$, אזי $b_n \underset{n\to\infty}{\rightarrow} (-\infty)$.

סדרות מונוטוניות

<u>הגדרה</u>

1) אומרים כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית **<u>לא יורדת</u>** אם לכל n $a_{n+1} \geq a_n$.
2) אומרים כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית **<u>עולה ממש</u>** אם לכל n $a_{n+1} > a_n$.
3) אומרים כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית **<u>יורדת ממש</u>** אם לכל n $a_{n+1} < a_n$.
4) אומרים כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית **<u>לא עולה</u>** אם לכל n $a_{n+1} \leq a_n$.

<u>משפט</u>
לסדרה מונוטונית וחסומה קיים גבול במובן הצר.
אם הסדרה לא עולה (או יורדת ממש) גבולה הוא חסמה התחתון.
אם הסדרה לא יורדת (או עולה ממש) גבולה הוא חסמה העליון.

<u>דוגמא</u>:

נגדיר $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ באינדוקציה כך:
$$\begin{aligned} a_1 &= \sqrt{c} \\ a_{n+1} &= \sqrt{a_n + c} \end{aligned}$$

<u>טענה I : הסדרה מונוטונית עולה</u>.
נוכיח באינדוקציה.
בסיס
$$a_2 = \sqrt{a_1 + c} > \sqrt{c} = a_1$$

הנחה
$$a_n > a_{n-1}$$

מעבר
$$a_{n+1} = \sqrt{a_n + c} > \sqrt{a_{n-1} + c} = a_n$$

<u>טענה II : הסדרה חסומה</u>.
נניח ש $a_n < a + 2\sqrt{c}$.
$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n} < \sqrt{c + 1 + 2\sqrt{c}} = 1 + \sqrt{c} < 1 + 2\sqrt{c}$$

המשך בדף הבא...

I ו-II נובע כי $a_n, a_{n+1} \to L$

III מציאת הגבול

$$a_{n+1} = \sqrt{c + a_n}$$
$$L = \sqrt{c + L}$$
$$L^2 = c + L$$
$$L^2 - c - L = 0$$
$$L = \frac{1 \pm \sqrt{1+4c}}{2}$$
$$L = \frac{1 + \sqrt{1+4c}}{2}$$

ניקח כמובן רק את השורש החיובי כי הסדרה חיובית.

משפט

לסדרה מונוטונית לא חסומה קיים גבול במובן הרחב.

סדרה לא יורדת (או עולה ממש) שאינה חסומה מלעיל מתבדרת ל-∞.

סדרה לא עולה (או יורדת ממש) שאינה חסומה מלעיל מתבדרת ל-$(-\infty)$.

משפט

סדרה מונוטונית תמיד מתכנסת במובן הרחב.

משפט – הלמה של קנטור (המשפט על קטעים אפסים)

יהיו $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קטעים המוכלים כל אחד בתוך קודמו $(I_1 \supseteq I_2 \supseteq I_3 \supseteq I_4 \supseteq ... \supseteq I_n)$ כך שאורכי הקטעים הם סדרת מספרים השואפת ל-0, אזי קיימת נקודה $c \in \mathbb{R}$ יחידה המקיימת $\{c\} = \bigcap_{i=1}^{n} I_n$.

הגדרת המספר e

$$\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = e$$

שימוש בחישוב גבולות:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{3n}{n^2+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n^2+1}{3n}}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\frac{n^2+1}{3n}}\right)^{n\cdot\frac{\frac{n^2+1}{3n}}{\frac{n^2+1}{3n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{\frac{n^2+1}{3n}}\right)^{\frac{n^2+1}{3n}}\right)^{\frac{n}{\frac{1}{\frac{n^2+1}{3n}}}} = \lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{\frac{n^2+1}{3n}}\right)^{\frac{n^2+1}{3n}}\right)^{\frac{3n^2}{n^2+1}} = (e^{-1})^3 = e^{-3}$$

אם a_n חיובית ו- $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=L$. אזי:

1) אם $L<1$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.
2) אם $L>1$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.
3) אם $L=1$ ***<u>אין מסקנה</u>***.

<u>דוגמא:</u>

חשב את $\lim_{n\to\infty}a_n$ כאשר $a_n=\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}$.

<u>פתרון:</u>

נשתמש במבחן השורש:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{n^2}{\left(2+\frac{1}{n}\right)^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{2}{n}}\to 1}{2+\frac{1}{n}\to 2}=\frac{1}{2}$$

לכן $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.

מבחן המנה

אם a_n חיובית ו- $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=L$. אזי:

1) אם $L<1$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=0$.
2) אם $L>1$ אזי $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.
3) אם $L=1$ ***<u>אין מסקנה</u>***.

<u>דוגמא:</u>

חשב את $\lim_{n\to\infty}a_n$ כאשר $a_n=\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{n!}$.

<u>פתרון:</u>

נשתמש במבחן המנה:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{(n+1)!}}{\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{(n)!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{n+1}=2$$

לכן $\lim_{n\to\infty}a_n=\infty$.

תת-סדרות

<u>הגדרה</u>

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כלשהי ותהי $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרת מספרים טבעיים עולה ממש, אזי נקרא ל $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ תת סדרה של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

<u>משפט</u>

1) תהי סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת לגבול L, אזי כל תת סדרה שלה תתכנס ל- L.

2) תהי סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת ל $\infty(-\infty)$, אזי כל תת סדרה שלה תתכנס ל $\infty(-\infty)$.

<u>מסקנה:</u>

אם לסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש 2 תת-סדרות המתכנסות לגבולים שונים אזי לא קיים גבול לסדרה (במובן הרחב).

<u>הגדרה</u>

המספר $L\in(-\infty,\infty)$ נקרא גבול חלקי של סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ אם קיימת תת סדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ המתכנסת ל $L\in(-\infty,\infty)$.

