

UNIVERSIDADE FEDERAL DO RIO GRANDE DO SUL  
INSTITUTO DE FÍSICA

# Sistemas de Ermakov Generalizados, Simetrias e Invariantes Exatos \*

Fernando Haas

Tese realizada sob orientação do Prof. João Goedert<sup>†</sup> e apresentada ao Instituto de Física da UFRGS em preenchimento final dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Ciências.

Porto Alegre  
1998

---

\* Trabalho parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Ensino Superior (CAPES) e pela Financiadora de Estudos e Projetos (FINEP).

<sup>†</sup> Professor da Universidade do Vale do Rio dos Sinos – UNISINOS, a partir de agosto de 1997.

À Cleo

## AGRADECIMENTOS

- A João Goedert, que, pleno de paciência, disposição e sabedoria, soube estabelecer uma relação de liberdade favorável às discussões.
- À Ruth de Souza Schneider, por ter assumido responsabilidades como orientadora e supervisora em momentos de necessidade.
- À equipe da biblioteca deste instituto, pelo auxílio técnico.

## RESUMO

É feita uma revisão crítica das propriedades fundamentais dos sistemas de Ermakov, compreendendo a lei de superposição não linear e a linearização dos sistemas de Ermakov nos casos em que a função frequência depende apenas do tempo. Apresentam-se as aplicações mais relevantes dos sistemas de Ermakov na mecânica quântica. A teoria de Lewis e Riesenfeld é apresentada e utilizada na procura de estados coerentes e fases de Berry geométricas para sistemas quânticos.

Sistemas de Ermakov generalizados são sistemas de Ermakov cuja função frequência depende não apenas do tempo, mas também das variáveis dinâmicas e suas derivadas. Encontram-se sistemas de Ermakov generalizados que admitem linearização. Com isto, são ampliados resultados previamente conhecidos na literatura, concernentes aos casos em que a frequência depende apenas do tempo. Analisa-se a estrutura do grupo de simetrias de Lie geométricas dos sistemas de Ermakov generalizados. São consideradas algumas extensões dos sistemas de Ermakov a muitas dimensões, com ênfase nas abordagens baseadas em simetrias de Lie. É considerada a questão da existência de formulações Hamiltonianas associadas aos sistemas de Ermakov generalizados, com aplicação a um problema de três corpos com potencial de Calogero e a um sistema admitindo simetria dinâmica. Aplicando o teorema de Noether aos sistemas de Ermakov generalizados Hamiltonianos, encontra-se uma nova classe de sistemas dinâmicos completamente integrável. É obtida a solução exata das equações de movimento clássica e quântica para esta nova classe de sistemas.

O teorema de Noether é aplicado ao movimento não relativístico de uma partícula carregada sob ação de um campo eletromagnético geral. Com isto, obtém-se um par de equações diferenciais parciais lineares satisfeitas pelos campos elétrico e magnético compatíveis com a existência de simetrias de Noether geométricas. A solução deste par de equações é analisada com profundidade no caso em que o campo magnético é devido a um monopolo magnético fixo na origem. É obtido o grupo de simetrias de Noether e as constantes de movimento exatas associadas. Aplica-se este resultado aos sistemas de uma partícula carregada sob ação de um monopolo magnético com a superposição de forças harmônica ou gravitacional dependentes do tempo. Em ambos os casos, considera-se uma força centrífuga extra.

## ABSTRACT

The key properties of Ermakov systems are critically reviewed, including the nonlinear superposition law relating the solutions for the equations of motion and the linearization of Ermakov systems with frequency function depending only on time. The most relevant applications of Ermakov systems in quantum mechanics are presented. The Lewis and Riesenfeld theory is reviewed and used in the search for coherent states and geometric Berry's phases for quantum systems.

Generalized Ermakov systems are Ermakov systems with frequency function depending also on the dynamical variables and their time derivatives. The linearization of generalized Ermakov systems is considered, extending known results on the literature concerning usual Ermakov systems. The Lie group structure of generalized Ermakov systems is analysed. Multi-dimensional extensions of generalized Ermakov systems obtained by Lie symmetry analysis are studied. New Hamiltonian formulations associated to generalized Ermakov systems are presented, with application to a three-body Calogero potential and to a system possessing dynamical symmetry. Noether's theorem applied to Hamiltonian generalized Ermakov systems leads to a new completely integrable dynamical system. The exact solutions for the corresponding classical and quantum equations of motion are found.

Noether's theorem is applied to nonrelativistic charged particle motion under general electromagnetic fields. The electromagnetic fields compatible with Noether point symmetries are shown to satisfy a pair of coupled, linear partial differential equations. The solution for this pair of linear equations is found when the magnetic field is due to a magnetic monopole fixed at the origin. The associated Noether symmetries and constants of motion are obtained. The result is applied to the motion of a charged particle under a magnetic monopole with superimposed time-dependent harmonic or gravitational forces. In both cases the influence of an additional centrifugal force is allowed.

## CONTEÚDO

<i>RESUMO</i> . . . . .	iv
<i>ABSTRACT</i> . . . . .	v
1. <i>Introdução</i> . . . . .	1
2. <i>Sistemas de Ermakov</i> . . . . .	15
2.1 Lei de superposição não linear . . . . .	15
2.2 Linearização . . . . .	21
2.3 Teoria de Lewis e Riesenfeld . . . . .	29
2.4 Estados coerentes . . . . .	40
2.5 Fases geométricas e invariantes de Ermakov . . . . .	49
2.5.1 Considerações gerais . . . . .	49
2.5.2 O oscilador harmônico generalizado dependente do tempo . . . . .	53
3. <i>Simetrias de Lie para sistemas de Ermakov</i> . . . . .	60
3.1 Simetrias de Lie para equações diferenciais ordinárias . . . . .	60
3.2 Sistemas de Ermakov com simetrias de Lie . . . . .	73
3.3 Generalizações adicionais dos sistemas de Ermakov . . . . .	81
4. <i>Sistemas de Ermakov Hamiltonianos</i> . . . . .	91
4.1 Formulações Hamiltonianas para sistemas de Ermakov . . . . .	92
4.1.1 Formalismo Hamiltoniano . . . . .	93
4.2 Aplicações . . . . .	98
4.2.1 Um sistema de Calogero como um sistema de Ermakov Hamiltoniano . . . . .	98
4.2.2 Um potencial com simetria dinâmica . . . . .	100

---

4.3	Teorema de Noether . . . . .	102
4.4	Solução exata . . . . .	108
4.4.1	Solução clássica exata . . . . .	108
4.4.2	Solução quântica exata . . . . .	110
5.	<i>Simetrias de Noether para o movimento não relativístico da partícula carregada</i>	116
5.1	Simetrias de Noether para a partícula carregada sob um campo eletromagnético geral . . . . .	117
5.2	O caso do monopolo magnético . . . . .	119
5.3	Campos elétricos compatíveis . . . . .	123
5.3.1	O caso em que $\rho \neq 0$ . . . . .	123
5.3.2	O caso em que $\rho = 0$ . . . . .	125
5.4	Aplicações . . . . .	127
5.4.1	Perturbação por um potencial harmônico dependente do tempo . . . . .	128
5.4.2	Sistema de um monopolo magnético com um potencial gravitacional dependente do tempo . . . . .	132
6.	<i>Conclusão</i> . . . . .	139
A.	<i>Solução para o gerador de simetrias de Noether</i> . . . . .	144
	<i>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</i> . . . . .	147

## CONTEÚDO

## Capítulo 1

# INTRODUÇÃO

A descoberta de invariantes exatos (constantes de movimento exatas ou integrais primeiras exatas) é de importância fundamental para qualquer sistema físico. Um número suficiente de invariantes exatos implica num comportamento predizível da dinâmica, sem ocorrência de caos. Por outro lado, o entendimento dos sistemas integráveis pode auxiliar na compreensão dos sistemas caóticos. Isto ocorre quando estes são obtidos perturbando os sistemas de comportamento regular. De resto, a obtenção de invariantes exatos tem grande relevância em áreas como a física de plasma não colisional [1, 2], que tem no sistema de Vlasov-Maxwell o seu modelo fundamental. Nesta descrição, a função distribuição é uma função dos invariantes exatos do problema. No dizer de Leach [3], o prazer estético de determinar constantes de movimento exatas une-se ao interesse prático de construir um modelo teórico para a fusão termonuclear controlada. Além disso, constantes de movimento exatas são de importância em diversas outras áreas que não a física de plasma. Sem a pretensão de esgotar o tema, invariantes exatos encontram aplicação no estudo do movimento de partículas carregadas sob campos eletromagnéticos [4], na descrição de campos eletromagnéticos tridimensionais com topologia toroidal [5], na análise de cavidades de Fabry-Pérot [6] e na obtenção do propagador de Feynman [7] ou das fases de Berry [8] para problemas quânticos. A existência de constantes de movimento exatas pode facilitar também a construção de formalismos Hamiltonianos [9]–[12].

Sem dúvida, o trabalho de Lewis e Riesenfeld [13]–[24] desencadeou este interesse recente no estudo dos invariantes exatos. Lewis e Riesenfeld [24] construíram um método para obter a solução exata da equação de Schrödinger a partir de um operador Hermitiano invariante distinto do Hamiltoniano, em geral. Este método foi aplicado com sucesso [24] na quantização exata do oscilador harmônico dependente do tempo (OHDT) unidimensional. É interessante examinar o sistema de Lewis e Riesenfeld e o invariante exato correspondente. A motivação para isto não é apenas histórica. Na verdade, o sis-

tema de Lewis e Riesenfeld é um exemplo elementar dos sistemas de Ermakov [15], que são um dos temas centrais deste trabalho. A equação de movimento clássica do OHDT unidimensional é dada por

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0, \quad (1.1)$$

onde a frequência  $\omega(t)$  é uma função arbitrária do tempo. Um invariante exato associado a equação (1.1) é dado por [13, 14]

$$I = \frac{1}{2}(y\dot{x} - x\dot{y})^2 + \frac{k}{2}(x/y)^2, \quad (1.2)$$

onde  $k$  é uma constante arbitrária e a função  $y = y(t)$  satisfaz

$$\ddot{y} + \omega^2(t)y = k/y^3. \quad (1.3)$$

Verifica-se diretamente que se  $x$  satisfaz a equação (1.1) e  $y$  satisfaz a equação (1.3) então

$$dI/dt = 0, \quad (1.4)$$

ou seja,  $I$  de fato é uma constante de movimento.

Eliezer e Gray [16] encontraram uma interpretação para o invariante  $I$ . Segundo esta interpretação, a constância de  $I$  está associada a conservação do momentum angular de um OHDT bidimensional e isotrópico, cuja equação de movimento é dada por

$$\ddot{\mathbf{r}} + \omega^2(t)\mathbf{r} = 0 \quad , \quad \mathbf{r} = (x_1, x_2) \quad . \quad (1.5)$$

Introduzindo coordenadas polares via  $x_1 = r \cos \phi$ ,  $x_2 = r \sin \phi$ , obtém-se as equações de movimento

$$\ddot{r} - r\dot{\phi}^2 + \omega^2(t)r = 0, \quad (1.6)$$

$$r^2\dot{\phi} = L, \quad (1.7)$$

onde  $L$  é uma constante, igual à magnitude do momentum angular. Considerando uma das componentes da equação (1.5) e eliminando  $\dot{\phi}$  de (1.6) através da relação (1.7), obtém-se o sistema

$$\ddot{x}_1 + \omega^2(t)x_1 = 0, \quad (1.8)$$

$$\ddot{r} + \omega^2(t)r = L^2/r^3. \quad (1.9)$$

Este sistema é equivalente ao sistema de Ermakov (1.1)–(1.3), desde que sejam feitas as identificações

$$x_1 \rightarrow x \quad , \quad r \rightarrow y \quad , \quad L^2 \rightarrow k \quad . \quad (1.10)$$

O invariante de Ermakov correspondente é

$$I = \frac{1}{2}(x_1\dot{r} - r\dot{x}_1)^2 + \frac{L^2}{2}(x_1/r)^2 = \frac{L^2}{2}. \quad (1.11)$$

Ou seja, o OHDT bidimensional isotrópico pode ser formulado como um sistema de Ermakov, cujo invariante de Ermakov é proporcional ao quadrado do momentum angular.

O sistema (1.1–1.3) é um exemplo elementar de sistema de Ermakov, e o invariante exato  $I$  dado em (1.2) o correspondente invariante de Ermakov. As equações (1.1–1.3) e a constante de movimento  $I$  possuem uma longa história, iniciada com Ermakov [15] no século passado. Ermakov derivou o invariante exato  $I$  eliminando  $\omega$  entre as equações de movimento e efetuando alguns cálculos simples. O procedimento parte da eliminação da frequência entre as equações (1.1) e (1.3), o que leva a

$$y\ddot{x} - x\ddot{y} + kx/y^3 = 0. \quad (1.12)$$

Multiplicando a relação (1.12) pelo fator integrante  $(y\dot{x} - x\dot{y})$ , vem que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}(y\dot{x} - x\dot{y})^2 + \frac{k}{2}(x/y)^2 \right) = 0, \quad (1.13)$$

daí decorrendo a constância da integral primeira dada em (1.2).

Após Ermakov, Gambier [18] considerou as equações (1.1–1.3) em 1910 do ponto de vista da teoria das singularidades das equações diferenciais. Gambier mostrou que a equação para a variável  $\xi = y^2$  é linear, e deduziu o invariante exato dado em (1.2) no curso da sua análise. Mais tarde, em 1930, Milne [19] explorou a analogia entre a equação de Schrödinger unidimensional independente do tempo

$$\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{2m}{\hbar^2}(E - V(x))u = 0 \quad (1.14)$$

e a equação do OHDT. A analogia é estrita, bastando, para realizá-la, fazer as transposições

$$t \rightarrow x \quad , \quad x \rightarrow u \quad , \quad \omega^2 \rightarrow 2m\hbar^{-2}(E - V(x)) \quad (1.15)$$

entre as equações (1.1) e (1.14). Após esta transposição, o invariante exato passa a expressar uma relação entre a função de onda e sua primeira derivada. Milne foi capaz de obter uma condição de quantização exata para o espectro de energias discreto. Esta condição se reduz à condição WKB (Wentzel–Kramers–Brillouin) no limite em que  $V(x)$  é lentamente variável.

Aparentemente, a abordagem de Milne não teve o sucesso merecido na época de sua publicação devido ao caráter não linear da equação (1.3). Tal não linearidade não é manifestamente compatível com o princípio da superposição linear dos estados quânticos. Recentemente, entretanto, constata-se um ressurgimento no interesse pelo método de quantização de Milne [20, 21]. Isto se deve às propriedades numéricas atrativas da equação (1.3), já que a variável  $y(t)$  normalmente varia mais lentamente do que  $x(t)$ .

Pinney, numa nota curta [22], apresentou a solução geral da equação não linear (1.3) a partir de duas soluções particulares de (1.1) linearmente independentes. Por este motivo, (1.3) é conhecida como equação de Pinney. Neste espírito, o sistema (1.1–1.3) será chamado de sistema de Ermakov–Pinney.

Courant e Snyder [23] também participaram de estudos pioneiros envolvendo o sistema de Ermakov–Pinney. Courant e Snyder utilizaram a constante de movimento dada em (1.2) no estudo da estabilidade das órbitas de partículas carregadas em aceleradores do tipo cíclotron.

O operador Hermitiano obtido a partir da quantização de  $I$  foi utilizado no tratamento exato do OHDT quântico [24]. A base da teoria de Lewis e Riesenfeld está em expandir o vetor de estado como uma combinação linear dos autovetores do invariante. Entretanto, contrariamente às constantes de movimento exatas usualmente mencionadas na literatura [17], o invariante exato  $I$  é explicitamente dependente do tempo. Tal se dá devido à presença da função  $y(t)$  no invariante exato, o que está manifesto na equação (1.2). Apesar disto, os autovalores de  $I$  são constantes no tempo. Na seção 2.3, será discutida com maior detalhe a teoria de Lewis e Riesenfeld.

O sucesso da teoria de Lewis e Riesenfeld para o OHDT quântico motivou o surgimento de várias abordagens para derivar, generalizar ou interpretar o sistema de Ermakov–Pinney. Uma das generalizações, proposta por Ray e Reid [25], é dada pelo sistema

$$\ddot{x} + \omega^2(t) x = \frac{1}{y x^2} f(y/x), \quad (1.16)$$

$$\ddot{y} + \omega^2(t) y = \frac{1}{x y^2} g(x/y), \quad (1.17)$$

onde  $\omega(t)$ ,  $f$  e  $g$  funções arbitrárias dos seus argumentos. Quando  $f = 0$  e  $g = kx/y$ , recobra-se o sistema de Ermakov–Pinney. Em geral, entretanto, o sistema (1.16–1.17) admite vários outros tipos de acoplamento não linear.

A proposta de Ray e Reid [25] inspira-se no fato de o sistema (1.16–1.17) possuir um invariante exato dedutível por eliminação da frequência. Ou seja, obtém-se o invariante

exato via o método empregado por Ermakov no tratamento do sistema (1.1–1.3). De fato, eliminando  $\omega$  entre as equações (1.16–1.17), obtém-se

$$y\ddot{x} - x\ddot{y} + \frac{1}{y^2}g(x/y) - \frac{1}{x^2}f(y/x) = 0, \quad (1.18)$$

que, multiplicado pelo fator integrante  $(y\dot{x} - x\dot{y})$ , transforma-se na equação

$$dI/dt = 0, \quad (1.19)$$

para

$$I = \frac{1}{2}(y\dot{x} - x\dot{y})^2 + \int^{y/x} f(\lambda) d\lambda + \int^{x/y} g(\lambda) d\lambda. \quad (1.20)$$

Este invariante de Ermakov generaliza o invariante dado em (1.2). O sistema (1.16–1.17) e o invariante exato dado em (1.20) desempenharam um papel fundamental nos estudos subsequentes envolvendo sistemas de Ermakov. O sistema (1.16–1.17) será chamado de sistema de Ermakov–Lewis–Ray–Reid (ELRR).