<u>משפט</u>

1) L הוא גבול חלקי של סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\Leftrightarrow$ כל סביבה של L מכילה אינסוף איברים מ- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

2) $\infty(-\infty)$ הוא גבול חלקי של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ $\Leftrightarrow$ כל סביבה של $\infty(-\infty)$ מכילה אינסוף איברים מאיברי הסדרה.

<u>משפט (בולצאנו-ויירשטראס)</u>

1) לכל סדרה אינסופית חסומה יש תת סדרה המתכנסת לגבול סופי.
2) לכל סדרה אינסופית שאינה חסומה מלעיל יש תת סדרה המתכנסת ל- ∞.
3) לכל סדרה אינסופית שאינה חסומה מלרע יש תת סדרה המתכנסת ל- $(-\infty)$.

<u>משפט</u>

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הצר $\Leftrightarrow$ ל- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש גבול חלקי יחיד.

<u>משפט</u>

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הרחב $\Leftrightarrow$ ל- $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ יש גבול חלקי יחד במובן הרחב.

<u>הגדרה</u>

הגבול העליון (תחתון) של סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ הוא החסם העליון (תחתון) של קבוצות הגבולות החלקיים של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. נסמן: גבול עליון - $\overline{\lim} a_n$, גבול תחתון - $\underline{\lim} a_n$.

משפט

הגבול העליון והגבול התחתון של סדרה נתונה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ הם בעצמם גבולות חלקיים של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ולכן הם בעצם ה-max וה-min של קבוצת הגבולות החלקיים של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

משפט

סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הצר ל- L או במובן הרחב ל- $\pm\infty$ $\Leftrightarrow$ $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n = L, \infty, -\infty$.

הגדרה

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה אינסופית. נסמן ב- S את קבוצת הגבולות החלקיים של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

מסקנה:

משפט בולצאנו-ויירשטראס קובע כי S אינה ריקה.

משפט

1) אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל אזי $\overline{\lim} a_n = \max S$.

2) אם $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ חסומה מלעיל אזי $\underline{\lim} a_n = \min S$.

משפט

אם $c < \underline{\lim} a_n$, אזי כמעט לכל n $c < a_n$.

אם $c < \overline{\lim} a_n$, אזי כמעט לכל n $c > a_n$.

תנאי קושי להתכנסות

אומרים שסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את תנאי קושי להתכנסות אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m, n > n_0$ מתקיים $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

תנאי קושי להתבדרות

אומרים שסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את תנאי קושי להתכנסות אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $n_0 \in \mathbb{N}$ כך שלכל $m, n > n_0$ מתקיים $|a_m - a_n| \geq \varepsilon$.

משפט

סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במובן הצר $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מקיימת את תנאי קושי להתכנסות סדרות.

קבוצות של נקודות ב- $\mathbb{R}$

<u>הגדרה</u>

תהי A קבוצת נקודות ב- $\mathbb{R}$. נאמר כי $\alpha \in \mathbb{R}$ היא נקודת הצטברות של A אם לכל $\varepsilon > 0$ יש $x \in A$ המקיים $x \neq \alpha$ וגם $|x-\alpha| < \varepsilon$.

<u>הערה</u>

אם $\alpha \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של $A \subseteq \mathbb{R}$ אזי לכל $\varepsilon > 0$ קיימות אינסוף נקודות שונות ב- A עבורן מרחקן מ- α קטן מ- ε.

<u>משפט (בולצאנו-ויירשטראס עבור קבוצות נקודות)</u>

לכל קבוצה <u>אינסופית</u> חסומה יש נקודת הצטברות (אחת לפחות).

<u>משפט</u>

תהי a נקודת הצטברות של A, אזי קיימת סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ של איברים כך שלכל n מתקיים כי $a_n \in A$ וכן $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

<u>משפט</u>

קבוצה פתוחה – המשלים של קבוצה סגורה – היא קבוצה שבה לכל נקודה בקבוצה יש סביבה בתוך הקבוצה.

<u>משפט</u>

קבוצה סגורה – המשלים של קבוצה פתוחה – קבוצה המכילה את כל נקודות ההצטברות שלה.

<u>הערות:</u>

- קבוצה A שהיא קטע פתוח איננה קבוצה סגורה.
- קבוצה A שהיא קטע סגור היא כן קבוצה סגורה.

<u>משפט</u>

לכל קבוצה לא ריקה יש min וכן max.

<u>משפט</u>

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה ותהי α נקודת הצטברות של $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ אזי α היא גבול חלקי של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

פונקציות

<u>הגדרה</u>

<u>פונקציה</u> הנה שלשה סדורה (A,B,G) כאשר

A - תחום הפונקציה. הקבוצה עליה מפעילים פעולה מסוימת שהגדרנו.

B - טווח הפונקציה. הקבוצה שממנה בוחרים איברים שמוחזרים מהפעלת הפעולה שהגדרנו על איברי תחום הפונקציה.

G - גרף הפונקציה. הכלל אותו אנו מגדירים.

או:

תהינה A ו-B שתי קבוצות כלשהן. פונקציה f מ-A ל-B (מסומן $f:A\to B$) היא כלל המתאים לאברים $x\in A$ איברים מ-B כך שלכל $x\in A$ אליו מותאם אבר יש רק אבר אחד ויחיד $f(x)\in B$ המתאים לו.

A יקרא התחום של f. B יקרא הטווח של f. $f(A)=\{f(x):x\in A\}\subseteq B$ יקרא התמונה של f.

<u>הגדרה</u>

לתכונה שבה מתאימים לאיבר ב-A איבר יחיד ב-B קוראים חד ערכיות: $f(x)\neq f(y)\Leftarrow x\neq y$.

<u>הגדרה</u>

אם עבור $f:A\to B$ מתקיים כי אם $f(x)=f(y)$ אזי $x=y$, נאמר כי f היא חד-חד-ערכית.

<u>הגדרה</u>

לקבוצת הערכים $x\in A$ שאפשר להכניס לתוך f נקרא תחום ההגדרה של f.