No método de Ermakov, fica claro que a frequência  $\omega$  pode depender das variáveis dinâmicas e suas derivadas até qualquer ordem, sem prejuízo para a existência do invariante exato. De fato,  $\omega$  sequer comparece na expressão do invariante exato definido em (1.20). É cabível, portanto, estender o sistema de ELRR de modo a permitir frequências mais complexas [52]. Por razões físicas, consideram-se apenas os casos em que a frequência depende, no máximo, da velocidade, ou seja, toma-se  $\omega = \omega(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t)$ . Nem sempre este tipo de função pode ser interpretada como uma “frequência”, no sentido estrito da palavra, mas a nomenclatura será mantida aqui. Além disso, os sistemas de Ermakov com frequência dependente das variáveis dinâmicas e suas derivadas serão chamados de sistemas de Ermakov generalizados. A terminologia é natural, pois os sistemas de Ermakov com frequência dependendo das variáveis espaciais e suas derivadas abarcam uma variedade de sistemas bem maior do que o par de equações (1.16–1.17). Em particular, nos sistemas de Ermakov generalizados pode comparecer a velocidade, o que é impossível no caso dos sistemas de ELRR.

O presente trabalho tem por objetivo principal a investigação das propriedades fundamentais dos sistemas de Ermakov generalizados. Sem dúvida, esta é uma tarefa relevante, já que a maior parte da literatura sobre sistemas de Ermakov está voltada aos sistemas de ELRR. Como já foi mencionado, nos sistemas de ELRR a frequência pode depender somente do tempo. Ao permitir dependência da frequência nas variáveis dinâmicas e suas derivadas, os sistemas de Ermakov generalizados passam a abarcar uma gama muito maior

de sistemas dinâmicos. Conseqüentemente, há uma potencialidade nos sistemas de Ermakov generalizados muito maior em aplicações físicas. Portanto, é de interesse analisar, em detalhe, as propriedades formais dos sistemas de Ermakov generalizados. Uma questão natural é identificar quais as propriedades comuns aos sistemas de ELRR e de Ermakov generalizados. Por exemplo, a existência de um invariante exato de Ermakov associado não é prejudicada pela extensão do conceito de frequência. É importante verificar o que ocorre com as demais propriedades. Em particular, é sabido [41] que os sistemas de ELRR podem ser linearizados. Surge, então, a necessidade de averiguar o impacto no processo de linearização ao serem consideradas frequências de dependência mais complexa. Ou seja, é de interesse saber quais são os sistemas de Ermakov generalizados ainda passíveis de linearização. Esta questão é analisada na seção 2.2. Questões análogas podem ser facilmente formuladas. Em particular, nos últimos anos tem sido analisada a estrutura do grupo de simetrias de Lie subjacente aos sistemas de ELRR [64], [112]–[114]. O capítulo 3 é voltado à análise das simetrias de Lie dos sistemas de Ermakov generalizados. Outra propriedade extra de uma subclasse de sistemas de ELRR é a de admitir formulação Hamiltoniana [61]. É natural esperar que uma subclasse mais ampla de sistemas de Ermakov generalizados admita formulação Hamiltoniana. Neste contexto, é de se esperar que a subclasse Hamiltoniana de sistemas de ELRR seja recobrada ao impor que a frequência dependa apenas do tempo. Estas expectativas são confirmadas e desenvolvidas no capítulo 4, onde também é considerada a questão da existência de simetrias de Noether associadas aos sistemas de Ermakov Hamiltonianos.

O capítulo 5 contempla a análise das simetrias e leis de conservação do movimento não relativístico de uma partícula carregada. Esta investigação utiliza a formulação do teorema de Noether exposta no capítulo 4, dedicado aos sistemas de Ermakov Hamiltonianos. A metodologia empregada tem o espírito do item c) dos métodos de derivação de invariantes exatos exposto na página 9. Ou seja, em contraposição às metodologias usualmente propostas, e em consonância com a estratégia comumente utilizada na obtenção de sistemas integráveis, não se buscam, desde o início, as simetrias de Noether para algum campo eletromagnético específico. Seguindo o caminho inverso, busca-se a forma geral dos campos eletromagnéticos para os quais a ação admite simetrias de Noether. Em outras palavras, a abordagem tradicional procura as simetrias para um conjunto de equações cuja forma é fixada de antemão. Na abordagem seguida no capítulo 5, são procuradas as equações de Lorentz (para o movimento não relativístico de partículas carregadas) que são compatíveis com simetrias de Noether. Mais especificamente, são propostas apenas

as simetrias de Noether geométricas, que não envolvem as componentes da velocidade na sua formulação. Com a metodologia proposta, obtém-se um par de equações diferenciais parciais para o campo eletromagnético. A forma destas equações depende da forma da simetria de Noether associada. Os campos eletromagnéticos que podem satisfazer o par de equações obtido destacam-se naturalmente como sendo de especial interesse, já que candidatam-se a produzir movimentos integráveis.

A busca de configurações de campos eletromagnéticos compatíveis com a existência de integrais primeiras exatas é de grande importância em física de plasma. De fato, como já foi mencionado logo no início desta introdução, no modelo de Vlasov–Maxwell para o plasma não colisional é fundamental a descoberta de invariantes exatos. É neste contexto que o teorema de Noether tem relevância para a física de plasma, quando aplicado ao movimento não relativístico de partículas carregadas. As configurações de campos eletromagnéticos que satisfazem o sistema de equações parciais encontrado no capítulo 5, sendo compatíveis com simetrias de Noether, são fortes candidatas a produzir novas soluções exatas para o sistema de Vlasov–Maxwell. Desta maneira, fica evidente também que a procura de invariantes exatos produz resultados interessantes não apenas quando se está tratando de sistemas de Ermakov. Entretanto, as técnicas para o tratamento dos sistemas de Ermakov podem ser facilmente implementadas no estudo de sistemas dinâmicos variados, tais como a equação de Lorentz não relativística.

Voltemos a tratar dos sistemas de Ermakov. Admitindo frequências não triviais, isto é, incluindo dependência nas variáveis dinâmicas, é possível reescrever o sistema de Ermakov generalizado de uma forma mais compacta [26] que utiliza apenas duas funções arbitrárias. Para tanto, basta definir as funções

$$\Omega^2(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = \omega^2(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) - \frac{1}{xy^3}g(x/y), \quad (1.21)$$

$$F(y/x) = f(y/x) - \frac{x^2}{y^2}g(x/y), \quad (1.22)$$

com as quais o sistema (1.16–1.17) adquire a forma

$$\ddot{x} + \Omega^2(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) x = \frac{1}{y x^2} F(y/x), \quad (1.23)$$

$$\ddot{y} + \Omega^2(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) y = 0. \quad (1.24)$$

Nesta representação, subsistem apenas as funções arbitrárias  $\Omega$  e  $F$ . O invariante de Ermakov associado ao sistema (1.23–1.24) é, então, dado por

$$I = \frac{1}{2}(y\dot{x} - x\dot{y})^2 + \int^{y/x} F(\lambda) d\lambda. \quad (1.25)$$

O sistema de Ermakov–Pinney (1.1–1.3) é obtido a partir do par (1.23–1.24) tomando

$$\Omega^2 = \omega^2(t) - k/y^4, \quad (1.26)$$

$$F = -k(x/y)^3. \quad (1.27)$$

Sempre que forem consideradas frequências com dependência não trivial, claramente é mais conveniente utilizar a representação compacta (1.23–1.24) dos sistemas de Ermakov generalizados. Com isto, se obtém um tratamento mais econômico de várias questões envolvendo os sistemas de Ermakov generalizados, como quando são analisadas a sua possível linearização (seção 2.2), a estrutura de seu grupo de simetrias de Lie (seção 3.2) e o seu caráter Hamiltoniano (seção 4.1). Naturalmente, é sempre preferível utilizar a formulação mais simples possível de um dado sistema. Caso contrário, é necessário tolerar a presença de elementos espúrios que apenas obscurecem os aspectos fundamentais do sistema. Entretanto, deve-se ressaltar que a formulação compacta é equivalente à formulação original, a qual envolve três funções arbitrárias. A representação compacta não omite informação alguma, sendo mais conveniente na análise das propriedades dos sistemas de Ermakov generalizados por sua economia.

Os sistemas de Ermakov, em suas diversas formulações, encontram aplicação em vários problemas. Entre estes, podem-se citar os problemas da obtenção da solução exata [29, 30] ou numérica [20, 21] da equação de Schrödinger para várias classes de potenciais dependentes do tempo e da obtenção da fase de Berry [8] ou de estados coerentes [31] para problemas quânticos. Sistemas de Ermakov também encontram aplicação na dinâmica de partículas carregadas em aceleradores [23], [27, 28], em ótica [32]–[37], em modelos de criação cosmológica de partículas [38], em elasticidade não linear [39] e no estudo da propagação de ondas de grande comprimento de onda em fluidos rasos [40]–[42]. Não é objetivo deste trabalho oferecer uma investigação profunda de cada uma destas aplicações. Muitas delas, por seu alcance, merecem um estudo separado.

É importante ressaltar que os sistemas de Ermakov são apenas uma categoria especial dentre os sistemas dinâmicos com invariantes exatos. De fato, desde o trabalho de Lewis e Riesenfeld a busca de sistemas dinâmicos com invariantes exatos tem se constituído numa área de pesquisa intensa. Apesar disto, o número de sistemas com constante de movimento exata conhecida ainda é relativamente pequeno. Mesmo assim, pode-se citar pelo menos uma dezena de métodos de obtenção de constantes de movimento exatas para sistemas físicos. A maioria deles tem sido aplicada a sistemas Hamiltonianos unidimensionais, com dependência explícita do tempo. Certamente, muito trabalho ainda resta por fazer,

especialmente no que tange aos sistemas multidimensionais. Embora este trabalho não se dedique a uma revisão detalhada das técnicas para obtenção de invariantes exatos, abaixo segue uma lista comentada destes métodos.

a) Método de Ermakov.

Esta técnica já foi exemplificada nesta introdução. O método de Ermakov pressupõe o emprego de uma equação auxiliar para a derivação do invariante exato. Por exemplo, no caso do OHDT com equação de movimento (1.1), é preciso utilizar a equação de Pinney (1.3) para eliminar a frequência e obter o invariante de Ermakov dado em (1.2). É, portanto, uma técnica *ad hoc*, cujo grande mérito está na simplicidade [15, 25],[43]–[45].

b) Método de Kruskal aplicado de forma fechada.

Válido para sistemas Hamiltonianos. O método de Kruskal [46] aplicado de forma fechada tem importância histórica, já que foi o método utilizado por Lewis [13, 14] na dedução da constante de movimento exata dada em (1.2). Entretanto, de modo geral, o método de Kruskal fornece apenas invariantes adiabáticos, na forma de uma série assintótica infinita, para sistemas com parâmetros lentamente variáveis. Além disso, no limite estacionário os sistemas passíveis de tratamento necessariamente devem possuir apenas órbitas periódicas. Satisfeita esta condição, procuram-se variáveis ótimas  $(\mathbf{z}, \phi) = (z_1, \dots, z_N, \phi_1, \dots, \phi_N)$ , onde  $2N$  é a dimensão do espaço de fase,  $\mathbf{z} = (z_1, \dots, z_N)$  é lentamente variável e  $\phi = (\phi_1, \dots, \phi_N)$  é um vetor de variáveis do tipo ângulo. É fornecida uma teoria sistemática para derivação destas variáveis ótimas e para a obtenção de um invariante adiabático na forma de uma série assintótica. No caso do OHDT, esta série assintótica encerra-se nos primeiros termos, resultando num invariante exato (não adiabático). Em geral, a aplicação do método de Kruskal de forma fechada é restrita a uma certa classe de sistemas [47].

c) Teorema de Noether.

Conhecido desde o início do século, o teorema de Noether [48, 49] tem sido empregado recentemente na identificação de invariantes exatos para equações diferenciais ordinárias [50]–[66]. Historicamente, a abordagem usual busca invariantes exatos para um sistema dinâmico dado. O interesse recente no teorema de Noether fundamenta-se noutra perspectiva: dada uma classe de sistemas dinâmicos que não está completamente definida, a pergunta é quais são os sistemas nesta classe que admitem simetrias e invariantes exatos de Noether. Por exemplo, pode-se perguntar (e responder) quais os sistemas Hamiltonianos unidimensionais com potencial explicitamente dependente do tempo que admitem simetrias de Noether [65]. Por ser um método dedutivo, o teorema de Noether é bas-

tante geral, requerendo apenas uma formulação variacional para o sistema em questão. Na seção 4.2 é aplicado o teorema de Noether a uma classe de sistemas de Ermakov admitindo formulação variacional. O capítulo 5 dedica-se à aplicação do teorema de Noether ao movimento não relativístico de uma partícula carregada sob campos eletromagnéticos gerais.

d) Grupos de Lie estendidos.

Esta abordagem remonta ao início do século, mas somente nas últimas três décadas tem sido sistematicamente utilizada [40, 45, 61, 64], [66]–[75]. O método dos grupos de Lie estendidos pode ser aplicado a qualquer sistema dinâmico, com ou sem formulação variacional. Uma desvantagem em relação ao teorema de Noether é que não existe um procedimento padrão para a obtenção das integrais primeiras exatas correspondentes às simetrias de Lie. Entretanto, as simetrias de Lie têm relevância não apenas na derivação de invariantes exatos. Por exemplo, o conhecimento do grupo de simetrias de Lie permite identificar a estrutura algébrica subjacente a um problema dado. Isto, por sua vez, fornece um ponto de partida para generalizações do problema, ou seja, as generalizações válidas seriam aquelas que respeitam o grupo de simetrias. Este ponto de vista foi utilizado com sucesso por Leach em sua generalização do conceito de sistema de Ermakov [74] para várias dimensões. O capítulo 3 dedica-se a análise das simetrias de Lie admissíveis pelos sistemas de Ermakov.

e) Método direto.

Esta técnica apoia-se no fato dos invariantes exatos conhecidos e fisicamente relevantes geralmente terem uma dependência simples na velocidade. Portanto, assumindo desde o início a forma do invariante exato, evitam-se passos intermediários possivelmente desnecessários. Progressos tem sido alcançados propondo invariantes exatos polinomiais [76]–[83], racionais [84]–[86] ou transcendentais [88, 89] na velocidade. A efetividade do método depende do sistema sob estudo e da intuição da forma apropriada da constante de movimento exata a buscar.

f) Transformações canônicas generalizadas.

As transformações canônicas generalizadas distinguem-se das usuais por permitirem uma mudança de variável temporal. Além disso, a função geratriz, via de regra, depende explicitamente do tempo, o que é permitido mas não usual no caso das transformações canônicas comuns. A idéia básica do método é transformar as equações de movimento e/ou a função Hamiltoniana em alguma forma equivalente porém mais simples. Com isto, pode-se tratar uma vasta gama de sistemas [76], [92]–[99]. As dificuldades com

esta abordagem estão associadas à necessidade de postular a forma da transformação canônica generalizada, a qual, por seu turno, pressupõe a existência de alguma descrição Hamiltoniana do problema.

g) Re-escalamento das variáveis.

Consiste no uso de um grupo de transformações especial, composto de um reescalamento dependente do tempo, uma mudança de variável temporal e, possivelmente, uma translação dependente do tempo [72], [100]–[102]. Trata-se de um grupo de Lie particular. Certamente, é importante deduzir todo e qualquer resultado da maneira mais simples possível. Isto é feito, na técnica de re-escalamento, supondo desde o início a forma apropriada do grupo de simetrias de Lie. Re-escalamentos podem ser úteis também para transformar as equações de movimento em alguma outra forma equivalente de estrutura desejável. O mérito da abordagem está na simplicidade. O demérito está em tratar-se de uma técnica *ad hoc*, que pode não contemplar algum aspecto relevante da dinâmica.

h) Álgebras dinâmicas.

Aplica-se a sistemas Hamiltonianos. Pressupõe que tanto o Hamiltoniano quanto o invariante exato sejam uma combinação linear de funções no espaço de fase que tenham a estrutura de uma álgebra de Lie frente ao colchete de Poisson. Tem a vantagem de ter uma transposição quântica direta. É um método *ad hoc*, cujo alcance completo ainda está por ser auferido [8], [27], [103]–[107].

i) Critério de Painlevé.

Explora a estrutura das singularidades das soluções do sistema sob análise. De acordo com o critério de Painlevé, um sistema candidata-se à condição de ser integrável se não possuir nenhum ponto crítico móvel. Isto é, as únicas singularidades (numa solução arbitrária) que dependem das condições iniciais são pólos. O critério de Painlevé foi usado no tratamento de uma grande variedade de sistemas (ver [108] e referências incluídas). No entanto, trata-se de um método *ad hoc*, não existindo, até agora, uma justificativa formal do porquê de seu bom funcionamento.

j) Teorema de Frobenius.

É um método bastante restrito, aplicável apenas a sistemas dinâmicos tridimensionais, Hamiltonianos ou não. Entretanto, é digno de nota por generalizar a técnica de simetrias de Lie, ao menos no caso dos sistemas tridimensionais. Busca-se um campo vetorial compatível com o campo vetorial representativo do sistema dinâmico sob análise [109]. O campo compatível não necessariamente gera simetrias de Lie.

Finalizando esta recapitulação dos métodos de derivação de invariantes exatos, é im-

portante ressaltar que, segundo o teorema KAM (Kolmogorov–Arnold–Moser), a integrabilidade é a exceção e não a regra [110], sendo genericamente destruída por perturbações. Decorre daí que o número de sistemas integráveis jamais será comparável ao número de sistemas irregulares conhecidos, por mais que evoluam os métodos de derivação de invariantes exatos. Mesmo assim, é de se esperar que sejam desenvolvidas ainda novas abordagens para a construção de integrais primeiras exatas. Isto se justifica pela importância das integrais primeiras exatas e pelo fato de ainda não existir um método universal, que tenha os méritos de todos os métodos mencionados acima e que possa ser aplicado a qualquer sistema. Do ponto de vista matemático, a obtenção de tal método universal se afigura uma tarefa formidável, o que não é surpreendente, dada a complexidade dos sistemas não lineares em geral.