<u>הגדרה</u>

$f:A\to B$ תקרא שלמה אם תחום ההגדרה שלה הוא כל A, והיא תקרא על אם $f(A)=B$.

<u>הגדרה</u>

אם $f(x)$ חח"ע, שלמה ועל אז ניתן לדבר על הפונקציה ההפוכה $f^{-1}(x)$ כך שאם $f:A\to B$ ו-$f(x)=y$ אזי $f^{-1}:B\to A$, $f^{-1}(y)=x$.

הערה: אם f לא חח"ע אזי f^{-1} לא תהיה חד ערכית ואז היא לא תענה על הגדרת הפונקציה.

הערה: אפשר לצמצם את התחום ואת הטווח לתחום ההגדרה של f והתמונה שלה ולקבל פונקציה שלמה ועל.

<u>הגדרה</u>

$f:R\to R$ תיקרא מונוטונית...

- עולה ממש, אם לכל $x<y$ $f(x)<f(y)$.
- לא יורדת, אם לכל $x<y$ $f(x)\le f(y)$.
- לא עולה, אם לכל $x<y$ $f(x)\ge f(y)$.
- יורדת ממש, אם לכל $x<y$ $f(x)>f(y)$.

<u>הגדרה</u>

אם $f:A\to B$, $g:B\to A$, ניתן להגדיר את ההרכבה $g\circ f:A\to C$ ע"י $g\circ f(x)=g\big(f(x)\big)$.

<u>הגדרה</u>

תהי $0<\delta$ אזי לקבוצה $\{x:0<|x-x_0|<\delta\}$ קוראים סביבה מנוקבת של x_0 ברדיוס δ.

פונקציה זוגית ואיזוגית

אנו נקרא לפונקציה זוגית אם מתקיים $f(-x)=f(x)$

אנו נקרא לפונקציה אי-זוגית אם מתקיים $f(-x)=-f(x)$

<u>הערה</u>

אם פונקציה היא אי-זוגית אז כך גם ההופכית.

<u>הערה</u>

הרכבה של פונקציה זוגית עם אי-זוגית = אי זוגית.

<u>הערה</u>

פונקציה יכולה להיות לא זוגית ולא אי – זוגית.

פונקציה מחזורית

פונקציה נקראת מחזורית אם מתקיים $f(x\pm T)=f(x)$ כאשר T הוא המחזור הראשי הקטן ביותר.

<u>הערה</u>

בפונקציה קבועה אין מחזור ראשי.

פונקציות מיוחדות

<u>פונקציה המקיימת תנאי ליפשיץ</u>

פונקציה f נקראת ליפשיצית (המקיימת תנאי ליפשיץ) אם עבור כל x,y בתחום הפונקציה מתקיים:
$|f(x)-f(y)|\le k|x-y|$.

<u>משפט</u>

פונקציה ליפשיצית רציפה במידה שווה.

<u>פונקציה המקיימת תנאי הלדר</u>

פונקציה f נקראת מקיימת תנאי הלדר אם עבור A,μ חיוביים וממשיים מתקיים:
$|f(x)-f(y)|\le A|x-y|^{\mu}$.

גבולות של פונקציות

<u>הגדרה (הגדרת הגבול עפ"י קושי)</u>
תהי f פונקציה המוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0. נסמן את הגבול של f ב- x_0 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ אם לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ (המתאים ל- ε ול- x_0) כך שאם x מקיים $0<|x-x_0|<\delta$ אזי $|f(x)-l|<\varepsilon$.

הערה: גבול הפונקציה בנקודה x_0 אינו מושפע כלל מערך הפונקציה בנקודה x_0 גם אם הפונקציה מוגדרת בנקודה x_0.

<u>הגדרה (הגדרת הגבול עפ"י היינה)</u>
תהי f מוגדרת בסביבה מנוקבת של x_0. נאמר כי $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ אם לכל סדרה $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ המקיימת $x_n \xrightarrow{n\to\infty} x_0$ וכן $x_n\neq x_0$ $\forall n$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=l$.

<u>משפט</u>
הגדרת הגבול של קושי (הראשונה) והגדרת הגבול של היינה שקולות.

<u>הגדרה</u>
$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty(-\infty)$ אם לכל M יש $\delta>0$ כך שלכל x המקיים $0<|x-x_0|<\delta$ יתקיים $M<f(x)$ $(M>f(x))$.

<u>הגדרה</u>
$\lim\limits_{x\to\infty(-\infty)} f(x)=l$ אם לכל $\varepsilon>0$ יש N כך שלכל N<X (X<N) יתקיים $|f(x)-l|<\varepsilon$.

<u>הגדרה</u>
$\lim\limits_{x\to\infty(-\infty)} f(x)=\infty(-\infty)$ אם לכל M יש N כך שאם X>N (X<N) אזי $M<f(x)$ $(M>f(x))$.
הערה: באותו אופן ניתן גם להגדיר גבולות בסדרות עפ"י היינה.

<u>הגדרה</u>
תהי f פונקציה המוגדרת ב- $(x_0,x_0+\delta)$ $[(x_0-\delta,x_0)]$ אזי הגבול מימין (משמאל) של $f(x)$ ב- x_0 הוא l אם לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta_1>0$ כך שאם x מקיים $x_0<x<x_0+\delta_1$ $(x_0-\delta_1<x<x_0)$ אזי $|f(x)-l|<\varepsilon$.

<u>משפט</u>
תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת ב- $0<|x-x_0|<r$ אזי $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=l$.

<u>משפט</u>
אם נתון כי $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$ וכן $P<l$ $(P>l)$ אזי יש סביבה מנוקבת של x_0 שבה $P<f(x)$ $(P>f(x))$.

משפט

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c = c$.
2. אם $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = F$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = G$, אזי:
   1. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\pm g(x)\big) = F \pm G$.
   2. $\lim\limits_{x\to x_0}\big(f(x)\cdot g(x)\big) = F \cdot G$.
   3. $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{F}{G}$ ($g(x)\neq 0$, $G\neq 0$).