Este trabalho organiza-se como segue. O capítulo 2 dedica-se à uma revisão das propriedades básicas dos sistemas de Ermakov e de algumas de suas aplicações. Na seção 2.1, trata-se da lei de superposição não linear associada aos sistemas de Ermakov. Esta lei depende crucialmente da existência do invariante de Ermakov, relacionando as soluções  $x$  e  $y$  do sistema correspondente. Na seção 2.2, é discutido o processo de linearização dos sistemas de Ermakov com frequência dependente apenas do tempo. A linearização é analisada criticamente, e é apontada uma generalização para sistemas com frequência dependente das variáveis dinâmicas. As seções restantes do capítulo tratam de aplicações dos sistemas de Ermakov na mecânica quântica. A seção 2.3 é dedicada à aplicação dos invariantes exatos de Ermakov na busca de soluções da equação de Schrödinger para potenciais explicitamente dependentes do tempo. Focaliza-se a teoria de Lewis e Riesenfeld, que tanta importância teve na busca de sistemas dinâmicos com invariantes exatos. Apresenta-se a teoria geral de Lewis e Riesenfeld, a qual é exemplificada com sua aplicação ao OHDT quântico. A seção 2.4 é dedicada a teoria de Ray e Hartley dos estados coerentes para o oscilador harmônico dependente do tempo. Trata-se, neste caso, de um importante exemplo de utilização da solução exata de Lewis e Riesenfeld. A seção 2.5 trata da conexão entre as fases geométricas de Berry, que tanta atenção tem despertado nos últimos anos [111], e os sistemas de Ermakov. Exemplifica-se com um oscilador harmônico generalizado dependente do tempo.

O capítulo 3 contempla o tema das simetrias de Lie dos sistemas de Ermakov. Na seção 3.1, faz-se uma breve revisão das técnicas de simetrias de Lie com vistas a sua aplicação às equações diferenciais ordinárias. Na seção 3.2, identifica-se o grupo de simetrias de

Lie geométricas admissível pelos sistemas de Ermakov generalizados. Demonstra-se que nem todo sistema de Ermakov admite simetrias de Lie geométricas, sendo necessário que a frequência tenha uma dependência específica nas variáveis dinâmicas. Mesmo assim, estende-se a classe de sistemas de Ermakov com simetria de Lie, em relação à classe determinada por Leach e colaboradores [64], [112]–[114]. Esta última classe inclui apenas sistemas cujas frequências dependem apenas do tempo. A seção 3.3 analisa algumas possíveis generalizações dos sistemas de Ermakov. Sem dúvida, o grupo de simetrias de Lie subjacente deve ser levado em consideração em qualquer extensão plausível dos sistemas de Ermakov. Este é o princípio de generalização proposto por Leach [64] aos sistemas de Ermakov para mais dimensões. A seção 3.3 considera também alguns sistemas de Ermakov a dimensão infinita.

O capítulo 4 dedica-se aos sistemas de Ermakov Hamiltonianos. Como se sabe, a existência de um formalismo Hamiltoniano é vital em várias perspectivas, como sua quantização ou sua abordagem por métodos de teorias de perturbação. Com esta motivação, exibe-se na seção 4.1 uma classe de sistemas de Ermakov generalizados com formulação Hamiltoniana. A classe construída generaliza a proposta de Cerveró e Lejarreta [61], que contempla os casos com frequência dependente apenas do tempo. Na seção 4.2, encontram-se as soluções clássicas exatas para dois sistemas dinâmicos de interesse, que podem ser postos na forma de sistemas de Ermakov Hamiltonianos autônomos. Um destes é o sistema de Calogero, descrevendo uma interação de três corpos numa linha. O outro sistema analisado se notabiliza por admitir simetria dinâmica. Na seção 4.3, aplica-se o teorema de Noether a sistemas de Ermakov com formulação variacional. O objetivo é verificar a possível presença de alguma constante de movimento exata extra, que garanta integrabilidade completa. Com isto, distingue-se uma subclasse de sistemas de Ermakov com formulação variacional e, em acréscimo, com simetria de Noether. A integrabilidade desta subclasse é demonstrada na seção 4.4, onde se exibe a solução exata da dinâmica, tanto clássica quanto quântica.

O capítulo 5 está centrado nas simetrias de Noether para a partícula carregada não relativística sob campos eletromagnéticos gerais. O objetivo é aplicar a formulação do teorema de Noether do capítulo 4 para sistemas mais gerais do que os sistemas de Ermakov generalizados. Na seção 5.1, determina-se a forma geral do gerador de simetrias de Noether, que contém o grupo de simetrias de Lie dos sistemas de Ermakov como caso particular. Determinam-se as equações fundamentais para os campos eletromagnéticos compatíveis, bem como os invariantes exatos de Noether correspondentes. Na seção 5.2,

---

exemplifica-se com o caso do monopolo magnético. Na seção 5.3, obtém-se explicitamente a classe mais geral possível de campos elétricos que podem ser justapostos ao campo de um monopolo magnético, sem prejuízo da existência de simetrias de Noether. Na seção 5.4, aplica-se a teoria das seções precedentes. Analisa-se o movimento de uma partícula carregada sob ação de um monopolo magnético na presença de dois campos extras. Um destes corresponde a um potencial harmônico e o outro a um potencial gravitacional. Ambos apresentam dependência temporal explícita.

O capítulo 6 dedica-se à conclusão, onde há um apanhado dos resultados novos. Na conclusão, também são apontadas diversas alternativas de trabalhos futuros.

## Capítulo 2

### SISTEMAS DE ERMAKOV

#### 2.1 Lei de superposição não linear

A grande vantagem de se tratar com equações lineares é a possibilidade de compor soluções elementares, usando o princípio da superposição linear, para construir a solução geral. No caso de certas classes de equações não lineares, é possível combinar soluções de modo a obter novas soluções. Esta propriedade é frequentemente chamada de superposição não linear [115]. Possivelmente, o exemplo mais conhecido de lei de superposição não linear é fornecido pela equação de Riccati,

$$dx/dt = a_0(t) + a_1(t)x + a_2(t)x^2. \quad (2.1)$$

para funções  $a_0, a_1$  e  $a_2$  dadas. Se forem conhecidas três soluções particulares  $x_1, x_2$  e  $x_3$  da equação de Riccati, a sua solução geral [116] é dada pela relação algébrica

$$\frac{(x - x_2)(x_3 - x_1)}{(x - x_1)(x_3 - x_2)} = c, \quad (2.2)$$

sendo  $C$  uma constante arbitrária. A relação (2.2) é uma lei de superposição não linear para a equação de Riccati.

Os sistemas de Ermakov generalizados possuem uma lei de superposição não linear [52], relacionando as soluções  $x(t)$  e  $y(t)$  do sistema (1.23–1.24). Sejam as variáveis

$$Q = x/y \quad , \quad T = \int^t d\lambda/y^2(\lambda) \quad , \quad (2.3)$$

com as quais o invariante de Ermakov definido em (1.25) expressa-se na forma

$$I = \frac{1}{2} \left( \frac{dQ}{dT} \right)^2 + V(Q), \quad (2.4)$$

onde

$$V(Q) = \int^{1/Q} F(\lambda)d\lambda. \quad (2.5)$$

Nestas novas variáveis, o invariante de Ermakov é formalmente análogo a energia de uma partícula em movimento unidimensional com potencial  $V(Q)$ . Seguindo o procedimento padrão adotado nos textos básicos de mecânica [17], é possível reduzir este tipo de movimento a uma quadratura,

$$T + c = \int^Q \frac{d\lambda}{\sqrt{2(I - V(\lambda))^{1/2}}}, \quad (2.6)$$

onde  $c$  é uma constante de integração. Quando é possível executar a integral na equação (2.6) de forma fechada, obtém-se uma expressão do tipo  $T + c = T(Q; I)$ . Esta expressão não é jamais uma constante em  $Q$ . Consequentemente, o teorema da função inversa garante a existência local da função inversa  $Q = Q(T + c; I)$ . Esta função, obtida por inversão, envolve duas constantes arbitrárias,  $I$  e  $c$ . Assim, sempre que for conhecida uma solução particular  $y_1(t)$  da equação auxiliar (1.24), pode-se expressar a solução de (1.23) na forma

$$x(t; I, c) = y_1(t)Q \left( \int^t \frac{d\lambda}{y_1^2(\lambda)} + c; I \right), \quad (2.7)$$

A solução dada na relação (2.7) decorre da transformação (2.3) e é uma lei de superposição não linear para os sistemas de Ermakov.

O invariante de Ermakov fornece uma ligação entre as soluções  $x(t)$  e  $y(t)$  do sistema de Ermakov. Esta ligação culmina na lei de superposição não linear. Certamente, esta propriedade distingue os sistemas de Ermakov como uma classe especial de sistemas dinâmicos.

Existe uma diferença essencial entre as leis de superposição não linear dos sistemas de Ermakov e as usualmente consideradas. Tal como no exemplo da lei de superposição para a equação de Riccati, normalmente são construídas novas soluções a partir de soluções elementares da mesma equação. A relação (2.7), em contraste, fornece a solução geral para a variável  $x(t)$  a partir de uma solução particular  $y_1(t)$  de outra equação, a saber, (1.24). Neste contexto, esta é chamada de equação auxiliar [52] para a equação (1.23).

A lei de superposição não linear definida em (2.7) é, em geral, apenas implícita. De fato, a relação (2.7) torna-se explícita apenas quando a equação (1.24) é desacoplada, podendo ser considerada separadamente. Isto, por seu turno, ocorre quando a frequência  $\Omega$  não contém  $x$  ou suas derivadas, ou seja, quando, na formulação (1.23–1.24),

$$\Omega = \Omega(y, \dot{y}, t). \quad (2.8)$$

Em particular, quando

$$\Omega^2 = \omega^2(t) - k/y^4, \quad (2.9)$$

sendo  $\omega(t)$  uma função arbitrária e  $k$  uma constante, obtém-se o sistema de ELRR

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = f(y/x)/y x^2, \quad (2.10)$$

$$\ddot{y} + \omega^2(t)y = k/y^3, \quad (2.11)$$

onde

$$f(y/x) = F(y/x) + kx^3/y^3. \quad (2.12)$$

Facilmente se verifica que o sistema (2.10–2.11) é o sistema de ELRR mais geral possível no qual a equação para  $y(t)$  está desacoplada. O invariante de Ermakov correspondente é dado por

$$I = \frac{1}{2}(xy\dot{y} - y\dot{x})^2 + \frac{k}{2}(x/y)^2 + \int^{y/x} f(\lambda)d\lambda, \quad (2.13)$$

ou, nas variáveis definidas por (2.3),

$$I = \frac{1}{2} \left( \frac{dQ}{dT} \right)^2 + \frac{k}{2} Q^2 + \int^{1/Q} f(\lambda) d\lambda. \quad (2.14)$$

O sistema (2.10–2.11) é o sistema de ELRR para os quais a lei de superposição não linear (2.7) é explícita. Entretanto, os sistemas de Ermakov generalizados (1.23–1.24) permitem dependências mais gerais na frequência e, portanto, outros casos onde a lei de superposição não linear torna-se explícita. A única condição para isto é que  $\Omega$  não dependa de  $x$  e suas derivadas. Convém observar que se considerou aqui apenas a equação para  $y$ , sendo que uma argumentação análoga se aplicaria quando o desacoplamento acontecesse na equação para  $x$ .

Neste ponto, apresentam-se alguns exemplos de aplicação da lei de superposição não linear (2.7). O primeiro deles diz respeito ao sistema (2.10–2.11) com  $f = 0$ ,

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = 0, \quad (2.15)$$

$$\ddot{y} + \omega^2(t)y = \frac{k}{y^3}. \quad (2.16)$$

Este par de equações é o sistema de Ermakov–Pinney discutido no capítulo introdutório. O invariante de Ermakov dado em (2.14) é, neste caso, dado por

$$I = \frac{1}{2} \left( \frac{dQ}{dT} \right)^2 + \frac{k}{2} Q^2. \quad (2.17)$$

Distinguem-se aqui dois casos. No primeiro caso,  $k = 0$ , (2.16) torna-se a equação do OHDT e a quadratura (2.6) fornece

$$T + c = Q/\sqrt{2I}. \quad (2.18)$$

Em termos das variáveis originais, ou seja, usando a relação (2.7), obtém-se

$$x(t) = \sqrt{2I} \left( \int^t \frac{d\lambda}{y_1^2(\lambda)} + c \right) y_1(t). \quad (2.19)$$

Isto é,

$$x = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t), \quad (2.20)$$

onde  $c_1 = c\sqrt{2I}$ ,  $c_2 = \sqrt{2I}$  e

$$y_2(t) = y_1 \int^t d\lambda / y_1^2(\lambda) \quad (2.21)$$

é outra solução particular da equação auxiliar (2.16) com  $k = 0$ . A expressão (2.20) é a forma usual da solução geral para o OHDT em termos da combinação linear de duas de suas soluções particulares independentes. Este desenvolvimento mostra como a lei de superposição não linear (2.7) reduz-se à solução usual, quando a equação auxiliar é a própria equação do OHDT.

O outro caso onde a solução geral da equação (2.15) é construída a partir de uma solução particular da equação auxiliar (2.16) é aquele no qual  $k \neq 0$ . Neste caso, o re-escalonamento  $y \rightarrow k^{-1/4} y$  fixa o valor da constante  $k$  como unitário. É importante ressaltar que este reescalonamento é válido apenas se  $k \neq 0$ . Tomando  $k = 1$  e repetindo o procedimento anterior, obtém-se

$$x = \sqrt{2I} y_1(t) \sin \left( \int^t \frac{d\lambda}{y_1^2(\lambda)} + c \right). \quad (2.22)$$

Esta é uma legítima lei de superposição não linear, na qual tanto a solução particular quanto as constantes numéricas aparecem de modo não linear. Pode parecer inútil expressar a solução geral do OHDT, que é linear, em termos da solução particular da equação de Pinney, não linear. Entretanto, é bom notar que basta uma solução particular  $y_1(t)$  para obter a solução geral  $x(t)$ . Para uma frequência  $\omega(t)$  dada, pode-se, por exemplo, buscar  $y_1(t)$  numericamente.

Como segundo exemplo de aplicação da lei de superposição não linear (2.7) dos sistemas de Ermakov, sejam as equações (2.10–2.11) com  $f(y/x) = y/x$  e  $k = 0$ ,

$$\ddot{x} + \omega^2(t) x = 1/x^3, \quad (2.23)$$

$$\ddot{y} + \omega^2(t) y = 0. \quad (2.24)$$

O invariante exato dado na equação (2.14) assume a forma

$$I = \frac{1}{2} \left( \frac{dQ}{dT} \right)^2 + \frac{1}{2Q^2}. \quad (2.25)$$

Com isto, a quadratura em (2.6) fornece

$$Q^2 = 1/2I + 2I(T + c)^2, \quad (2.26)$$

e a lei de superposição não linear (2.7) traduz-se em

$$x^2(t) = A y_1^2(t) + 2B y_1(t) y_2(t) + C y_2^2(t), \quad (2.27)$$

onde

$$A = 1/2I + 2Ic^2, \quad B = 2Ic, \quad C = 2I \quad (2.28)$$

são constantes satisfazendo  $AC - B^2 = 1$  e  $y_2$  é a outra solução particular da equação do OHDT, dada pela relação (2.21). A lei de superposição não linear (2.27) fornece a solução geral da equação de Pinney (2.23) em termos de uma solução particular da equação (2.24) do OHDT. Na verdade, existe um estreito paparelismo entre os sistemas (2.15–2.16) e (2.23–2.24), já que um é obtido do outro pela troca  $x \longleftrightarrow y$ . No primeiro sistema, entretanto, é requerida uma solução particular para a equação de Pinney, enquanto no segundo sistema é requerida uma solução particular da equação do OHDT.

A solução dada em (2.27) foi obtida por Pinney [22] sem qualquer demonstração. Anteriormente, o próprio Ermakov [15] a obteve considerando dois invariantes de Ermakov, cada qual envolvendo uma solução particular,  $y_1$  e  $y_2$ . Eliminando a velocidade  $\dot{x}(t)$  entre os invariantes e perfazendo cálculos algébricos, obteve a relação (2.27). Esta estratégia de eliminar a velocidade pode ser aplicada também quando for conhecido um segundo invariante exato para os sistemas de Ermakov [117]. O resultado é outro tipo de lei de superposição não linear, admitido apenas pelos sistemas de Ermakov com um segundo invariante exato.

Conforme notado por Sarlet [118], a razão fundamental da existência da lei de superposição não linear (2.7) é a possibilidade de pôr o invariante de Ermakov na forma

$$I = I\left(\frac{dQ}{dT}, Q\right), \quad (2.29)$$

para variáveis  $(Q, T)$  adequadas. Seja um par de equações diferenciais de segunda ordem, acopladas ou não, com variáveis  $x$  e  $y$ , como o sistema de Ermakov. Qualquer sistema com um invariante exato  $I = I(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t)$  que pode ser posto na forma (2.29) possui uma lei de superposição não linear, relacionando as soluções de suas equações. Seja

$$Q = Q(x, y, t), \quad T = T(y, t) \quad (2.30)$$

a transformação de variáveis que coloca o invariante exato na forma (2.29), e

$$x = x(Q, y, t) \quad (2.31)$$

a inversa de  $Q = Q(x, y, t)$ . A equação (2.29) pode ser interpretada como uma equação ordinária de primeira ordem para  $Q$ . Seja  $Q(T + c; I)$  sua solução, onde  $c$  é uma constante de integração. Esta constante comparece aditivamente ao parâmetro temporal pois a equação (2.29) é independente de  $T$ . Supondo que seja conhecida alguma solução particular  $y_1(t)$  do segundo membro do par de equações que admite o invariante exato, obtém-se, de (2.30–2.31),

$$x(t; I, c) = x(Q(T(y_1(t), t) + c; I), y_1(t), t) . \quad (2.32)$$

Esta é a solução geral para a variável  $x(t)$  em termos de uma solução particular para a variável  $y(t)$ . Este tipo de lei de superposição não linear se aplica a qualquer sistema com um invariante exato suficientemente simples, como o sistema de Ermakov. A idéia de Sarlet foi desenvolvida com o intuito de obter uma classificação dos sistemas dinâmicos com invariantes exatos e leis de superposição não lineares [119].

São concebíveis infinitos sistemas exemplificando o conceito de superposição não linear tal como entendido por Sarlet. Com inspiração em certos sistemas exibidos em [56, 57], será proposto aqui um novo sistema, dado por

$$\ddot{x} + \Omega^2(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) x = -\frac{P}{y^3} \left( \frac{\partial I}{\partial Q} \right) / \left( \frac{\partial I}{\partial P} \right) , \quad (2.33)$$

$$\ddot{y} + \Omega^2(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) y = 0 , \quad (2.34)$$

onde

$$I = I(P, Q) \quad (2.35)$$

é um invariante exato de forma arbitrária, sendo

$$Q = x/y \quad , \quad P = y\dot{x} - x\dot{y} \quad . \quad (2.36)$$

Na verdade, pode-se demonstrar que o sistema (2.33–2.34) é um caso particular de uma classe mais geral de sistemas introduzida em [57]. Genericamente, entretanto, esta classe não apresenta nenhuma lei de superposição não linear.

Verifica-se diretamente que  $I(P, Q)$  é, de fato, um invariante exato associado ao sistema (2.33–2.34), qualquer que seja a forma da função  $I(P, Q)$ ! Além disso, introduzindo

$$T = \int^t d\lambda / y^2(\lambda) , \quad (2.37)$$

expressa-se o invariante exato dado em (2.35) como um invariante da forma adequada de Sarlet dada em (2.29), com  $P = dQ/dT$ .

Em particular, quando

$$I(P, Q) = P^2/2 + V(Q), \quad (2.38)$$

recobram-se os sistemas de Ermakov generalizados (1.23–1.24), com  $F(1/Q) = -Q^2 dV/dQ$ . Caso contrário, obtém-se outros tipos de sistema dinâmico, mais gerais, possuindo leis de superposição não linear no espírito da teoria de Sarlet. Estas leis de superposição não lineares são explícitas quando a equação (2.34) está desacoplada.

A generalização proposta no sistema (2.33–2.34) preserva uma das propriedades mais importantes dos sistemas de Ermakov, a existência de uma lei de superposição não linear. Neste espírito, foram propostas algumas outras generalizações dos sistemas de Ermakov. Reid e Ray [116] consideraram equações diferenciais de ordem mais alta; Lutzky [120] tratou de outros tipos de acoplamento; Sarlet e Cantrijn [121] consideraram sistemas de dimensionalidade mais alta. O assunto das extensões dos sistemas de Ermakov será considerado com maior detalhe na seção 3.2. Para finalizar a seção, é lembrado que transformações do tipo (2.3) encontram aplicação em diversos contextos, tais como no cálculo do propagador de Feynman de sistemas quânticos dependentes do tempo [122].

## 2.2 Linearização

Nos últimos anos, tem sido exploradas outras propriedades formais dos sistemas de Ermakov além da lei de superposição não linear. Entre estas propriedades, destaca-se a possibilidade de linearização das equações de movimento [41, 42], [124]–[127], para frequências dependentes puramente do tempo. Propriedades adicionais são a existência de classes de sistemas de Ermakov com um segundo invariante exato [117], formulação Hamiltoniana [157, 26] ou simetrias de Lie [74, 123]. A presente seção dedica-se, em particular, a uma análise crítica da linearização para os sistemas de Ermakov. Como já foi dito, esta linearização refere-se aos sistemas de Ermakov com frequência função só do tempo. Nesta seção, são analisados os passos básicos envolvidos no processo de linearização. A partir daí, constrói-se uma extensão da linearização para uma classe de sistemas de Ermakov generalizados, com frequência função das variáveis dinâmicas. Esta nova extensão, como será visto, permite uma melhor compreensão do processo de linearização.

Os chamados sistemas de Kepler–Ermakov foram introduzidos como sendo perturbações dos sistemas de ELRR que ainda são passíveis de linearização [124]. Na verdade, como

será visto adiante, os sistemas de Kepler–Ermakov são meramente sistemas de Ermakov generalizados admitindo linearização. Deste ponto de vista, a redução das equações de Kepler–Ermakov a uma equação linear é apenas uma aplicação de uma teoria mais geral. Simultaneamente a esta aplicação, a seção mostra qual é a amplitude e quais são as limitações do tipo de linearização proposta para os sistemas de Ermakov.

Seja o sistema de ELRR, dado pelas equações (1.16–1.17). Para estes sistemas de Ermakov, com frequência puramente dependente do tempo, é possível eliminar a presença explícita do tempo das equações de movimento [41]. Para isto, é suficiente obter uma solução particular da equação do OHDT. De fato, sejam as novas variáveis

$$\bar{x} = x/C \quad , \quad \bar{y} = y/C \quad , \quad \bar{t} = \int^t d\lambda/C^2(\lambda) \quad , \quad (2.39)$$

onde  $C(t)$  é uma solução particular da equação do OHDT,

$$\ddot{C} + \omega^2(t)C = 0. \quad (2.40)$$

Com a transformação (2.39), exprime-se o sistema de ELRR na forma autônoma

$$\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} = \frac{1}{\bar{y}\bar{x}^2}f(\bar{y}/\bar{x}) \quad , \quad \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{t}^2} = \frac{1}{\bar{x}\bar{y}^2}g(\bar{x}/\bar{y}), \quad (2.41)$$

que é uma forma na qual o tempo não comparece mais explicitamente. É importante ressaltar, no entanto, que é indispensável o conhecimento de uma solução particular  $C(t)$  para a equação (2.40). Sem isto, não é possível construir a transformação (2.39). Até o momento, não se conhece a solução da equação do OHDT para frequências arbitrárias. Daí se depreende que nem sempre a transformação (2.39) é factível. É interessante observar também que

$$\bar{x}/\bar{y} = x/y \quad , \quad \bar{x}d\bar{y}/d\bar{t} - \bar{y}d\bar{x}/d\bar{t} = x dy/dt - y dx/dt \quad , \quad (2.42)$$

isto é,  $x/y$  e  $x\dot{y} - y\dot{x}$  não variam de forma frente a transformação (2.39).

Para efetuar a linearização do sistema (2.41), sejam as variáveis

$$\xi = 1/\bar{y} \quad , \quad \eta = \bar{x}^2/\bar{y}^2 \quad . \quad (2.43)$$

Toma-se  $\eta$  como a nova variável independente e  $\xi$  como a variável dependente. Na nova transformação (2.43), se supõe que  $y \neq 0$  para todo tempo. De outra maneira, a transformação não é bem comportada, e vale apenas localmente no tempo.

A equação satisfeita por  $\xi(\eta)$  é linear. Para demonstrar isto, inicialmente é necessária a relação

$$d\eta/d\bar{t} = 2\sqrt{\eta}\xi^2(\eta)(\bar{y}d\bar{x}/d\bar{t} - \bar{x}d\bar{y}/d\bar{t}). \quad (2.44)$$

O lado direito da equação (2.44) pode ser expresso numa forma envolvendo apenas  $\eta$ , usando o invariante de Ermakov (1.20), o qual, nas variáveis (2.39), tem a forma

$$I = \frac{1}{2} \left( \bar{x} \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} - \bar{y} \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}} \right)^2 + \int^{\bar{y}/\bar{x}} f(\lambda) d\lambda + \int^{\bar{x}/\bar{y}} g(\lambda) d\lambda. \quad (2.45)$$

Com isto,

$$\bar{y}d\bar{x}/d\bar{t} - \bar{x}d\bar{y}/d\bar{t} = h(\eta; I)/2\sqrt{\eta}, \quad (2.46)$$

onde definiu-se uma família uniparamétrica de funções  $h(\eta; I)$  dada por

$$h(\eta; I) = 2\sqrt{2\eta} \left( I - \int^{1/\sqrt{\eta}} f(\lambda) d\lambda - \int^{\sqrt{\eta}} g(\lambda) d\lambda \right)^{1/2}. \quad (2.47)$$

Por meio da relação (2.46), converte-se a equação (2.44) em

$$d\eta/d\bar{t} = \xi^2(\eta) h(\eta; I). \quad (2.48)$$

Utilizando esta última relação e a transformação (2.43), segue que

$$\frac{d\xi}{d\eta} = -\frac{1}{\bar{y}^2} \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}} \frac{d\bar{t}}{d\eta} = -\frac{1}{h(\eta; I)} \frac{d\bar{y}}{d\bar{t}}. \quad (2.49)$$

Derivando mais uma vez e substituindo  $d^2\bar{y}/d\bar{t}^2$  do sistema de ELRR autônomo (2.41), obtém-se uma família uniparamétrica de equações de segunda ordem lineares,

$$\frac{d}{d\eta} \left( h(\eta; I) \frac{d\xi}{d\eta} \right) + \frac{1}{\sqrt{\eta}h(\eta; I)} g(\sqrt{\eta})\xi = 0. \quad (2.50)$$

Cada elemento desta família de equações é identificado por um valor numérico do invariante de Ermakov.

A linearização exposta acima assemelha-se a linearização da equação de Riccati, na qual a linearização é obtida às custas do aumento da ordem da equação (ver, por exemplo, [73] para detalhes). Aqui, é introduzida uma variável auxiliar,  $C(t)$ , que não comparece no sistema original, representando um grau de liberdade extra.

O processo de linearização é semelhante ao usado no problema de Kepler, onde se faz uso explícito da constância do momentum angular. No caso do sistema de ELRR, a força não é central, o que poderia, em princípio, inviabilizar o processo de linearização.

Entretanto, o invariante de Ermakov cumpre, neste contexto, o papel do momentum angular no problema de Kepler, garantindo a linearização.

Qualquer processo de linearização pressupõe que a solução do problema original, não linear, possa ser obtida a partir da solução do problema linearizado. Presentemente, obtém-se a solução do sistema de ELRR a partir da equação (2.50) como segue. Seja

$$\xi = c_1\xi(\eta) + c_2\xi(\eta) \quad (2.51)$$

a solução geral da equação (2.50), sendo  $\xi_1$  e  $\xi_2$  duas soluções particulares e  $c_1$  e  $c_2$  constantes arbitrárias. A partir da solução (2.51), é possível recobrar a solução do sistema de ELRR original. Para demonstrar isto, inicialmente utiliza-se a inversão da transformação (2.43),

$$\bar{x} = \sqrt{\eta}/(c_1\xi_1 + c_2\xi_2) \quad , \quad \bar{y} = 1/(c_1\xi_1 + c_2\xi_2) \quad , \quad (2.52)$$

onde utilizou-se explicitamente a solução (2.51).

Ocorre que a relação (2.52) fornece  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  em termos da variável  $\eta$ , enquanto o desejado é a solução em termos da variável  $\bar{t}$ . Para obter isto, utiliza-se a relação (2.48), que fornece a lei de transformação da variável independente,

$$\frac{d\eta}{d\bar{t}} = h(\eta; I)(c_1\xi_1(\eta) + c_2\xi_2(\eta))^2. \quad (2.53)$$

Nesta última equação, o lado direito é uma função conhecida de  $\eta$ . Em princípio, é possível efetuar a quadratura, daí advindo

$$\bar{t}(\eta) = c_3 + \int^n \frac{d\lambda}{h(\lambda; I)(c_1\xi_1(\lambda) + c_2\xi_2(\lambda))^2}, \quad (2.54)$$

onde  $c_3$  é uma nova constante de integração. O lado direito da equação (2.54) não é uma função constante de  $\eta$ . Pelo teorema da função implícita, localmente encontra-se uma função  $\eta(\bar{t})$  obtida por inversão da relação (2.54). Inserindo esta função em (2.52), obtém-se finalmente

$$\bar{x}(\bar{t}) = \sqrt{\eta(\bar{t})}/(c_1\xi_1(\eta(\bar{t})) + c_2\xi_2(\eta(\bar{t}))) \quad , \quad \bar{y}(\bar{t}) = 1/(c_1\xi_1(\eta(\bar{t})) + c_2\xi_2(\eta(\bar{t}))) \quad , \quad (2.55)$$

que envolve quatro constantes arbitrárias,  $c_1, c_2, c_3$  e  $I$ . A constante  $c_3$  surge da definição de  $\bar{t}$  dada pela equação (2.54). A constante  $I$  está presente como um parâmetro na equação linear (2.50), e, portanto, nas soluções  $\xi_1$  e  $\xi_2$ .

A solução final do sistema de ELRR original ainda não é dada por (2.55). É preciso, como passo final, inverter a transformação (2.39), usada para tornar autônomas as

equações de movimento. Esta inversão, entretanto, depende de uma solução particular da equação (2.40) do OHDT. Esta nem sempre é disponível, para frequências arbitrárias. Supondo que a inversão seja feita, obtém-se, a partir da relação (2.55),

$$x = C(t)\bar{x}(\bar{t}(t)) \quad , \quad y = C(t)\bar{y}(\bar{t}(t)) \quad . \quad (2.56)$$

Esta é a solução geral do sistema de ELRR, encontrada através da solução geral da equação (2.50) e, tanto quanto a solução (2.55), envolve quatro constantes arbitrárias. Como a equação linear depende parametricamente de  $I$ , as soluções variam qualitativamente com a variação de  $I$ .

Como exemplo do processo de linearização, será considerado o sistema de Pinney acoplado [42, 127], definido pelas equações de movimento

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = -\alpha xy^{-4} + \beta x^{-3}, \quad (2.57)$$

$$\ddot{y} + \omega^2(t)y = -\gamma yx^{-4} + \delta y^{-3}, \quad (2.58)$$

onde  $\omega(t)$  é uma frequência arbitrária e  $\alpha, \beta, \gamma$  e  $\delta$  são constantes não negativas. Quando  $\alpha = \beta = \gamma = 0, \delta = 1$ , o sistema de Pinney acoplado reduz-se ao sistema de Ermakov–Pinney, dado pelas equações (1.1)–(1.3). De modo mais geral, o sistema (2.57–2.58) é um sistema de ELRR, definido pelas funções

$$f(\lambda) = -\alpha\lambda^{-3} + \beta\lambda \quad , \quad g(\lambda) = -\gamma\lambda^{-3} + \delta\lambda \quad (2.59)$$

no par (1.16–1.17).

O sistema de Pinney acoplado aparece na teoria de fluidos de duas camadas [42, 127], no regime de grandes comprimentos de onda. Para a obtenção do par (2.57–2.58) neste modelo, deve-se fazer certas hipóteses sobre o campo de velocidades do fluido e sobre as profundidades de cada camada. Com estes pressupostos, reduz-se o modelo de fluidos (de dimensão infinita) ao sistema de Pinney acoplado (de dimensionalidade finita).

No que segue, será considerado que os parâmetros do sistema de Pinney acoplado satisfazem

$$\alpha + \delta = \beta + \gamma = 1, \quad (2.60)$$

o que é compatível com a física do problema [42, 127]. Levando em consideração a relação (2.60), as funções dadas em (2.59) e a forma definida em (2.47) da função  $h(\eta; I)$ , obtém-se

$$h(\eta; I) = 2(-\eta^2 + 2I\eta - 1)^{1/2}. \quad (2.61)$$

Com esta função, imediatamente encontra-se a equação linear (2.50) para o sistema de Pinney acoplado,

$$(\eta^2 - 2I\eta + 1)\frac{d^2\xi}{d\eta^2} + (\eta - I)\frac{d\xi}{d\eta} + \frac{1}{4\eta^2}(\gamma - \delta\eta^2)\xi = 0. \quad (2.62)$$

É possível converter a equação (2.62) numa forma conhecida, através da transformação de variáveis  $(\xi, \eta) \mapsto (\bar{\xi}, \Theta)$  definida por

$$\xi = \sqrt{\eta}\bar{\xi} \quad , \quad \eta = (I - \sqrt{I^2 - 1} \cos 2\Theta)^{-1} \quad , \quad (2.63)$$

a qual está bem definida desde que  $I^2 \neq 1$ . Desconsiderando esta possibilidade, obtém-se [42], usando a relação (2.60),

$$\frac{d^2\bar{\xi}}{d\Theta^2} + \left( \beta - \frac{\alpha}{I^2(1 - a \cos 2\Theta)^2} \right) \bar{\xi} = 0, \quad (2.64)$$

onde  $a = (1 - 1/I^2)^{1/2}$  é uma constante. A equação (2.64) é conhecida por equação de Ince [42]. Ou seja, pelo processo de linearização reduz-se o sistema de Pinney acoplado, que é um sistema de ELRR, à equação de Ince.

A equação de Ince não possui solução exata conhecida. Entretanto, é possível deduzir propriedades de estabilidade e periodicidade do sistema de Pinney acoplado a partir de alguns resultados conhecidos para a equação de Ince. Para  $\alpha = 0$ , a equação de Ince reduz-se a equação de um oscilador harmônico simples. Neste caso, obviamente tem-se a mão uma solução exata, que pode ser usada para a reconstrução da solução do sistema não linear original. Estes e outros aspectos da teoria encontram-se na referência [42].

Como já foi dito, o processo de linearização exposto, aparentemente, pode ser aplicado apenas aos sistemas de Ermakov do tipo ELRR, com frequência dependendo só do tempo. A razão disto é o papel crucial desempenhado pela variável  $C(t)$  definida na transformação (2.39). Esta função  $C(t)$  satisfaz a equação do OHDT (2.40), a qual está bem definida apenas se  $\omega = \omega(t)$ . Vale a pena questionar, entretanto, se a transformação (2.43) não pode ser utilizada para linearizar sistemas de Ermakov com frequências mais complexas. De fato, a transformação (2.39) tem o papel de eliminar a dependência explícita no tempo no sistema de ELRR. Quem realiza a linearização, na verdade, é a transformação (2.43).

Seja, pois, o sistema de Ermakov generalizado (1.23–1.24), com uma frequência  $\Omega$  podendo depender das variáveis dinâmicas e de suas derivadas até a primeira ordem. O invariante de Ermakov associado é dado pela equação (1.25). A questão que se propõe

é: para qual classe de frequências  $\Omega$  a linearização proposta para o caso do sistema de ELRR continua valendo?

Para responder à pergunta, seja o sistema de Ermakov generalizado (1.23–1.24), expresso em termos das variáveis  $(x, y, t)$ , e uma transformação de variáveis análoga àquela dada em (2.43),

$$\xi = 1/y \quad , \quad \eta = x^2/y^2 \quad . \quad (2.65)$$

A diferença desta transformação em relação a dada em (2.43) é que, agora, a transformação atua diretamente sobre as variáveis  $(x, y, t)$ . Com a definição (2.65), obtém-se

$$\frac{d}{d\eta} \left( h(\eta; I) \frac{d\xi}{d\eta} \right) = \frac{\Omega^2}{h(\eta; I)\xi^3}, \quad (2.66)$$

onde definiu-se uma função  $h(\eta; I)$  de modo análogo à definição (2.47),

$$h(\eta; I) = 2\sqrt{2\eta} \left( I - \int^{1/\sqrt{\eta}} F(\lambda) d\lambda \right)^{1/2}. \quad (2.67)$$

A equação (2.66) será linear se e somente se o seu lado direito for linear em  $d\xi/d\eta$ . Isto, por sua vez, ocorrerá se e somente se a frequência for uma função do tipo

$$\Omega^2 = \left( -\tilde{A}(\eta; I) \frac{d\xi}{d\eta} - \tilde{B}(\eta; I)\xi + \tilde{C}(\eta; I) \right) \xi^3, \quad (2.68)$$

onde  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$  são funções arbitrárias dos argumentos indicados. Foi incluída uma dependência em  $I$  para máxima generalidade. De fato, ao final será obtido um sistema de Ermakov generalizado dependendo das componentes da velocidade através de  $I$ . A forma explícita do sistema de Ermakov resultante será determinada adiante. Com a forma (2.68), a equação linear que se obtém é dada por

$$h(\eta; I) \frac{d}{d\eta} \left( h(\eta; I) \frac{d\xi}{d\eta} \right) + \tilde{A}(\eta; I) \frac{d\xi}{d\eta} + \tilde{B}(\eta; I)\xi = \tilde{C}(\eta; I). \quad (2.69)$$

Observe-se a possível presença de um termo que quebra a homogeneidade da equação.