בסביבה מנוקבת של x_0 .

משפט

אם $g(x)\le f(x)\le h(x)$ עבור כל x המקיים $0<|x-x_0|<\delta$ ($0<\delta$ כלשהו), אזי אם $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = l = \lim\limits_{x\to x_0} h(x)$ נקבל $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$.

הגדרה

תהי f פונקציה המוגדרת באיזשהי קבוצה ב- $S\in R$. נתבונן בקבוצה $\{f(x): x\in S\}$ אזי נוכל לדבר על:

- חסימות הפונקציה.
- חסם מלעיל וחסם עליון.
- חסם מלרע וחסם תחתון.
- מקסימום ומינימום (גלובליים).

משפט

תהי $f: R\to R$. אם $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$ אזי יש ל- x_0 סביבה שבה $f(x)$ חסומה.

רציפות

<u>הגדרה</u>

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת x_0 (לא מנוקבת). נאמר כי $f(x)$ רציפה ב- x_0 (רציפות נקודתית) אם $\lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$.

<u>פורמלית</u>: לכל $\varepsilon>0$ יש $\delta>0$ (שתלוי ב- ε וב- x_0) כך שלכל x המקיים $|x-x_0|<\delta$ יתקיים $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$. f תיקרא רציפה מימין אם $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=f(x_0)$ ותקרא רציפה משמאל אם $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=f(x_0)$. אם f מוגדרת ב- $[a,b]$ ומתקיים כי לכל $x\in(a,b)$ $f(x)$ רציפה ב- x_0 וכן $f(x)$ רציפה מימין ב- a ורציפה משמאל ב- b נאמר כי $f(x)$ רציפה ב- $[a,b]$.

<u>משפט</u>

תהיינה f ו- g שתי פונקציות רציפות ב- x_0 אזי $f\cdot g$, $f\pm g$, $\frac{f}{g}$ $(g\neq 0)$ רציפות ב- x_0.

<u>משפט</u>

אם f מוגדרת ב- (a,b) ואילו g מוגדרת ב- (c,d) כך שמתקיים $f((a,b))\subseteq(c,d)$ אזי אם $f(x)$ רציפה ב- $x_0\in(a,b)$ וכן $g(x)$ רציפה ב- $f(x_0)=y_0\in(c,d)$ אזי $g\circ f(x)$ רציפה ב- x_0.

סיווג נקודות אי-רציפות

תהי $f(x)$ פונקציה ו- x_0 נקודת אי-רציפות שלה אזי:

1) אם קיים $\lim_{x\to x_0} f(x)=l$ אזי אם $f(x_0)$ לא מוגדרת או ש- $f(x_0)\neq l$, נקרא ל- x_0 נקודת אי-רציפות סליקה.
2) אם קיימים וסופיים $\lim_{x\to x_0^+} f(x)=l^+$ וכן $\lim_{x\to x_0^-} f(x)=l^-$ ומתקיים $l^+\neq l^-$ נקרא ל- x_0 נקודת אי-רציפות מסוג I.
3) כל שאר נקודות אי הרציפות נקראות מסוג II.

<u>משפט</u>

אם $f(x)$ רציפה בסביבה של x_0 וכן $0<f(x_0)$ $\left(0>f(x_0)\right)$ אזי יש $0<\delta$ כך שלכל x בסביבת δ (לא מנוקבת) של x_0 יתקיים $0<f(x)$ $\left(0>f(x)\right)$.

<u>משפט (ערך הביניים של ויירשטראס)</u>

תהי f פונקציה רציפה המוגדרת ב- $[a,b]$ כך שמתקיים $f(a)f(b)<0$, אזי קיימת $c\in(a,b)$ כך ש- $f(c)=0$.

<u>משפט (ערך הביניים)</u>

תהי f פונקציה רציפה ב- $[a,b]$ ונניח כי $f(a)\le f(b)$, אזי לכל $f(a)\le\gamma\le f(b)$ קיימת c בקטע $[a,b]$ עבורה $f(c)=\gamma$.

או:

אם f רציפה בקטע הסגור $[a,b]$ ו- c הוא כל מספר בין $f(a)$ ל- $f(b)$ (כולל), אזי יש לפחות x אחד בקטע הסגור שמקיים $f(x)=c$.

<u>משפט (ויירשטראס 1)</u>

תהי f פונקציה רציפה ב- $[a,b]$, אזי f חסומה בקטע.

<u>משפט (ויירשטראס 2)</u>

אם f פונקציה רציפה ב- $[a,b]$ אזי f מחזירה שם max ו-min.

הערה: שני המשפטים האחרונים אינם נכונים אם $f(x)$ מוגדרת בקטע פתוח.

<u>משפט</u>

תהי f פונקציה רציפה ב- $[a,b]$, ו- $M=\max_{x\in[a,b]} f(x)$, $m=\min_{x\in[a,b]} f(x)$ אזי $f([a,b])=[m,M]$.

פונקציות מונוטוניות

משפט
תהי $f(x)$ פונקציה לא יורדת ב- (a,b), אזי תמיד קיימים לה במובן הרחב $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ו- $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.

f חסומה מלעיל $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)\in R$.

f חסומה מלרע $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)\in R$.

משפט
תהי $f(x)$ פונקציה לא יורדת ב-$[a,b[$, אזי תמיד קיימים $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ ו- $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)$.
הערה: שני המשפטים האחרונים נכונים גם אם $f(x)$ פונקציה לא עולה.

משפט
פונקציה רציפה המוגדרת בקטע היא חד-חד-ערכית $\Leftrightarrow$ היא פונקציה עולה ממש או יורדת ממש.

משפט
תהי f פונקציה רציפה עולה ממש (יורדת ממש) ב-$[a,b]$ ונניח כי $f(a)=c$, $f(b)=d$, אזי $f([a,b])=[c,d]$.