A frequência (2.68) expressa-se em termos das coordenadas originais  $x$  e  $y$  e suas derivadas. Usando

$$d\eta/dt = h(\eta; I)\xi^2, \quad (2.70)$$

que é análoga a expressão (2.48), decorre da definição de  $\xi$  que

$$d\xi/d\eta = -\dot{y}/h(\eta; I). \quad (2.71)$$

A partir da equação (2.67), obtém-se

$$h = 2 \frac{x}{y} (x\dot{y} - y\dot{x}). \quad (2.72)$$

Levando em conta o par de equações (2.71–2.72), decorre que  $\Omega$  em termos das variáveis dinâmicas originais é dada por

$$\Omega^2 = \frac{1}{y^3} \left( A(x/y, x\dot{y} - y\dot{x})\dot{y} + \frac{1}{y} B(x/y, x\dot{y} - y\dot{x}) + C(x/y, x\dot{y} - y\dot{x}) \right), \quad (2.73)$$

onde definiram-se novas funções  $A$ ,  $B$  e  $C$  conforme

$$A(x/y, x\dot{y} - y\dot{x}) = \frac{1}{2(x/y)(x\dot{y} - y\dot{x})} \tilde{A} \left( \left(\frac{x}{y}\right)^2, \frac{(x\dot{y} - y\dot{x})^2}{2} + \int^{y/x} F(\lambda) d\lambda \right), \quad (2.74)$$

$$B(x/y, x\dot{y} - y\dot{x}) = -\tilde{B} \left( \left(\frac{x}{y}\right)^2, \frac{(x\dot{y} - y\dot{x})^2}{2} + \int^{y/x} F(\lambda) d\lambda \right), \quad (2.75)$$

$$C(x/y, x\dot{y} - y\dot{x}) = \tilde{C} \left( \left(\frac{x}{y}\right)^2, \frac{(x\dot{y} - y\dot{x})^2}{2} + \int^{y/x} F(\lambda) d\lambda \right). \quad (2.76)$$

Acima, inseriu-se a forma explícita do invariante de Ermakov em termos de  $x/y$  e de  $x\dot{y} - y\dot{x}$ .

Como se depreende da relação (2.73), a frequência não pode depender explicitamente do tempo. Consequentemente, os sistemas de Ermakov generalizados linearizados a partir da transformação (2.65) necessariamente são autônomos. Caso o tempo compareça nas equações de movimento, é preciso fazer alguma transformação que o elimine, tal como a transformação (2.39), apropriada para os sistemas de ELRR.

Considerando a forma (2.73), o procedimento mostra a linearização dos sistemas de Ermakov generalizados do tipo

$$\ddot{x} + \frac{x}{y^3} (A\dot{y} + B/y + C) = \frac{1}{yx^2} F(y/x), \quad (2.77)$$

$$\ddot{y} + \frac{1}{y^2} (A\dot{y} + B/y + C) = 0, \quad (2.78)$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são funções arbitrárias de  $x/y$  e  $x\dot{y} - y\dot{x}$ . Observe-se a possível dependência na velocidade. O procedimento para recobrar a solução do sistema de Ermakov generalizado a partir da solução da equação linear (2.69) é estritamente análogo ao apresentado para o caso do sistema de ELRR.

Um primeiro exemplo de sistema de Ermakov generalizado linearizável é dado pelo caso convencional de ELRR, com a frequência  $\omega(t)$  já eliminada. Com isto, basta tomar

$A = C = 0$  e  $B = b(x/y)$  no sistema (2.77–2.78), sendo  $b(x/y)$  uma função arbitrária mas independente da velocidade. Com a escolha proposta, obtém-se o sistema

$$\ddot{x} + \frac{x}{y^4} b(x/y) = \frac{1}{yx^2} F(y/x), \quad (2.79)$$

$$\ddot{y} + \frac{1}{y^3} b(x/y) = 0, \quad (2.80)$$

que é idêntico ao sistema de ELRR com frequência  $\omega = 0$ , sendo  $b$  e  $F$  adequadamente relacionadas às funções  $f$  e  $g$  no par (1.16–1.17).

Como segundo exemplo de sistema de Ermakov generalizado admitindo linearização segundo a linha proposta nesta seção, serão considerados os sistemas de Kepler-Ermakov [124]. Neste caso, a escolha adequada é dada por  $A = 0$ ,  $B = b(x/y)$  e  $C = c(x/y)$  no par (2.77–2.78). Com isto, obtém-se o sistema

$$\ddot{x} + \frac{x}{y^3} (b(x/y)/y + c(x/y)) = \frac{1}{yx^2} F(y/x), \quad (2.81)$$

$$\ddot{y} + \frac{1}{y^2} (b(x/y)/y + c(x/y)) = 0. \quad (2.82)$$

Este sistema foi considerado em [124] como uma perturbação do sistema de ELRR que preserva sua linearização. No entanto, a presente abordagem mostra que, na verdade, este sistema pertence a uma categoria de sistemas de Ermakov generalizada linearizável muito mais ampla. É desnecessário dizer que o ponto de vista adotado aqui tem suas raízes num conceito menos restritivo de “frequência” para os sistemas de Ermakov. Este ponto de vista não apenas é mais geral, como também mostra claramente a potencialidade máxima da linearização proposta.

### 2.3 Teoria de Lewis e Riesenfeld

Nas seções anteriores, foram analisadas as propriedades matemáticas básicas dos sistemas de Ermakov, vistos como sistemas dinâmicos clássicos. Entretanto, os sistemas de Ermakov não são menos importantes na mecânica quântica do que na mecânica clássica. A grande razão disto é o trabalho de Lewis e Riesenfeld [13]–[24], voltado para a busca de soluções exatas da equação de Schrödinger com Hamiltoniana explicitamente dependente do tempo. A teoria de Lewis e Riesenfeld obteve sucesso, em particular, no tratamento do OHDT quântico [24], mas seu alcance é muito mais geral. A aplicação do método de Lewis e Riesenfeld requer, antes de mais nada, o conhecimento de um operador Hermitiano invariante. A partir daí, expande-se a função de onda como uma combinação

linear das autofunções do operador Hermitiano invariante. Neste contexto, o invariante exato cumpre um papel análogo ao desempenhado pelo operador Hamiltoniano no caso dos sistemas autônomos.

Pelo seu alcance, o método de Lewis e Riesenfeld surge como a alternativa natural no tratamento exato de qualquer sistema quântico não autônomo. Isto motivou em larga margem a busca de sistemas com constantes de movimento exatas, entre os quais incluem-se os sistemas de Ermakov. Nesta seção, expõe-se em detalhe a teoria de Lewis e Riesenfeld. Em particular, aplica-se a teoria no caso de sistemas de Ermakov quânticos.

O problema básico que se propõe resolver é a equação de Schrödinger dependente do tempo,

$$H\psi(\mathbf{q}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi(\mathbf{q}, t)}{\partial t}, \quad (2.83)$$

onde  $H$  é o operador Hamiltoniano, com possível dependência temporal explícita. Além disso,  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)$  denota o vetor posição utilizando coordenadas cartesianas num espaço de configuração  $N$ -dimensional. A única representação utilizada ao longo de todo este trabalho é a representação de coordenadas. Assim, por exemplo, se

$$H_{cl} = \mathbf{p}^2/2 + V(\mathbf{q}, t) \quad (2.84)$$

é a função Hamiltoniana clássica do sistema, então

$$H = -\frac{\hbar^2}{2} \nabla^2 + V(\mathbf{q}, t) \quad (2.85)$$

representa o operador Hamiltoniano correspondente, sendo que  $\nabla^2$  é o Laplaciano. Nesta seção, será usado o subscrito “cl” para distinguir funções clássicas de operadores quânticos. A transposição da Hamiltoniana clássica dada em (2.84) para o operador quântico definido em (2.85) deu-se através da regra de correspondência

$$\mathbf{p} \longrightarrow -i\hbar \nabla, \quad (2.86)$$

fornecendo o operador momentum na representação de coordenadas.

Frequentemente se recorre a algum método perturbativo para o tratamento de problemas quânticos explicitamente dependentes do tempo. Os métodos mais utilizados são a teoria de perturbação dependente do tempo, a aproximação adiabática e a aproximação súbita [128]. Cada uma destas técnicas tem o seu alcance e suas limitações. A teoria de perturbação dependente do tempo é utilizada quando a parte dependente do tempo de  $H$  é pequena frente a parte autônoma, ou, mais precisamente, quando os elementos

de matriz da parte não autônoma são pequenos. A aproximação adiabática é apropriada quando  $H$  é lentamente variável no tempo. A aproximação súbita é adequada quando ocorre o inverso, ou seja, quando  $H$  varia bruscamente num curto intervalo de tempo. A teoria de Lewis e Riesenfeld, em contraposição a estas abordagens perturbativas, fornece a solução exata do problema. Como é de se esperar, a utilização de uma técnica exata tem o seu preço: requer a derivação de um invariante exato.

Isto leva a questão de como definir precisamente o que é um operador Hermitiano invariante. Classicamente, se  $I_{cl}$  é um invariante exato associado a um sistema de Hamiltoniana clássica  $H_{cl}$ , então  $\dot{I}_{cl} = 0$  equivale a

$$\frac{dI_{cl}}{dt} = \frac{\partial I_{cl}}{\partial t} + \{I_{cl}, H_{cl}\} = 0, \quad (2.87)$$

sendo que  $\{, \}$  é o colchete de Poisson usual. Ou seja [17], se  $A_{cl}$  e  $B_{cl}$  são funções quaisquer no espaço de fase,

$$\{A_{cl}, B_{cl}\} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial A_{cl}}{\partial q_i} \frac{\partial B_{cl}}{\partial p_i} - \frac{\partial B_{cl}}{\partial q_i} \frac{\partial A_{cl}}{\partial p_i} \right), \quad (2.88)$$

onde  $q_i$  e  $p_i$  são as posições e os momenta canonicamente conjugados, com  $i = 1, \dots, N$ . Define-se operador Hermitiano invariante como sendo qualquer operador  $I$  satisfazendo a equação quântica análoga a equação clássica (2.87),

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\partial I}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [I, H] = 0, \quad (2.89)$$

onde

$$[A, B] = AB - BA \quad (2.90)$$

é o comutador entre dois operadores  $A$  e  $B$  atuando no espaço de Hilbert.

Um exemplo imediato de invariante exato quântico é o próprio Hamiltoniano, quando este independe do tempo. De fato, isto é constatado imediatamente na equação (2.89) quando  $\partial H/\partial t = 0$ , pois  $[H, H] = 0$ . No caso independente do tempo, a função de onda pode ser expandida como uma combinação linear na forma

$$\psi(\mathbf{q}, t) = \sum_n c_n \exp\left(\frac{E_n t}{i\hbar}\right) u_n(\mathbf{q}), \quad (2.91)$$

onde  $c_n$  são constantes possivelmente complexas, e  $E_n$  e  $u_n$  são os autovalores e autofunções do Hamiltoniano,

$$H u_n(\mathbf{q}) = E_n u_n(\mathbf{q}). \quad (2.92)$$

Por simplicidade de notação, foi suposto, neste caso, um espectro discreto e não degenerado para  $H$ . Além disso, a expansão (2.91) pressupõe que as autofunções  $u_n(\mathbf{q})$  de  $H$  constituem um conjunto completo,

$$\sum_n u_n^*(\mathbf{q})u_n(\mathbf{q}') = \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}'), \quad (2.93)$$

onde usou-se a função delta de Dirac. Sem nenhuma perda de generalidade, sempre se pode considerar válida a relação de ortonormalização

$$\int u_m^*(\mathbf{q})u_n(\mathbf{q}) d\mathbf{q} = \delta_{mn}, \quad (2.94)$$

onde  $d\mathbf{q} = dq_1 \dots dq_N$  é o elemento de volume e  $\delta_{mn}$  é o símbolo de Kronecker.

A situação muda quando o Hamiltoniano depende explicitamente do tempo. Neste caso, a expansão (2.91) não é mais possível na forma proposta, pois tanto as autofunções quanto os autovalores do Hamiltoniano passam a ser dependentes do tempo. O fato de  $H$  ser um invariante exato no caso autônomo sugere que a base das autofunções de um invariante exato pode, de algum modo, ser útil num contexto mais geral. Seja, pois,  $I$  um operador Hermitiano invariante, satisfazendo a relação (2.89). Seja também uma base composta das autofunções  $\psi_n(\mathbf{q}, t)$  de  $I$ ,

$$I\psi_n(\mathbf{q}, t) = \lambda_n\psi_n(\mathbf{q}, t), \quad (2.95)$$

sendo  $\lambda_n$  os autovalores (reais, pois  $I$  é Hermitiano) do operador invariante. Por definição, supõe-se que estão satisfeitas as relações

$$\sum_n \psi_n^*(\mathbf{q}, t)\psi_n(\mathbf{q}', t) = \delta(\mathbf{q} - \mathbf{q}'), \quad (2.96)$$

$$\int \psi_m^*(\mathbf{q}, t)\psi_n(\mathbf{q}, t) d\mathbf{q} = \delta_{mn}, \quad (2.97)$$

atestando que o conjunto escolhido é completo e ortonormal. Por conveniência de notação e sem prejuízo da generalidade, tomou-se um espectro discreto e não degenerado de autovalores. Eventuais modificações de notação podem ser incluídas nos casos em que  $I$  possui ao menos uma parte do espectro contínua, ou degenerada.

Para obter a solução exata de Lewis e Riesenfeld, será suposta, desde o início, uma solução elementar  $v_n(\mathbf{q}, t)$  da equação de Schrödinger na forma

$$v_n(\mathbf{q}, t) = \exp(i\alpha_n(t))\psi_n(\mathbf{q}, t), \quad (2.98)$$

onde  $\alpha_n(t)$  é uma fase real dependente apenas do tempo e, como já foi dito,  $\psi_n$  é uma autofunção de  $I$ . O conjunto composto pelas autofunções  $v_n$  é uma base no espaço de Hilbert plenamente aceitável, pois é completo e ortonormal. De fato, de acordo com a definição (2.98), as novas autofunções diferem apenas por um fator de fase das antigas.

Na equação (2.98), as fases  $\alpha_n(t)$  ainda estão por determinar. A obtenção das fases é conseguida impondo que  $v_n$  satisfaça a equação de Schrödinger (2.83). Uma vez obtidas as fases, tem-se a solução final da equação de Schrödinger na forma da combinação linear

$$\psi(\mathbf{q}, t) = \sum_n c_n \exp(i\alpha_n(t))\psi_n(\mathbf{q}, t), \quad (2.99)$$

sendo que  $c_n$  são constantes, possivelmente complexas. É certamente instrutiva a comparação entre as expansões (2.91), referente ao caso autônomo, e (2.99).

A tarefa básica que ainda resta por fazer é determinar as fases na equação (2.99). Impondo que (2.98) seja solução da equação de Schrödinger,

$$\left( H - i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \right) v_n(\mathbf{q}, t) = 0, \quad (2.100)$$

decorre que

$$H\psi_n + \hbar\dot{\alpha}_n\psi_n - i\hbar\frac{\partial\psi_n}{\partial t} = 0. \quad (2.101)$$

Multiplicando por  $\psi_m^*(\mathbf{q}, t)$ , integrando e usando a relação de ortonormalidade (2.94), vem, após rearranjar, que

$$\hbar\dot{\alpha}_n\delta_{mn} = \langle \psi_m | \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) | \psi_n \rangle, \quad (2.102)$$

onde se usou a notação de Dirac. Ou seja, se  $|u\rangle$  e  $|v\rangle$  são dois vetores quaisquer no espaço de Hilbert, então seu produto escalar  $\langle u|v\rangle$  é dado por

$$\langle u|v\rangle = \int u^*(\mathbf{q}, t)v(\mathbf{q}, t) d\mathbf{q} \quad (2.103)$$

na representação de coordenadas. Por definição, vale também  $u(\mathbf{q}, t) = \langle \mathbf{q}|u\rangle$ .

A equação (2.102) apresenta-se de modo distinto nos casos  $m = n$  e  $m \neq n$ . Para  $m \neq n$ , esta equação está satisfeita identicamente. Para provar isto, invoca-se o fato, até agora ignorado, de que  $I$  é um invariante exato. A prova é um tanto extensa, mas interessante, pois, como se verá, contém o resultado adicional de que os autovalores  $\lambda_n$  de  $I$  são constantes no tempo. Seja o operador  $N$  identicamente nulo definido por

$$N = i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} + IH - HI = 0. \quad (2.104)$$

O fato deste operador ser identicamente nulo deve-se à condição (2.89), a qual expressa a invariância de  $I$ . Fazendo  $N$  atuar sobre um autovetor  $|\psi_n\rangle$  e usando a equação (2.95), chega-se a

$$N\psi_n = i\hbar \frac{\partial I}{\partial t} |\psi_n\rangle + IH|\psi_n\rangle - \lambda_n H|\psi_n\rangle = 0. \quad (2.105)$$

Tomando o produto escalar com  $|\psi_m\rangle$ , obtém-se

$$i\hbar \langle \psi_m | \frac{\partial I}{\partial t} | \psi_n \rangle + (\lambda_m - \lambda_n) \langle \psi_m | H | \psi_n \rangle = 0. \quad (2.106)$$

Para  $m = n$ , esta última equação implica que  $\partial I / \partial t$  tem elementos diagonais nulos,

$$\langle \psi_n | \frac{\partial I}{\partial t} | \psi_n \rangle = 0. \quad (2.107)$$

Por outro lado, diferenciando a relação (2.95) frente a  $t$ , vem que

$$\frac{\partial I}{\partial t} \psi_n + I \frac{\partial \psi_n}{\partial t} = \frac{\partial \lambda_n}{\partial t} \psi_n + \lambda_n \frac{\partial \psi_n}{\partial t}. \quad (2.108)$$

Multiplicando isto por  $\psi_n^*$ , integrando sobre todo o espaço, usando (2.107) e considerando a ortonormalidade, deduz-se que

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial t} = 0. \quad (2.109)$$

Este resultado mostra que os autovalores de um operador Hermitiano invariante são constantes no tempo. O resultado é bastante geral, não sendo feitas quaisquer restrições nem sobre a forma do Hamiltoniano nem sobre a forma do invariante exato. Observe-se que, como  $I$  possivelmente contém dependência temporal, as autofunções  $\psi_n$  podem variar com o tempo.