משפט
תהי f פונקציה רציפה עולה ממש (יורדת ממש) ב- (a,b) אזי $f((a,b))=(c,d)$ אם $c=\inf\limits_{x\in(a,b)} f(x)$, $d=\sup\limits_{x\in(a,b)} f(x)$.

משפט
$f:[a,b]\to[c,d]$, $f^{-1}:[c,d]\to[a,b]$. f רציפה ועולה ממש אזי f^{-1} רציפה ועולה ממש.

משפט
$f:(a,b)\to(c,d)$, $f^{-1}:(c,d)\to(a,b)$. f רציפה ועולה ממש אזי f^{-1} רציפה ועולה ממש.
הערה: שני המשפטים האחרונים נכונים גם אם f יורדת ממש.

רציפות במידה שווה

<u>הגדרת רציפות במידה שווה</u>

פונקציה f תיקרא רציפה במידה שווה בתחום S אם לכל $0<\varepsilon$ יש $0<\delta$ (שתלוי רק ב- ε) כך שאם $x_1, x_2 \in S$ מקיימים $|x_1-x_2|<\delta$ אזי $|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$.

<u>הגדרה רציפות נקודתית</u>

פונקציה f תיקרא רציפה בנקודה $x_0 \in S$ אם לכל $0<\varepsilon$ יש $0<\delta$ (שתלוי ב- ε וב- x_0) כך שאם x מקיים $|x-x_0|<\delta$ אזי $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$.

<u>הגדרה</u>

פונקציה f תיקרא רציפה נקודתית ב- S אם f רציפה בכל נקודה $x_0 \in S$.

<u>משפט</u>

אם f פונקציה רציפה במידה שווה בקטע I אזי f רציפה נקודתית בקטע I.

<u>משפט</u>

אם f רציפה בקטע סגור I, אזי f רציפה במידה שווה בקטע.

הלמה של היינה-בורל

<u>הגדרה</u>

כיסוי פתוח – תהי A קבוצת נקודות על הישר ותהי Σ מערכת של קטעים פתוחים σ. אנו נאמר שהמערכת Σ מכסה את A אם לכל $a \in A$ קיים קטע פתוח $\sigma \in \Sigma$ כך ש $a \in \sigma$.

<u>לדוגמא:</u>

המערכת $\Sigma = \left\{ \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{4}, \frac{4}{3}\right) \right\}$ מכסה את הקטע $[0,1]$.

<u>משפט (הלמה של היינה-בורל)</u>

אם מערכת אינסופית Σ של קטעים פתוחים σ מכסה את הקטע הסגור $[a,b]$ אזי קיימת תת מערכת סופית $\Sigma^* = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, ..., \sigma_n\}$ שגם היא מכסה את הקטע $[a,b]$.

נגזרות

<u>הגדרה</u>

תהי f פונקציה המוגדרת בסביבת x_0. נאמר כי f גזירה ב- x_0 אם קיים הגבול

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

<u>הגדרה</u>

אם f מוגדרת ב- $[x_0,x_0+\delta)$ $\left((x_0-\delta,x_0]\right)$ נאמר כי f גזירה מימין (משמאל) ב- x_0 עם הנגזרת $f_+'(x_0)$ $\left(f_-'(x_0)\right)$ אם קיים הגבול $f_+'(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$$\left(f_-'(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right).$$

<u>מסקנה</u>

$f'(x)$ קיימת $\Leftrightarrow$ $f_+'(x)=f_-'(x)$.

<u>הגדרה</u>

אם f גזירה בכל נקודה x_0 עבור קטע I נאמר כי f גזירה ב-I. כמו כן נתאים לכל x_0 את $f'(x_0)$ ואז נקבל פונקציה חדשה שתיקרא פונקצית הנגזרת בקטע I ותסומן $f'(x)$.

<u>הנגזרות המיידיות</u>

$\sin' x=\cos x$	$\arcsin' x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$arc\cot'(x)=\frac{-1}{1+x^2}$	$(e^x)'=e^x$
$\cos' x=-\sin x$	$\arccos' x=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\tan'(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$	$(\ln x)'=\frac{1}{x}$
$\sinh' x=\cosh x$	$\arctan'(x)=\frac{1}{1+x^2}$	$\cot'(x)=\frac{-1}{\sin^2 x}$	$(a^x)'=a^x\ln a$
$\cosh' x=\sinh x$			$(\log_a^x)'=\frac{1}{x\ln a}$

1) הנגזרת היא שיפוע הישר המשיק לגרף הפונקציה בנקודה $f(x_0)$ ($a=\tan\alpha$, α-הזוית בין הישר לציר ה-x).

2) נאמר כי $f(t)$ היא פונקציה המתארת את מקומו של חלקיק הנע על קו ישר כפונקציה של הזמן, אזי $f(t_1)$ ו- $f(t_2)$ הם 2 מקומות של החלקיק, $|f(t_2)-f(t_1)|$ הוא המרחק שעבר החלקיק, $|t_1-t_2|$ הוא פרק הזמן שעבר, ולכן $\left|\frac{f(t_2)-f(t_1)}{t_1-t_2}\right|$ יתן את המהירות הממוצעת של החלקיק בין הזמן t_1 ל- t_2. אם נשאיף את t_2 ל- t_1 נקבל את המהירות של החלקיק בזמן t_1 ולכן $f'(t)$ ההיא מהירות החלקיק בזמן t.

<u>משפט</u>

תהי f מוגדרת בסביבת x_0 וגזירה שם, אזי f רציפה ב- x_0.

<u>משפט</u>

אם f ו- g מוגדרות בסביבת x_0 וגזירות ב- x_0 עצמה וכן $c\in R$ קבוע אזי $f\pm g$, $f\cdot g$, $c\cdot f$ ו- $\frac{f}{g}$ ($g\neq 0$) גזירות ב- x_0 ומתקיים:

1. $(f\pm g)'(x_0)=f'(x_0)\pm g'(x_0)$.
2. $(c\cdot f)'(x_0)=c\cdot f'(x_0)$.
3. $(f\cdot g)'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0)$.
4. $\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=\frac{-g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.
5. $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\frac{f'(x_0)\cdot g(x_0)-f(x_0)\cdot g'(x_0)}{g^2(x_0)}$.

נגזרת הפונקציה ההפוכה

<u>משפט</u>

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבת x_0, $f(x_0)=y_0$. אם:

1. $f(x)$ גזירה ב- x_0 וכן $f^{'}(x_0)\neq 0$
2. קיימת הפונקציה ההפוכה $f^{-1}(y)$ והיא רציפה ב- y_0

אזי הפונקציה ההפוכה גזירה ב- y_0 ומתקיים $\left(f^{-1}(y_0)\right)^{'}=\dfrac{1}{f^{'}(x_0)}$.

<u>*פיתוח נוסף על נגזרות – קירוב לינארי*</u>

<u>הגדרה</u>

פונקציה $\alpha(x)$ תיקרא "o" קטן של x אם מתקיים $\dfrac{\alpha(x)}{x}\xrightarrow{x\to 0}0$.

<u>משפט</u>

אם $f(x)$ גזירה ב- x_0 אזי ניתן לכתוב $\Delta f=f^{'}(x_0)\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x$ באשר $\alpha(\Delta x)\xrightarrow{\Delta x\to 0}0$.

<u>משפט (כלל השרשרת / נגזרת לפונקציות מורכבות)</u>

תהי $f(x)$ גזירה ב- x_0 ו- $g(y)$ גזירה ב- $f(x_0)=y_0$ אזי $g\left(f(x)\right)$ גזירה ב- x_0 ומתקיים $\left(g\circ f(x_0)\right)^{'}=\left(g\left(f(x)\right)\right)^{'}=g^{'}\left(f(x_0)\right)\cdot f^{'}(x_0)=g^{'}(y_0)\cdot f^{'}(x_0)$.

נגזרות מסדר n

<u>הגדרה</u>

הנגזרת מסדר n של פונקציה $f(x)$ תסומן $f^{(n)}(x)$ ותוגדר באינדוקציה באופן הבא:

$f^{(0)}(x)=f(x)$.

אם עבור הנגזרת ה- $(n-1)$ קיבלנו $f^{(n-1)}(x)$ נגדיר את הנגזרת ה-n ע"י $f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$.

<u>משפט</u>

אם f ו- g גזירות n פעמים ו- $c\in R$ אזי:

1. $(f\pm g)^{(n)}=f^{(n)}\pm g^{(n)}$.
2. $(c\cdot f)^{(n)}=c\cdot f^{(n)}$.
3. $(f\cdot g)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f^{(k)}\cdot g^{(n-k)}$.

<u>הגדרה</u>

נאמר כי x_0 נקודת max (min) מקומי של $f(x)$ אם קיימת סביבה פתוחה של x_0 (סביבת δ של x_0) כך ש- $f(x)$ מוגדרת בסביבה ולכל x בסביבה $f(x)\le f(x_0)$ $\left(f(x)\ge f(x_0)\right)$.

<u>משפט (פרמה)</u>

אם f מוגדרת בסביבת x_0 כך ש- x_0 נקודת max מקומי או min מקומי אזי אם $f'(x_0)$ קיימת $f'(x_0)=0$.

<u>משפט (רול)</u>

אם f רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b) כך ש- $f(a)=f(b)$ אזי קיימת נקודה c כך ש- $f'(c)=0$.

<u>משפט (דרבו)</u>

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע הסגור $[a,b]$ אזי הנגזרת שלה מקבלת בפנים הקטע כל ערך הנמצא בין $f'_+(a)$ לבין $f'_-(b)$.

<u>משפט (לגרנז' – משפט הערך הממוצע)</u>

אם f רציפה ב- $[a,b]$ וגזירה ב- (a,b) אזי קיימת נקודה $c\in(a,b)$ כך ש- $f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

<u>משפט</u>

אם f מוגדרת ורציפה ב-I כך שלכל $x\in I$ $f'(x)=0$ אזי f קבועה.

<u>משפט (קושי – הכללה למשפט הערך הממוצע)</u>

אם f ו- g רציפות ב- $[a,b]$ וגזירות ב- (a,b) ואם $g'(x)\neq 0$ בקטע אזי:

1. $g(a)\neq g(b)$.

2. קיים $c\in(a,b)$ עבורו $\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f^{'}(c)}{g^{'}(c)}$.

משפט (כלל לופיטל עבור $\frac{0}{0}$)

אם f ו- g מוגדרות וגזירות בסביבת $(a,a+\delta)$ $(0<\delta)$ וכן $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+} g(x)=0$, אזי

אם קיים $\lim_{x\to a^+}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}=l$ וכן $g^{'}(x)\neq 0$ אזי $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

<u>הכללות</u>:

1) כלל לופיטל עובד גם כאשר הגבולות כולם הם משמאל ל- a: $\lim_{x\to a^-}$.

2) אם f ו- g מוגדרות בסביבה מנוקבת של x_0, $g^{'}(x)\neq 0$,

$\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ וכן $\lim_{x\to x_0}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}=l$ אזי $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

3) אם f ו- g גזירות ב- (a,∞), ונניח כי $g^{'}(x)\neq 0$ וכן $\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty} g(x)=0$

$\lim_{x\to\infty}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}=l$ אזי $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

משפט (כלל לופיטל עבור $\frac{\infty}{\infty}$)

תהיינה f ו- g מוגדרות ורציפות ב- $(a,a+\delta)$ $(0<\delta)$ וכן $\lim_{x\to a^+} f(x)=\lim_{x\to a^+} g(x)=\infty$ אזי אם

קיים $\lim_{x\to a^+}\frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)}=l$ וכן $g^{'}(x)\neq 0$ אזי $\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)}=l$.

הערה: גם במשפט זה מתקיימות ההכללות עבור $x\to a^+/a^-/\infty$ כמו במשפט הקודם.