Considerando agora as equações (2.108) e (2.109), vem que

$$\frac{\partial I}{\partial t} \psi_n = (\lambda_n - I) \frac{\partial \psi_n}{\partial t}. \quad (2.110)$$

Multiplicando isto por  $\psi_m^*$ , integrando sobre todo o espaço e lançando mão de (2.95), decorre que

$$\langle \psi_m | \frac{\partial I}{\partial t} | \psi_n \rangle = (\lambda_n - \lambda_m) \langle \psi_m | \frac{\partial}{\partial t} | \psi_n \rangle. \quad (2.111)$$

Esta última equação tem uma forma mais útil quando combinada com a relação (2.106), o que permite eliminar  $\langle \psi_m | \partial I / \partial t | \psi_n \rangle$ . Com isto,

$$(\lambda_m - \lambda_n) \langle \psi_m | \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) | \psi_n \rangle = 0. \quad (2.112)$$

Quando  $m = n$ , o conteúdo da relação (2.112) é nulo. Quando  $m \neq n$ , entretanto, a relação (2.112) acarreta o resultado fundamental

$$\langle \psi_m | \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) | \psi_n \rangle = 0 \quad , \quad m \neq n \quad . \quad (2.113)$$

Inserindo (2.113) em (2.102) quando  $m \neq n$ , obtém-se uma identidade. Mas a relação (2.102) não é identicamente satisfeita quando  $m = n$ . Caso fosse assim, as autofunções de  $I$  satisfariam a equação de Schrödinger de modo automático. Na verdade, a equação (2.102), que é a equação básica para as fases  $\alpha_n$  presentes na expansão (2.99), implica, para  $m = n$ ,

$$\hbar \dot{\alpha}_n = \langle \psi_n | \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) | \psi_n \rangle . \quad (2.114)$$

Esta é a equação que determina cada uma das fases presentes na solução exata (2.99).

Recapitulando, o método de Lewis e Riesenfeld compõe-se das seguintes etapas: a) encontrar um operador Hermitiano invariante; b) resolver a equação de autovalores e autofunções do operador invariante; c) resolver o conjunto de equações diferenciais ordinárias (2.114) para as fases  $\alpha_n(t)$ ; d) expressar a solução exata  $\psi(\mathbf{q}, t)$  segundo a combinação linear (2.99). Sem dúvida, dentre estes os itens a) e b) são os que podem oferecer maior dificuldade em problemas específicos. Os itens c) e d) sempre podem ser atendidos de imediato.

Os resultados da teoria de Lewis e Riesenfeld expostos nos casos em que  $I$  possui um espectro não degenerado podem ser facilmente estendidos aos casos degenerados. Seja

$$I\psi_{nk}(\mathbf{q}, t) = \lambda_{nk}\psi_{nk}(\mathbf{q}, t) \quad (2.115)$$

a equação de auto-estados e autovalores para o operador Hermitiano invariante. Nesta equação,  $k$  representa um índice, ou um conjunto de índices, necessário para especificar completamente um auto-estado. A solução exata de Lewis e Riesenfeld apropriada a um espectro degenerado é dada por

$$\psi(\mathbf{q}, t) = \sum_{nk} c_{nk} \exp(i\alpha_{nk}(t)) \psi_{nk}(\mathbf{q}, t) , \quad (2.116)$$

onde as fases satisfazem

$$\hbar \dot{\alpha}_{nk} = \langle \psi_{nk} | \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) | \psi_{nk} \rangle . \quad (2.117)$$

Para ilustrar a teoria de Lewis e Riesenfeld, será considerada uma classe de sistemas de Ermakov introduzida por Hartley e Ray [29]. O sistema é descrito pela Hamiltoniana clássica

$$H_{cl}(x, p, t) = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}\omega^2(t)x^2 + \frac{1}{y^2}U(x/y), \quad (2.118)$$

onde  $\omega$  e  $U$  são funções arbitrárias dos argumentos indicados e  $y = y(t)$  é uma função do tempo satisfazendo a equação de Pinney

$$\ddot{y} + \omega^2(t)y = 1/y^3. \quad (2.119)$$

O sistema dinâmico possui espaço de fase bidimensional, de coordenadas  $(x, p)$ , e dependência temporal explícita. A equação de movimento Newtoniana advinda da Hamiltoniana (2.118) é dada por

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = -U'(x/y)/y^3, \quad (2.120)$$

onde a linha representa derivada frente ao argumento indicado. Se reconhece o par (2.119–2.120) como um sistema de ELRR na forma (1.16–1.17) com funções  $f$  e  $g$  definidas por

$$f(1/\lambda) = -\lambda^2 U'(\lambda) \quad , \quad g(\lambda) = \lambda \quad . \quad (2.121)$$

O invariante de Ermakov clássico correspondente é

$$I_{cl} = \frac{1}{2}(yp - \dot{y}x)^2 + \frac{1}{2}(x/y)^2 + U(x/y). \quad (2.122)$$

Essencialmente, o par (2.119–2.120) representa um sistema de Ermakov simplificado, no qual a equação para a variável auxiliar  $y$  está desacoplada. Como caso particular deste tipo de sistema, encontra-se o OHDT, já tratado por Lewis e Riesenfeld [24]. Entretanto, o par (2.119–2.120) descreve uma família infinita de sistemas não lineares, já que a função  $U$  é arbitrária.

Considere-se agora o problema obtido a partir da quantização do sistema de Ermakov clássico (2.119–2.120). A questão é saber como encontrar a solução  $\psi(x, t)$  da equação de Schrödinger (2.83) com

$$H = -\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\omega^2(t)x^2 + \frac{1}{y^2}U(x/y). \quad (2.123)$$

Esta é a representação do Hamiltoniano obtido a partir da quantização de  $H_{cl}$  em (2.118) fazendo  $p \rightarrow -i\hbar\partial/\partial x$ . O método de Lewis e Riesenfeld se apresenta como a alternativa natural ao problema, pois o sistema possui o operador Hermitiano invariante dado por

$$I = \frac{1}{2} \left( y^2 p^2 - y\dot{y}(xp + px) + \dot{y}^2 x^2 \right) + \frac{1}{2}(x/y)^2 + U(x/y). \quad (2.124)$$

Este é o operador obtido a partir da quantização do invariante de Ermakov (2.122). Note-se que  $x$  e  $p$  não comutam no presente contexto, pois satisfazem a relação básica

$$[x, p] = i\hbar. \quad (2.125)$$

Logo, o operador  $xp + px$  não pode ser considerado simplesmente como sendo  $2px$ , por exemplo. O ordenamento utilizado garante o caráter Hermitiano do invariante de Ermakov quântico (2.124). Para não carregar a notação, se continuará denotando  $x$  e  $p$  como sendo os operadores quânticos correspondentes às funções  $x$  e  $p$  clássicas.

O método de Lewis e Riesenfeld demanda a resolução do problema de auto-estados e autovalores para o operador diferencial dado em (2.124). Chamando de  $|\psi_n\rangle$  os autovetores e de  $\lambda_n$  os autovalores de  $I$ , tem-se que

$$I|\psi_n\rangle = \lambda_n|\psi_n\rangle. \quad (2.126)$$

Pela teoria de Lewis e Riesenfeld, os autovalores  $\lambda_n$  são constantes no tempo. A solução da equação de Schrödinger é dada por (2.99), onde  $\psi_n(x, t) = \langle x|\psi_n\rangle$  e as fases satisfazem a equação (2.114).

Para converter o problema de autovalores e autofunções (2.126) numa forma mais apropriada, introduz-se o operador unitário  $O$  definido por

$$O = \exp(-iy^2/2\hbar y), \quad (2.127)$$

o qual induz a transformação unitária

$$|\bar{\psi}_n\rangle = O|\psi_n\rangle, \quad (2.128)$$

$$\bar{I} = OIO^\dagger. \quad (2.129)$$

O novo conjunto de autovetores  $|\bar{\psi}_n\rangle$  permanece ortonormal e completo, pois a transformação utilizada é unitária. A equação de autovalores (2.126) é convertida em

$$\bar{I}|\bar{\psi}_n\rangle = \lambda_n|\bar{\psi}_n\rangle, \quad (2.130)$$

sendo que [29]

$$\bar{I} = \frac{1}{2}y^2p^2 + \frac{1}{2}(x/y)^2 + U(x/y). \quad (2.131)$$

Esta última fórmula pode ser provada por cálculo direto ou, mais rapidamente, pelo lema de Baker-Campbell-Hausdorff, dado por

$$\exp(A)B\exp(-A) = B + [A, B] + (1/2!)[A, [A, B]] + \dots, \quad (2.132)$$

onde  $A$  e  $B$  são observáveis arbitrários. Assim, por exemplo, usando a relação básica (2.125), decorre que

$$O p O^\dagger = p + \dot{y} x / y. \quad (2.133)$$

Na representação de coordenadas, a equação de autovalores (2.130) é

$$\left( -\frac{\hbar^2 y^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{2} (x/y)^2 + U(x/y) \right) \bar{\psi}_n(x, t) = \lambda_n \bar{\psi}_n(x, t), \quad (2.134)$$

onde usou-se o resultado (2.131) e  $\bar{\psi}_n(x, t) = \langle x | \bar{\psi}_n \rangle$ .

Seja a variável re-escalada  $Q$  definida por

$$Q = x/y \quad (2.135)$$

e a transformação

$$\bar{\psi}_n(x, t) = \frac{1}{\sqrt{y}} \varphi_n(Q), \quad (2.136)$$

que define um novo conjunto de autofunções  $\varphi_n(Q)$ . Com as relações (2.135) e (2.136), a equação de autovalores (2.134) torna-se

$$\left( -\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2}{dQ^2} + \frac{Q^2}{2} + U(Q) \right) \varphi_n(Q) = \lambda_n \varphi_n(Q). \quad (2.137)$$

Os novos auto-estados estão normalizados, pois

$$\int \varphi_n^*(Q) \varphi_n(Q) dQ = \int \bar{\psi}_n^*(x, t) \bar{\psi}_n(x, t) dx = 1. \quad (2.138)$$

Foi possível transformar a equação de auto-estados e autovalores para o operador Hermitiano invariante  $I$  na equação (2.137), que é formalmente idêntica à equação de Schrödinger independente do tempo. Neste contexto, sendo  $Q$  a posição,  $\varphi_n(Q)$  faz o papel de auto-estado,  $\lambda_n$  faz o papel de energia e

$$\bar{V}(Q) = Q^2/2 + U(Q) \quad (2.139)$$

faz o papel de potencial (estacionário). Entretanto, o procedimento utilizado não tem caráter universal. A obtenção de uma equação de Schrödinger independente do tempo foi possível graças à relativa simplicidade do operador  $I$ .

Supondo que  $U(Q)$  seja simples o bastante para que a equação (2.137) possa ser resolvida, obtém-se, usando as relações (2.128), (2.135) e (2.136),

$$\psi_n(x, t) = y^{-1/2} \exp(i\dot{y}x^2/2\hbar y) \varphi_n(x/y) \quad (2.140)$$

como sendo a forma exata dos auto-estados do operador Hermitiano invariante.

Tendo encontrado os auto-estados, resta ainda obter as fases  $\alpha_n(t)$  que aparecem na solução exata (2.99) de Lewis e Riesenfeld. Inserindo a solução (2.140) na equação das fases (2.114), usando a equação de Pinney (2.119) e perfazendo cálculos extensos mas simples, vem que

$$\hbar \dot{\alpha}_n = -\lambda_n/y^2, \quad (2.141)$$

cuja solução é

$$\alpha_n = -\frac{\lambda_n}{\hbar} \int_0^t \frac{d\lambda}{y^2(\lambda)}. \quad (2.142)$$

Já se tem à mão todos os elementos para escrever a solução exata (2.99) para o problema quântico cujo Hamiltoniano é dado em (2.123). A solução exata de Lewis e Riesenfeld é dada por

$$\psi(x, t) = \sum_n c_n y^{-1/2} \exp\left(-i \frac{\lambda_n}{\hbar} \int_0^t \frac{d\lambda}{y^2(\lambda)}\right) \exp\left(i \frac{\dot{y} x^2}{2\hbar y}\right) \varphi_n(x/y), \quad (2.143)$$

onde  $\varphi_n$  satisfaz a equação de Schrödinger independente do tempo (2.137) e  $y$  satisfaz a equação de Pinney (2.119). Usando as relações de ortonormalidade, não é difícil expressar as constantes  $c_n$  em termos da função de onda  $\psi(x, 0)$  no instante inicial. O resultado é que

$$c_n = y_0^{-1/2} \int \exp\left(-i \frac{\dot{y}_0 x^2}{2\hbar y_0}\right) \varphi_n^*(x/y_0) \psi(x, 0) dx, \quad (2.144)$$

onde

$$y_0 = y(0) \quad , \quad \dot{y}_0 = \dot{y}(0) \quad . \quad (2.145)$$

O potencial em (2.139) contém a função arbitrária  $U(Q)$ . A toda equação de Schrödinger independente do tempo solúvel corresponde uma função  $U(Q)$ . Por exemplo, (2.137) torna-se a equação de Schrödinger para o oscilador harmônico simples se  $U = 0$ . Recapitulando a forma do operador Hamiltoniano original em (2.123), constata-se que  $U = 0$  corresponde ao OHDT quântico. Neste caso, a solução do problema autônomo se expressa por meio dos polinômios de Hermite  $H_n(Q)$ ,

$$\varphi_n(Q) = \left(\sqrt{\pi \hbar} 2^n n!\right)^{-1/2} \exp(-Q^2/2\hbar) H_n(Q/\sqrt{\hbar}) \quad (2.146)$$

$$\lambda_n = \hbar(n + 1/2) \quad , \quad n = 0, 1, \dots \quad (2.147)$$

Desta forma, a solução exata para o OHDT quântico é dada por

$$\psi(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \exp\left(-i(n + 1/2) \int_0^t d\lambda/y^2(\lambda)\right) \psi_n(x, t), \quad (2.148)$$

onde as autofunções do operador invariante são dadas por

$$\psi_n(x, t) = \left(\sqrt{\pi\hbar}2^n n! y\right)^{-1/2} \exp\left(-\left(1/y^2 - iy/y\right)\frac{x^2}{2\hbar}\right) H_n\left(\frac{x}{\sqrt{\hbar}y}\right). \quad (2.149)$$

Provou-se a solubilidade exata do OHDT quântico pelo método de Lewis e Riesenfeld. Na verdade, a estratégia original de Lewis e Riesenfeld [24] está calcada na introdução de certos operadores de criação e destruição. Entretanto, para funções  $U$  arbitrárias, torna-se difícil ou até mesmo impossível a eleição de um conjunto adequado de operadores de criação e destruição. Eis o porquê da maior amplitude do método usado por Hartley e Ray, baseado no emprego de uma transformação unitária e de um re-escalamento da variável espacial e dos auto-estados. Finalmente, é relevante deixar claro que o OHDT quântico já havia tido sua solução exata descoberta anteriormente ao trabalho de Lewis e Riesenfeld por Husimi [129], que utilizou um *ansatz* Gaussiano para a função de onda. Este tipo de abordagem, entretanto, não tem a generalidade e o caráter sistemático do método de Lewis e Riesenfeld.

Se a função  $U(Q)$  é a responsável pela complexidade da equação de Schrödinger independente do tempo (2.137), a frequência  $\omega(t)$  é a responsável pela complexidade da equação de Pinney (2.119). Esta equação não é de maneira alguma de importância secundária, pois a variável auxiliar  $y(t)$  comparece na solução exata de Lewis e Riesenfeld. Como usual, basta uma solução particular da equação de Pinney.

Podem-se encontrar na literatura outros desenvolvimentos baseados na teoria de Lewis e Riesenfeld. Hartley e Ray [30] aplicaram a técnica de Lewis e Riesenfeld ao sistema de Ermakov quântico de Hamiltoniano dado em (2.123), porém supondo um espectro contínuo para  $I$ . Ray e Hartley aplicaram o formalismo de Lewis e Riesenfeld a sistemas de Ermakov quânticos multidimensionais [130]. Ray [78] desenvolveu uma técnica para a derivação de operadores Hermitianos invariantes baseada diretamente no formalismo quântico. Esta técnica distingue-se da utilizada no exemplo nesta seção, onde o operador invariante (2.124) foi obtido a partir da quantização do invariante de Ermakov (2.122). A metodologia empregada por Ray complementa a teoria de Lewis e Riesenfeld.

## 2.4 Estados coerentes

Os estados coerentes do oscilador harmônico simples foram obtidos originalmente por Schrödinger [131] como sendo os estados quânticos cujos valores esperados dos operadores

posição e momentum são idênticos às soluções clássicas. Os estados coerentes do oscilador harmônico simples possuem diversas propriedades, entre as quais: a) minimizam as relações de incerteza; b) seu pacote de ondas não se alarga; c) são auto-estados do operador destruição associado ao oscilador. Estas propriedades tem estimulado a busca dos estados coerentes de sistemas mais gerais do que o oscilador harmônico simples [132]. Em particular, Hartley e Ray [133] encontraram estados coerentes para o OHDT utilizando a solução exata de Lewis e Riesenfeld. Esta seção dedica-se ao uso da solução exata de Lewis e Riesenfeld na busca de estados coerentes. Analisa-se em detalhe o caso do OHDT, adotando a estratégia de Hartley e Ray.

Para introduzir o tema, veja-se o caso do oscilador harmônico simples, cujo operador Hamiltoniano é dado por

$$H = p^2/2 + \omega_0^2 x^2/2, \quad (2.150)$$

onde  $\omega_0$  é uma frequência independente do tempo e  $p$  e  $x$  são os operadores momentum e posição. A forma geral dos estados coerentes para o oscilador harmônico simples é dada por

$$|\alpha, t \rangle = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} e^{-i\omega_0(n+1/2)t} |\Phi_n \rangle, \quad (2.151)$$

onde  $\alpha = u + iv$  é um número complexo arbitrário e  $|\Phi_n \rangle$  é um auto-estado de  $H$ ,

$$H|\Phi_n \rangle = \hbar\omega_0(n + 1/2)|\Phi_n \rangle. \quad (2.152)$$

Na última fórmula, já consta a expressão usual para as auto-energias  $E_n$  do oscilador harmônico simples,

$$E_n = \hbar\omega_0(n + 1/2) \quad , \quad n = 0, 1, \dots, \infty \quad . \quad (2.153)$$

Os auto-estados  $|\Phi_n \rangle$  podem ser obtidos [128] por meios puramente algébricos, através dos operadores criação e destruição definidos respectivamente por

$$a_0^\dagger = (2\hbar\omega_0)^{-1/2}(\omega_0 x - i p), \quad (2.154)$$

$$a_0 = (2\hbar\omega_0)^{-1/2}(\omega_0 x + i p). \quad (2.155)$$

Vale a relação de comutação

$$[a_0, a_0^\dagger] = 1. \quad (2.156)$$

Para construir os auto-estados do Hamiltoniano, lança-se mão da fatorização

$$H = \hbar\omega_0(a_0^\dagger a_0 + 1/2), \quad (2.157)$$

bem como das relações fundamentais

$$a_0|\Phi_n \rangle = n^{1/2}|\Phi_{n-1} \rangle, \quad (2.158)$$

$$a_0^\dagger|\Phi_n \rangle = (n+1)^{1/2}|\Phi_{n+1} \rangle \quad (2.159)$$

Estas duas últimas relações mostram como os operadores criação e destruição atuam nos auto-estados de energia bem definida. O operador destruição associa um auto-estado de energia  $E_n$  ao auto-estado um nível abaixo, de energia  $E_{n-1}$ . O operador criação faz o inverso: associa um auto-estados no nível  $n$  a um auto-estado no nível  $n+1$ .

Para obter uma representação explícita dos autovetores de  $H$ , basta obter o estado fundamental  $|\Phi_0 \rangle$ , o qual satisfaz

$$a_0|\Phi_0 \rangle = 0. \quad (2.160)$$

Os demais auto-estados podem ser obtidos fazendo atuar o operador criação sobre o estado fundamental um número suficiente de vezes,

$$|\Phi_n \rangle = (n!)^{-1/2}(a_0^\dagger)^n|\Phi_0 \rangle. \quad (2.161)$$

Até agora, apenas se reviu o tratamento usual [128] para o oscilador harmônico simples através de operadores criação e destruição. Voltando a dar atenção aos estados coerentes definidos em (2.151), verifica-se que

$$a_0|\alpha, t \rangle = \alpha e^{-i\omega_0 t}|\alpha, t \rangle. \quad (2.162)$$

Ou seja, os estados coerentes são auto-estados do operador destruição, confirmando a propriedade c) citada logo no início desta seção.

As propriedades a) e b) no início da seção decorrem das definições usuais

$$\langle O \rangle = \langle \psi|O|\psi \rangle \quad (2.163)$$

do valor esperado e

$$\Delta O = (\langle O^2 \rangle - \langle O \rangle^2)^{1/2} \quad (2.164)$$

da incerteza de um observável  $O$  qualquer, num estado arbitário  $|\psi \rangle$ . Obtém-se, quando  $|\psi \rangle = |\alpha, t \rangle$ ,

$$\Delta x = (\hbar/2\omega_0)^{1/2}, \quad (2.165)$$

$$\Delta p = (\hbar\omega_0/2)^{1/2}. \quad (2.166)$$

Consequentemente, as incertezas de posição e momentum são constantes no tempo (não há alargamento do pacote de ondas, que é a propriedade b) mencionada). Além disso,

$$\Delta x \Delta p = \hbar/2, \quad (2.167)$$

que é o valor mínimo permitido pelas relações de indeterminação de Heisenberg, tal como afirma a propriedade a) mencionada.

Para finalizar esta breve revisão, considere-se o limite clássico dos estados coerentes do oscilador harmônico simples. O valor esperado do operador posição num estado coerente definido em (2.151) é

$$\langle x \rangle = (2\hbar|\alpha|^2/\omega_0)^{1/2} \sin(\omega_0 t + \delta), \quad (2.168)$$

onde

$$\delta = \arctan(u/v), \quad (2.169)$$

sendo que, como dito anteriormente,  $\alpha = u + i v$ . A trajetória clássica é dada por

$$x_{cl} = (2E/\omega_0^2)^{1/2} \sin(\omega_0 t + \delta_{cl}). \quad (2.170)$$

Verifica-se que a solução clássica recai no valor esperado dado em (2.168) fazendo as transposições

$$E \rightarrow \hbar\omega_0|\alpha|^2, \quad \delta_{cl} \rightarrow \delta. \quad (2.171)$$

Calculando o valor esperado do operador Hamiltoniano num estado coerente, mostra-se que

$$\hbar\omega_0|\alpha|^2 = \langle H \rangle - \hbar\omega_0/2. \quad (2.172)$$

Ou seja, a relação (2.171) equivale a

$$E \rightarrow \langle H \rangle - \hbar\omega_0/2, \quad \delta_{cl} \rightarrow \delta. \quad (2.173)$$

Com isto, mostra-se que a energia associada a trajetória clássica corresponde ao valor esperado de  $H$  menos a energia de ponto zero. Desta maneira, verifica-se que os estados coerentes correspondem, de fato, às trajetórias clássicas.

Até agora, analisou-se apenas o caso do oscilador harmônico simples. Considerando também uma dependência temporal explícita da frequência, é de interesse saber se, de alguma forma, é possível obter estados coerentes. Mais propriamente, é de interesse buscar estados coerentes generalizados para o OHDT. Certamente, mesmo numa expectativa otimista não se deve esperar que todas as propriedades dos estados coerentes para o oscilador harmônico simples sejam preservadas. De fato, a inclusão de dependência temporal

introduz mudanças qualitativas no panorama de qualquer sistema físico. Entretanto, é razoável esperar que os estados coerentes generalizados para o OHDT recaiam nos estados coerentes usuais quando a frequência é constante.

Uma das propriedades básicas dos estados coerentes do oscilador harmônico simples é o fato de serem auto-estados do operador destruição. É razoável suspeitar que os estados coerentes do OHDT, se existirem, sejam auto-estados de algum operador que cumpra o papel de operador destruição para o OHDT. Portanto, é de interesse introduzir operadores criação e destruição para o OHDT e analisar as propriedades dos auto-estados do operador destruição.

Seja

$$I = \frac{1}{2}(y^2 p^2 - y\dot{y}(xp + px) + \dot{y}^2 x^2) + \frac{1}{2}x^2/y^2 \quad (2.174)$$

o operador Hermitiano invariante correspondente ao OHDT, onde  $y(t)$  satisfaz a equação de Pinney,

$$\ddot{y} + \omega^2(t)y = 1/y^3. \quad (2.175)$$

Já no trabalho de Lewis e Riesenfeld [24] foram introduzidos operadores criação e destruição para o OHDT, dados respectivamente por

$$a^\dagger = (2\hbar)^{-1/2}(x/y - i(y p - \dot{y}x)), \quad (2.176)$$

$$a = (2\hbar)^{-1/2}(x/y + i(y p - \dot{y}x)). \quad (2.177)$$

Estes operadores satisfazem

$$[a, a^\dagger] = 1 \quad (2.178)$$

e colocam o invariante exato (2.174) na forma fatorada

$$I = \hbar(a^\dagger a + 1/2). \quad (2.179)$$

Esta é a expressão análoga à expressão (2.157) para o oscilador harmônico simples. Entretanto, no caso do OHDT o papel central é desempenhado não pelo Hamiltoniano, mas pelo invariante exato.

Considerando as autofunções  $\psi_n$  de  $I$ , dadas pela fórmula (2.149), e a definição de  $a$  e  $a^\dagger$ , verifica-se [24] que

$$a\psi_n(x, t) = \sqrt{n}\psi_{n-1}(x, t) \quad (2.180)$$

$$a^\dagger\psi_n(x, t) = \sqrt{n+1}\psi_{n+1}(x, t). \quad (2.181)$$

Ou seja,  $a^\dagger$  e  $a$  de fato cumprem o papel de operadores criação e destruição, pois transformam um auto-estado do nível  $n$  num auto-estado do nível superior ou anterior, respectivamente. As relações (2.180–2.181) são inteiramente análogas às relações (2.158–2.159), aplicáveis no caso independente do tempo. Para tornar a analogia ainda mais evidente, observa-se que os operadores  $a$  e  $a^\dagger$  dados nas fórmulas (2.176–2.177) recaem em  $a_0$  e  $a_0^\dagger$  fazendo

$$y \rightarrow \omega_0^{-1/2}. \quad (2.182)$$

Essa substituição é possível quando  $\omega = \omega_0$ , ou seja, quando a frequência é constante. De outra maneira, a equação de Pinney não ficaria satisfeita.

Por todos os motivos enumerados, é natural encarar  $a$  e  $a^\dagger$  como sendo operadores destruição e criação generalizados, apropriados ao OHDT quântico. Seguindo a estratégia proposta de busca de estados coerentes do OHDT, a próxima etapa é procurar os autovetores  $|\alpha, t \rangle_T$  do operador destruição, tais que

$$a|\alpha, t \rangle_T = \alpha(t)|\alpha, t \rangle_T, \quad (2.183)$$

onde  $\alpha(t)$  são os autovalores. Como o operador destruição depende do tempo através da solução  $y(t)$  da equação de Pinney, os seus autovalores devem depender do tempo, em princípio. O mesmo vale para as autofunções  $|\alpha, t \rangle_T$ .

Como proposta para os auto-estados do operador destruição, será assumida a forma

$$|\alpha, t \rangle_T = \sum_{n=0}^{\infty} d_n \exp(i\alpha_n(t)) |\psi_n \rangle \quad (2.184)$$

onde  $\{d_n; n = 0, 1, \dots, \infty\}$  é um conjunto de números por determinar,  $\alpha_n(t)$  são as fases de Lewis e Riesenfeld para o OHDT e  $|\psi_n \rangle$  são os autovetores do operador invariante (2.174). Isto é, consultando a fórmula (2.148) da solução exata para o OHDT quântico, tem-se que

$$\alpha_n = -(n + 1/2) \int_0^t d\lambda / y^2(\lambda) \quad , \quad n = 0, 1, \dots, \infty \quad . \quad (2.185)$$

Além disso, os autovetores  $|\psi_n \rangle$  são dados, na representação de coordenada, na equação (2.149).

Expansões do tipo (2.184) são sempre possíveis, para qualquer vetor de estado no espaço de Hilbert, pois o conjunto dos vetores

$$\exp(i\alpha_n(t)) |\psi_n \rangle \quad , \quad n = 0, 1, \dots, \infty \quad (2.186)$$

é completo. Em particular, é possível expressar os auto-estados do operador  $a$  em termos de uma combinação linear do tipo (2.184). Em princípio, como a base dada em (2.186) é explicitamente dependente do tempo, é de se esperar que os números  $d_n$  em (2.184) sejam funções do tempo. Entretanto, como se verá, estes números são constantes para o caso dos auto-estados do operador  $a$ .

A determinação dos números  $d_n$  é feita impondo que  $|\alpha, t \rangle_T$ , como dado em (2.184), seja auto-estado do operador destruição. Fazendo  $a$  atuar sobre  $|\alpha, t \rangle_T$ , tendo em conta a equação (2.180) e impondo a condição básica (2.183), segue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} d_n \sqrt{n} \exp(i\alpha_n(t)) |\psi_{n-1}\rangle = \alpha(t) \sum_{n=0}^{\infty} d_n \exp(i\alpha_n(t)) |\psi_n\rangle. \quad (2.187)$$

Rearranjando o somatório no lado esquerdo da última equação e usando a ortonormalidade dos auto-estados do operador invariante  $I$ , segue que

$$d_{n+1} \sqrt{n+1} \exp(i\alpha_{n+1}(t)) = \alpha(t) d_n \exp(i\alpha_n(t)) \quad , \quad n = 0, 1, \dots, \infty \quad . \quad (2.188)$$

Utilizando a forma dada em (2.185) das fases de Lewis e Riesenfeld para o OHDT, conclui-se que

$$d_{n+1} = \frac{d_n}{\sqrt{n+1}} \alpha(t) \exp\left(i \int_0^t d\lambda / y^2(\lambda)\right) \quad , \quad n = 0, 1, \dots, \infty \quad . \quad (2.189)$$

Com esta relação, demonstra-se que é possível tornar os números  $d_n$  constantes no tempo, bastando para isto escolher

$$\alpha(t) = \alpha \exp\left(-i \int_0^t d\lambda / y^2(\lambda)\right), \quad (2.190)$$

onde  $\alpha$  (sem a indicação de dependência temporal) é uma constante, possivelmente complexa. Com esta escolha, que é adequada para nossos propósitos, converte-se a relação (2.189) na fórmula de recorrência

$$d_{n+1} = \frac{\alpha d_n}{\sqrt{n+1}} \quad , \quad n = 0, 1, \dots, \infty \quad . \quad (2.191)$$

Por indução, extrai-se desta fórmula de recorrência a expressão geral

$$d_n = \frac{\alpha^n d_0}{\sqrt{n!}} \quad , \quad n = 0, 1, \dots, \infty \quad . \quad (2.192)$$

Restam ainda constantes arbitrárias em excesso a eliminar. Usando a forma das constantes  $d_n$  determinadas em (2.184), decorre que

$$|\alpha, t \rangle_T = d_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp(i\alpha_n(t)) |\psi_n\rangle. \quad (2.193)$$

Impondo normalização, verifica-se que

$$d_0 = e^{-|\alpha|^2/2}. \quad (2.194)$$

Inserindo isto em (2.193), obtém-se

$$|\alpha, t \rangle_T = e^{-|\alpha|^2/2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \exp(i\alpha_n(t)) |\psi_n \rangle, \quad (2.195)$$

como sendo a forma geral dos auto-estados do operador destruição  $a$  para o OHDT. Recapitulando, a forma (2.195) envolve um número  $\alpha$  complexo, as fases  $\alpha_n(t)$  de Lewis e Riesenfeld dadas em (2.185) e os auto-estados  $|\psi_n \rangle$  do operador invariante (2.174). Além disso, por construção

$$a|\alpha, t \rangle_T = \alpha \exp(-i \int_0^t d\lambda / y^2(\lambda)) |\alpha, t \rangle_T, \quad (2.196)$$

mostrando que os vetores  $|\alpha, t \rangle_T$  são, de fato, autovetores do operador destruição.

Tendo construído os autovetores do operador destruição, resta analisar as suas propriedades, para averiguar se é possível encará-los como estados coerentes generalizados. Em primeiro lugar, os autovetores  $|\alpha \rangle_T$  recaem nos estados coerentes  $|\alpha, t \rangle$  do oscilador harmônico simples quando não há dependência temporal explícita. Para obter este caso limite, basta fazer as transposições

$$\omega \rightarrow \omega_0, \quad y \rightarrow \omega_0^{-1/2}. \quad (2.197)$$

No caso autônomo, as fases de Lewis e Riesenfeld são

$$\alpha_n(t) = -(n + 1/2)\omega_0 t, \quad (2.198)$$

o invariante exato  $I$  torna-se um múltiplo do operador Hamiltoniano,

$$I = \frac{H}{\omega_0} \quad (2.199)$$

e os autovetores  $|\psi_n \rangle$  de  $I$  recaem nos autovetores  $|\Phi_n \rangle$  para o oscilador harmônico simples. Comparando as equações (2.151) e (2.195), é fácil concluir que os auto-estados de  $a$  transformam-se nos estados coerentes para o oscilador harmônico simples no caso independente do tempo.

Outra das propriedades fundamentais dos estados coerentes do oscilador harmônico simples é a de corresponderem ao valor mínimo do produto das incertezas de posição e

momentum. Além disso, não há alargamento do pacote de onda nos estados coerentes usuais. Calculando as incertezas num estado  $|\alpha, t \rangle_T$ , conclui-se que

$$(\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{2} y^2 \quad , \quad (\Delta p)^2 = \frac{\hbar}{2} (\dot{y}^2 + 1/y^2) \quad . \quad (2.200)$$

De imediato se conclui que a largura do pacote de ondas não é constante no tempo. O caráter da evolução temporal das incertezas depende somente da solução  $y(t)$  da equação de Pinney. São concebíveis situações em que a incerteza na posição diminui no tempo e em que a incerteza no momentum aumenta, ou vice-versa. Este tipo de fenômeno é chamado colimação (“squeezing”) do pacote de ondas [98].

O produto das incertezas resulta ser

$$\Delta x \Delta p = \frac{\hbar}{2} (1 + y^2 \dot{y}^2)^{1/2} \quad . \quad (2.201)$$

Ou seja, o valor mínimo permitido pela relação de indeterminação de Heisenberg é excedido.

Para finalizar a investigação das propriedades dos autovetores de  $a$ , falta ainda analisar o valor esperado da posição, dado por

$$\langle x \rangle = (2\hbar|\alpha|^2 y^2)^{1/2} \sin \left( \int_0^t d\lambda / y^2(\lambda) + \delta \right) \quad , \quad (2.202)$$

onde  $\alpha = u + i v$  define os números reais  $u$  e  $v$  e

$$\delta = \arctan(u/v) \quad . \quad (2.203)$$

O resultado (2.202) corresponde exatamente à solução clássica, que é fornecida pela lei de superposição não linear (2.22),

$$x_{cl} = (2 I_{cl})^{1/2} y(t) \sin \left( \int_0^t d\lambda / y^2(\lambda) + \delta_{cl} \right) \quad . \quad (2.204)$$

Na solução clássica,  $I_{cl}$  é um número dado pelo valor do invariante de Ermakov no tempo inicial.

A solução clássica recai no valor esperado quântico fazendo as transposições

$$I_{cl} \rightarrow \hbar|\alpha|^2 \quad , \quad \delta_{cl} \rightarrow \delta \quad . \quad (2.205)$$

Entretanto,

$$\langle \alpha, t |_T (I - \hbar/2) | \alpha, t \rangle_T = \hbar|\alpha|^2 \quad , \quad (2.206)$$

mostrando que a substituição (2.205) equivale a

$$I_{cl} \rightarrow \langle \alpha, t |_T (I - \hbar/2) | \alpha, t \rangle_T \quad , \quad \delta_{cl} \rightarrow \delta \quad . \quad (2.207)$$

Em outros termos, para obter o valor esperado quântico basta substituir  $\delta_{cl}$  por  $\delta$  e o invariante exato clássico pelo seu valor esperado menos a contribuição de ponto zero. Isto mostra que os estados coerentes generalizados  $|\alpha, t \rangle_T$  correspondem a trajetória clássica. Há uma analogia estrita com o caso dos estados coerentes do oscilador harmônico simples (ver a equação (2.173)).