חקירת פונקציה

משפט

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע (a,b). בכדי שהפונקציה תהיה קבועה בקטע הכרחי ומספיק שהנגזרת שלה תשווה לאפס באופן זהותי.

משפט

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע (a,b). בכדי שהפונקציה תהיה **לא יורדת** בקטע, הכרחי ומספיק שעבור כל $x \in (a,b)$ יתקיים $f'(x) \geq 0$.

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע (a,b). בכדי שהפונקציה תהיה **לא עולה** בקטע, הכרחי ומספיק שעבור כל $x \in (a,b)$ יתקיים $f'(x) \leq 0$.

משפט

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע (a,b). אם לכל $x \in (a,b)$ יתקיים $f'(x) > 0$ אזי הפונקציה $f(x)$ עולה ממש.

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע (a,b). אם לכל $x \in (a,b)$ יתקיים $f'(x) < 0$ אזי הפונקציה $f(x)$ יורדת ממש.

משפט

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע (a,b). בכדי ש $f(x)$ תהיה עולה ממש בקטע הכרחי ומספיק שיתקיימו שני התנאים:

1) $f'(x) \geq 0$ לכל $x \in (a,b)$.

2) הנגזרת $f'(x)$ אינה מתאפסת באופן זהותי באף קטע חלקי ל(a,b).

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה בקטע (a,b). בכדי ש $f(x)$ תהיה יורדת ממש בקטע הכרחי ומספיק שיתקיימו שני התנאים:

1) $f'(x) \leq 0$ לכל $x \in (a,b)$.

2) הנגזרת $f'(x)$ אינה מתאפסת באופן זהותי באף קטע חלקי ל(a,b).

אקסטרמום של פונקציה

<u>הגדרה</u>

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של הנקודה x_0. אנו אומרים ש $f(x)$ מקבלת בנקודה x_0 מקסימום אם קיימת סביבה של x_0 שעבור כל x השייך אליה מתקיים $f(x) \le f(x_0)$.

הנקודה x_0 נקראת **<u>נקודת מקסימום מקומי</u>**.

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של הנקודה x_0. אנו אומרים ש $f(x)$ מקבלת בנקודה x_0 מינימום אם קיימת סביבה של x_0 שעבור כל x השייך אליה מתקיים $f(x) \ge f(x_0)$.

הנקודה x_0 נקראת **<u>נקודת מינימום מקומי</u>**.

נקודות מינימום ומקסימום מקומיים נקראות נקודות **<u>אקסטרמום</u>**.

<u>הגדרה</u>

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של הנקודה x_0 וגזירה ב- x_0. הנקודה x_0 נקראת נקודה סטציונרית של $f(x)$ אם $f'(x) = 0$.

<u>משפט</u>

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בקטע (a,b) ויהי $x_0 \in (a,b)$. אם x_0 היא נקודת אסקטרמום של $f(x)$ אזי x_0 היא נקודה סטציונרית של $f(x)$ או ש $f(x)$ איננה גזירה כלל ב x_0.

<u>הגדרה</u>

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה של הנקודה x_0, פרט אולי ל- x_0 עצמה. אם קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < h < \delta$ $f(x_0 - h) < 0$ ו- $f(x_0 + h) > 0$ אזי אומרים ש $f(x)$ משנה את סימנה מ- $(-)$ ל- $(+)$ בעוברה דרך הנקודה x_0.

<u>משפט</u>

תהי $f(x)$ פונקציה רציפה בסביבה מסוימת של הנקודה x_0 (כולל x_0 עצמה) וגזירה בסביבה, פרט אולי ל- x_0 עצמה.

א) אם הנגזרת $f'(x)$ משנה את סימנה כשהיא עוברת דרך x_0 אזי x_0 נקודת אקסטרמום אמיתי של $f(x)$.
   אם השינוי הוא מ- $(-)$ ל- $(+)$ - נקודת מינימום מקומי.
   אם השינוי הוא מ- $(+)$ ל- $(-)$ - נקודת מקסימום מקומי.

ב) אם קיימת סביבה של x_0 שבה ל- $f'(x)$ סימן קבוע (מחוץ אולי ל- x_0 עצמה) אזי ב- x_0 אין נקודת אקסטרמום.

<u>משפט</u>

תהי $f(x)$ המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה x_0 וגזירה ב- x_0 פעמיים. אם $f'(x_0)=0$ ו- $f''(x_0)\neq 0$ אזי ב- x_0 יש אקסטרמום אמיתי.

מקסימום אם $f''(x_0)<0$.

מינימום אם $f''(x_0)>0$.

<u>משפט</u>

תהי $f(x)$ פוקנציה הגזירה n פעמים בנקודה x_0 ונניח ש:

$$f'(x_0)=f''(x_0)=..=f^{n-1}(x_0)=0$$

$$f^{n}(x_0)\neq 0$$

אזי

- אם n איזוגי ב x_0 אין נקודת אקסטרמום.
- אם n זוגי ב x_0 יש נקודת אקסטרמום:
  - מקסימום אם $f^{n}(x_0)<0$
  - מינימום אם $f^{n}(x_0)>0$

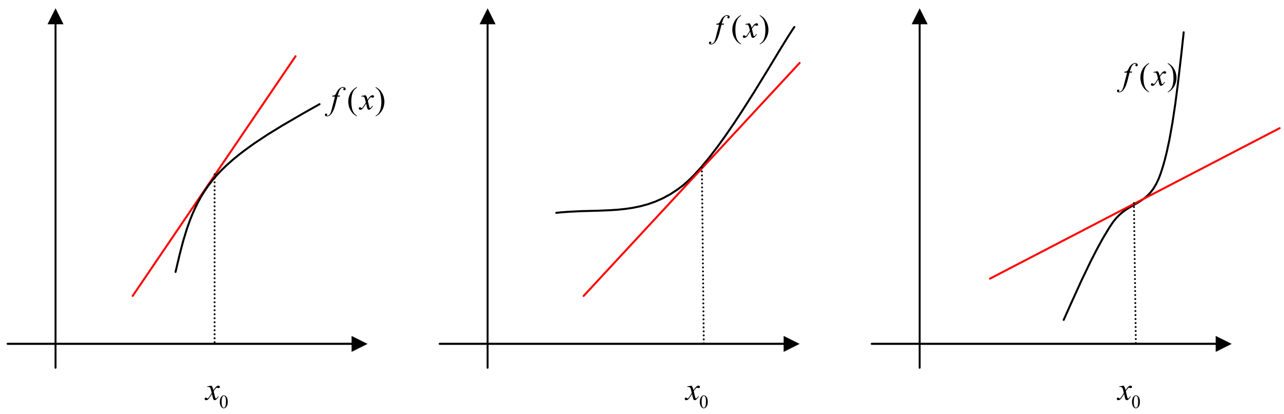
קמירות קעירות ונקודות פיתול

<u>הגדרות</u>

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה x_0 ונניח שקיימת לה נגזרת סופית בנקודה x_0. נאמר כי f **<u>קמורה</u>** ב- x_0 אם יש סביבה של x_0 בה $f(x) \geq f'(x_0)(x-x_0)$.

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה x_0 ונניח שקיימת לה נגזרת סופית בנקודה x_0. נאמר כי f **<u>קעורה</u>** ב- x_0 אם יש סביבה של x_0 בה $f(x) \leq f'(x_0)(x-x_0)$.

תהי $f(x)$ פונקציה המוגדרת בסביבה מסוימת של הנקודה x_0 תהי אם קיימת סביבה ימנית של x_0 שבה הפונקציה קמורה וסביבה שמאלית של x_0 בה הפונקציה קעורה אזי נאמר ש- x_0 נקודת פיתול של $f(x)$.



נקודת פיתול | נקודת קמירות | נקודת קעירות

<u>משפט</u>

תהי $f(x)$ פונקציה גזירה פעמיים בנקודה x_0 ויהי $f''(x_0) \neq 0$. אם $f''(x_0) > 0$ הפונקציה קמורה בנקודה x_0, ואם $f''(x_0) < 0$ הפונקציה קעורה בנקודה x_0.

<u>משפט</u>

תהי $f(x)$ פוקנציה הגזירה n פעמים בנקודה x_0 ונניח ש:

$$f'(x_0) = f''(x_0) = .. = f^{n-1}(x_0) = 0$$
$$f^{n}(x_0) \neq 0$$

אזי

- אם n איזוגי ב x_0 קיימת נקודת התפתלות של $f(x)$.
- אם n זוגי ב x_0 אזי לא קיימת נקודת התפתלות של $f(x)$.

קמירות וקעירות בקטע

תהי f מוגדרת על הקטע המוכלל I. f תקרא קמורה על I אם לכל $x, y \in I$ ולכל $0 < \lambda < 1$ מתקיים:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \le \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

תהי f מוגדרת על הקטע המוכלל I. f תקרא קעורה על I אם לכל $x, y \in I$ ולכל $0 < \lambda < 1$ מתקיים:

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \ge \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

אסימפטוטות

<u>אסימפטוטה אנכית</u>

הישר $x = x_0$ נקרא אסימפטוטה אנכית ל f אם $\lim_{x\to x_0}\left|f(x)\right| = \infty$.

<u>אסימפטוטה משופעת</u>

הישר $y = mx + n$ נקרא אסימפטוטה משופעת ל- f באינסוף אם $\lim_{x\to\infty}(f(x) - (mx+n)) = 0$.

נוסחאות לחישוב:

$m = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, אם זה קיים וסופי נמצא את הקבוע n:

$$n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - mx)$$

הערה: צריך לזכור לבדוק גם לאינסוף וגם למינוס אינסוף!

טור טיילור

הפיתוח של טור טיילור הוא:

$$f(x)=f(a)+f'(a)(x-a)+\frac{f''(a)(x-a)^2}{2!}+\frac{f'''(a)(x-a)^3}{3!}+\ldots+\frac{f^{n-1}(a)(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}+R_n$$

כאשר R_n הוא השארית אחרי n איברים. השארית יכולה להופיע בשתי צורות:

1) צורת לגרנז': $R_n=\frac{f^{(n)}(\xi)(x-a)^n}{n!}$

2) צורת קושי: $R_n=\frac{f^{(n)}(\xi)(x-\xi)^{n-1}(x-a)}{(n-1)!}$

כאשר הערך ξ שיכול להיות שונה בשתי צורות השארית, הוא בין a ו- x. יש צורך שלפונקציה יהיו n נגזרות רציפות לפחות.

פיתוחים שונים:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots\left(-\infty<x<\infty\right)$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}\ldots\left(-1<x\le 1\right)$$

$$\sin(x)=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5}-\frac{x^7}{7}+\ldots\left(-\infty<x<\infty\right)$$

$$\cos(x)=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{4}-\frac{x^6}{6}+\ldots\left(-\infty<x<\infty\right)$$

שיטת ניוטון-רפסון

<u>משפט</u>

תהי f רציפה ב- $[a,b]$ כך ש $f(a)<0<f(b)$ כך ש f גזירה פעמיים בקטע (a,b). נניח ש $f'(x_0)>0$ וגם $f''(x_0)>0$ לכל $a<x<b$ (כלומר $f'(x)$ מונוטונית עולה ב- (a,b)). נסמן ב c את הנקודה היחידה בקטע כך ש $f(c)=0$ אזי:

1) הסדרה $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת ע"י שיטת ניוטון-רפסון מקיימת $\lim_{n\to\infty} x_n = c$.

2) הערכת השגיאה $|x_{n+1}-c| \le \frac{M}{2m}|x_n-c|^2$,

כאשר M,m הם
$$M=\max_{a\le x\le b} f''(x)$$
$$m=\min_{a\le x\le b} f''(x)$$

<u>נוסחא לאיטרציות ניוטון-רפסון:</u>

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$