Em resumo, os estados coerentes generalizados para o OHDT preservam algumas das propriedades dos estados coerentes para o oscilador harmônico simples, mas não todas. Os estados coerentes generalizados são autovetores do operador destruição para o OHDT e correspondem à trajetória clássica. Entretanto, não são estados no qual o produto das incertezas de posição e momentum atinge o valor mínimo, e a largura do seu pacote de ondas não é constante. Finalmente, como dito anteriormente, os estados coerentes generalizados reduzem-se aos usuais no caso estacionário. Isto completa a revisão do trabalho de Hartley e Ray sobre os estados coerentes para o OHDT.

Desde o trabalho de Hartley e Ray, estados coerentes generalizados foram introduzidos para diversos sistemas. Maamache [31] construiu estados coerentes generalizados para Hamiltonianos com acoplamento não trivial entre posição e momentum, da forma

$$H = \frac{1}{2} \left( Z(t)p^2 + Y(t)(px + xp) + X(t)x^2 + Z(t)l^2/x^2 \right) , \quad (2.208)$$

onde  $X(t), Y(t)$  e  $Z(t)$  são funções arbitrárias do tempo e  $l$  é um número que pode ser nulo. Cerveró e Vilarroel [61] consideraram estados coerentes para sistemas quânticos com dissipação. Xu et al. [134] analisaram o efeito da presença de uma força externa e de uma massa dependentes do tempo nos estados coerentes generalizados para o OHDT. Finalmente, Ray [135] tratou de sistemas com acoplamento não linear mais geral, com operador da forma dada em (2.123).

## 2.5 Fases geométricas e invariantes de Ermakov

### 2.5.1 Considerações gerais

Seja um sistema quântico cujo operador Hamiltoniano  $H(\mathbf{X}(t))$  depende de um conjunto de parâmetros  $\mathbf{X}(t) = (X_1(t), \dots, X_m(t))$  lentamente variáveis. Como exemplo, pode-se

pensar no sistema de uma partícula carregada sujeita a um campo magnético externo que varia lentamente no tempo. Seja

$$H(\mathbf{X}(t))|u_n; \mathbf{X}(t) \rangle = E_n(\mathbf{X}(t))|u_n; \mathbf{X}(t) \rangle \quad (2.209)$$

o problema de autovetores e autovalores do Hamiltoniano, num tempo fixo qualquer. Por simplicidade, se está supondo que o espectro de  $H$  é discreto e não degenerado para todo tempo. Além disso, o conjunto dos autovetores de  $H(\mathbf{X}(t))$  é tomado como completo,

$$\sum_n |u_n; \mathbf{X}(t) \rangle \langle u_n; \mathbf{X}(t)| = O_{id}, \quad (2.210)$$

onde  $O_{id}$  é o operador identidade, e ortonormal,

$$\langle u_m; \mathbf{X}(t)|u_n; \mathbf{X}(t) \rangle = \delta_{mn}. \quad (2.211)$$

Como  $H$  depende explicitamente do tempo, tanto os autovetores quanto os autovalores variam no tempo também. Isto contrasta com o problema característico de um operador Hermitiano invariante, no qual os autovalores são constantes. Suponha-se que o estado quântico no tempo inicial  $t = 0$  seja dado por

$$|\psi(0) \rangle = |u_n; \mathbf{X}(0) \rangle, \quad (2.212)$$

isto é, por um auto-estado do Hamiltoniano. O assunto fundamental da teoria das fases geométricas de Berry é a análise da evolução do vetor de estado a partir da condição inicial (2.212). Como se está face a um problema quântico explicitamente dependente do tempo, a teoria de Lewis e Riesenfeld certamente pode ser proveitosa. Neste contexto, esta seção dedica-se a compreensão da relação entre os problemas de Berry (da evolução temporal a partir de um auto-estado de  $H$ ) e de Lewis e Riesenfeld (da obtenção da solução exata da equação de Schrödinger utilizando operadores Hermitianos invariantes). Uma compreensão tão ampla quanto possível das fases geométricas de Berry não é importante apenas por razões acadêmicas, mas também é relevante no contexto de várias áreas da física, como física nuclear e estado sólido. Para um apanhado mais completo das aplicações da teoria das fases geométricas de Berry, pode-se consultar [111] e as referências incluídas.

Como o vetor  $\mathbf{X}(t)$  varia lentamente no tempo, é de se esperar que não sejam induzidas transições de nível. Assim, é razoável supor que o vetor de estado no tempo  $t$  seja proporcional a  $|u_n; \mathbf{X}(t) \rangle$ , o auto-estado instantâneo do Hamiltoniano. Seja, pois, uma solução da forma

$$|\psi(t) \rangle = \exp(i\gamma_n^g(t)) \exp\left(\frac{1}{i\hbar} \int_0^t E_n(\mathbf{X}(\tau)) d\tau\right) |u_n(\mathbf{X}(t)) \rangle, \quad (2.213)$$

onde  $\gamma_n^g$  é uma fase real, para a equação de Schrödinger

$$H(\mathbf{X}(t))|\psi(t)\rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} |\psi(t)\rangle, \quad (2.214)$$

com condição inicial dada em (2.212). Afora por um fator de fase, a proposta de solução (2.213) é proporcional a  $|u_n, \mathbf{X}(t)\rangle$ . A fase  $-\hbar^{-1} \int_0^t E_n(\tau) d\tau$ , chamada de fase dinâmica, é soma das fases induzidas instantaneamente pelo Hamiltoniano do sistema. No caso estacionário,  $\dot{\mathbf{X}}(t) = 0$  e teria-se o valor usual  $-\hbar^{-1} E_n t$  para esta contribuição. Por outro lado, a fase  $\gamma_n^g$ , chamada de fase geométrica de Berry, é encontrada substituindo a proposta (2.213) na equação de Schrödinger. Fazendo isto, vem

$$\dot{\gamma}_n^g |u_n; \mathbf{X}(t)\rangle = i \frac{\partial}{\partial t} |u_n; \mathbf{X}(t)\rangle. \quad (2.215)$$

Usando a ortonormalidade e a condição  $\gamma_n^g(0) = 0$  (o estado inicial é  $|u_n; \mathbf{X}(0)\rangle$ ), obtém-se o resultado

$$\gamma_n^g(t) = \int_0^t \langle u_n; \mathbf{X}(\tau) | i \frac{\partial}{\partial \tau} |u_n; \mathbf{X}(\tau)\rangle d\tau \quad (2.216)$$

para a equação (2.215). Definida desta forma, é fácil mostrar que  $\gamma_n^g$  é, de fato, sempre real. Notar a semelhança da fase geométrica de Berry com um dos termos na fase de Lewis e Riesenfeld (2.114). Aqui, entretanto,  $|u_n; \mathbf{X}(t)\rangle$  é autovetor do Hamiltoniano e não de um operador Hermitiano invariante. De modo surpreendente, a presença da fase geométrica de Berry, em acréscimo à fase dinâmica, foi notada apenas recentemente [136].

Tomando o produto escalar com  $|u_m; \mathbf{X}(t)\rangle$  para  $m \neq n$  e usando a ortonormalidade, obtém-se de (2.215) o resultado

$$0 = \langle u_m; \mathbf{X}(t) | \frac{\partial}{\partial t} |u_n; \mathbf{X}(t)\rangle, \quad m \neq n. \quad (2.217)$$

Isto mostra que a proposta de solução (2.213) é apenas aproximada, pois em geral a última equação não é satisfeita. No limite adiabático em que a variação temporal dos auto-estados do Hamiltoniano é lenta, entretanto, é cabível desprezar o membro no lado direito de (2.217), que envolve uma derivada temporal. Esta é a essência da aproximação adiabática na mecânica quântica. Note-se que a fase de Lewis e Riesenfeld é determinada exatamente graças à equação (2.114) estar numa forma diagonalizada. Isto, por sua vez, decorre de se ter escolhido a base dos autovetores de um operador Hermitiano invariante e não a base dos autovetores do Hamiltoniano.

É interessante expressar a fase  $\gamma_n^g$  em termos de uma integral de linha no espaço dos parâmetros. Como a dependência temporal dos autovetores do Hamiltoniano está toda contida em  $\mathbf{X}(t)$ , a relação (2.216) admite a formulação equivalente

$$\gamma_n^g(t) = \int_{\mathbf{X}(0)}^{\mathbf{X}(t)} \langle u_n; \mathbf{X} | i \nabla_{\mathbf{X}} | u_n; \mathbf{X} \rangle \cdot d\mathbf{X}, \quad (2.218)$$

onde  $\nabla_{\mathbf{X}} = (\partial/\partial X_1, \dots, \partial/\partial X_m)$  é o operador diferencial vetorial nabla e  $d\mathbf{X}$  é o elemento de linha definido no espaço dos parâmetros. Em particular, se os parâmetros variarem ciclicamente com período  $T$ , de modo que  $\mathbf{X}(t+T) = \mathbf{X}(t)$ , vale

$$\gamma_n^g = \gamma_n^g(C) = \oint_C \langle u_n; \mathbf{X} | i \nabla_{\mathbf{X}} | u_n; \mathbf{X} \rangle \cdot d\mathbf{X}, \quad (2.219)$$

onde  $C$  é o caminho cíclico percorrido. A fase (2.219) independe do tempo, sendo determinada apenas pelo caminho  $C$  escolhido no espaço dos parâmetros.

Com grande frequência [111], a fase geométrica de Berry é denominada de fase adiabática de Berry, pois a sua descoberta relaciona-se com sistemas com parâmetros lentamente variáveis. Além disso, o limite adiabático (no qual o vetor  $\mathbf{X}(t)$  varia lentamente) da fase geométrica de Berry tem propriedades relevantes, algumas das quais serão analisadas na seqüência. Entretanto, a velocidade com que o caminho  $C$  é percorrido não é de nenhuma importância na fórmula (2.219).

Foi visto na seção 2.3 que a base dos autovetores de um operador Hermitiano invariante porventura conhecido é privilegiada. De fato, a combinação linear (2.99), onde as fases de Lewis e Riesenfeld são determinadas pela equação (2.114), constitui a ferramenta básica para encontrar a solução exata da equação de Schrödinger. Esta solução exata é válida para uma condição inicial arbitrária. Para estabelecer uma comparação entre as teorias de Berry e de Lewis e Riesenfeld, entretanto, é interessante considerar a solução exata (2.99) no caso do estado inicial ser um auto-estado do operador Hermitiano invariante.

Seja, pois, um sistema de Hamiltoniano  $H(\mathbf{X}(t))$  e

$$I|\psi_n; t \rangle = \lambda_n|\psi_n; t \rangle \quad (2.220)$$

a equação de auto-estados e autovalores de um operador Hermitiano invariante  $I$  associado. Conforme foi demonstrado na seção 2.3, os autovalores  $\lambda_n$  são constantes, isto é,  $\dot{\lambda}_n = 0$ . Se

$$|\psi(0) \rangle = |\psi_n; 0 \rangle \quad (2.221)$$

ou seja, se o sistema quântico estiver inicialmente preparado como sendo algum autovetor de  $I$ , a questão é saber qual é o estado do sistema num tempo arbitrário. A resposta

decorre de modo imediato da teoria de Lewis e Riesenfeld,

$$|\psi(t)\rangle = \exp(i\alpha_n(t))|\psi_n; t\rangle, \quad (2.222)$$

onde  $\alpha_n(t)$  é a fase de Lewis e Riesenfeld correspondente ao nível  $n$  do operador Hermitiano invariante. Isto é,

$$\alpha_n(t) = \alpha_n^d(t) + \alpha_n^g(t), \quad (2.223)$$

sendo que

$$\alpha_n^d(t) = -\frac{1}{\hbar} \int_0^t \langle \psi_n; \tau | H(\mathbf{X}(\tau)) | \psi_n; \tau \rangle d\tau \quad (2.224)$$

é uma contribuição dinâmica e

$$\alpha_n^g(t) = \int_0^t \langle \psi_n; \tau | i \frac{\partial}{\partial \tau} | \psi_n; \tau \rangle d\tau \quad (2.225)$$

é uma contribuição análoga à fase geométrica de Berry. Esta fase é exata e refere-se aos auto-estados do operador Hermitiano invariante e não aos auto-estados do Hamiltoniano. Portanto, pode-se estabelecer apenas uma analogia, mas não uma correspondência direta, entre as fases de Berry e de Lewis e Riesenfeld.

Em conclusão, a discussão acima contribui para o esclarecimento de pontos fundamentais, embora elementares, das teorias de Berry e de Lewis e Riesenfeld.

### 2.5.2 O oscilador harmônico generalizado dependente do tempo

Nesta subseção, será analisado o sistema do oscilador harmônico generalizado dependente do tempo (OHGDT), cujo operador Hamiltoniano é dado por

$$H(\mathbf{X}(t)) = \frac{1}{2}(X(t)x^2 + Y(t)(xp + px) + Z(t)p^2), \quad (2.226)$$

onde  $X(t)$ ,  $Y(t)$  e  $Z(t)$  são funções arbitrárias do tempo. Na notação introduzida anteriormente, o vetor  $\mathbf{X}(t) = (X(t), Y(t), Z(t))$  é o vetor posição no espaço dos parâmetros do sistema. Quando  $X(t) = \omega^2(t)$ ,  $Y(t) = 0$  e  $Z(t) = 1$ , o Hamiltoniano (2.226) reduz-se ao Hamiltoniano do OHDt usual. O sistema do OHGDT foi considerado por diversos autores [136]–[140] em conexão com as teorias das fases geométricas de Berry e dos invariantes de Ermakov. A melhor explicação deste interesse encontra-se na relativa simplicidade do OHGDT, que permite o cômputo de suas fases geométrica e de Lewis e Riesenfeld. Tendo isto em vista, a seguir é desenvolvido o tratamento analítico do OHGDT quântico.

A obtenção das fases de Berry demanda, inicialmente, a resolução do problema de autovalores e auto-estados (2.209), onde  $H(\mathbf{X}(t))$  é o Hamiltoniano para o OHGDT dado em

(2.226). Utilizando a regra de correspondência  $p \rightarrow -i\hbar\partial/\partial x$ , obtém-se, na representação de coordenada,

$$-\frac{Z\hbar^2}{2}\frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} - i\hbar Y x \frac{\partial u_n}{\partial x} + \frac{1}{2}(X x^2 - i\hbar Y)u_n = E_n u_n, \quad (2.227)$$

onde  $u_n = u_n(x, t) = \langle x | u_n; \mathbf{X}(t) \rangle$ .

Na equação (2.227), o tempo comparece como um parâmetro apenas. De fato, para obtenção das fases geométricas de Berry, o problema de autovetores e autovalores do Hamiltoniano deve ser resolvido num tempo fixo. Introduzindo a transformação unitária

$$\bar{u}_n = \exp\left(\frac{i Y x^2}{2\hbar z}\right) u_n, \quad (2.228)$$

converte-se a equação (2.227) em

$$-\frac{\hbar^2 Z}{2}\frac{\partial^2 \bar{u}_n}{\partial x^2} + \frac{1}{2Z}(ZX - Y^2)x^2 \bar{u}_n = E_n \bar{u}_n. \quad (2.229)$$

Formalmente, esta é a equação de Schrödinger independente do tempo para um oscilador harmônico simples com massa  $1/Z$  e frequência  $(ZX - Y^2)^{1/2}$ . Isto se justifica pelo fato, já mencionado, de que o tempo é apenas um parâmetro fixo. Partindo da solução exata para o oscilador harmônico simples [128], encontra-se a solução exata da equação (2.229) como sendo

$$\begin{aligned} \bar{u}_n &= (2^n n!)^{-1/2} (\pi \hbar Z)^{-1/4} (ZX - Y^2)^{1/8} \exp\left(-\frac{(ZX - Y^2)^{1/2} x^2}{2\hbar Z}\right) \times \\ &\times H_n\left(\frac{(ZX - Y^2)^{1/4} x}{\sqrt{\hbar Z}}\right), \end{aligned} \quad (2.230)$$

$$E_n = \hbar(ZX - Y^2)^{1/2}(n + 1/2) \quad , \quad n = 0, 1, \dots, \infty \quad , \quad (2.231)$$

onde os  $H_n$  são polinômios de Hermite. As autofunções do Hamiltoniano do OHGDT são encontradas invertendo a equação (2.228), com o resultado

$$u_n = \exp\left(-\frac{i Y x^2}{2\hbar z}\right) \bar{u}_n, \quad (2.232)$$

onde os  $\bar{u}_n$  es tão apresentados em (2.230).

Tendo resolvido de modo exato o problema de autovetores e autovalores do Hamiltoniano, é uma tarefa simples a obtenção da fase geométrica de Berry. Utilizando as relações (2.216) e (2.232), mostra-se, após um cálculo simples, que as fases geométricas de Berry tem a forma

$$\gamma_n^g(t) = \frac{1}{2}(n + 1/2) \int_0^t \frac{(Z\dot{Y} - Y\dot{Z})}{Z(ZX - Y^2)^{1/2}} d\tau \quad , \quad n = 0, 1, \dots, \infty \quad , \quad (2.233)$$

onde as diversas funções no integrando dependem da variável de integração  $\tau$ . As fases correspondentes aos diferentes níveis de energia estão igualmente distanciadas. Além disso, no caso do OHDT,  $Z = 1$  e  $Y = 0$ , o que acarreta uma fase geométrica de Berry nula.

Quando o vetor  $\mathbf{X} = (X(t), Y(t), Z(t))$  executa uma evolução periódica, é possível converter (2.233) numa integral ao longo do caminho  $C$  percorrido no espaço dos parâmetros,

$$\gamma_n^g = \gamma_n^g(C) = \frac{1}{2}(n + 1/2) \oint_C \frac{(Z dY - Y dZ)}{Z(ZX - Y^2)^{1/2}}. \quad (2.234)$$

Em conclusão, o cálculo das fases geométricas de Berry do OHGDT pode ser feito de forma exata, com todos os detalhes. Esta simplicidade se dá graças à transformação unitária (2.228), que transforma o problema de autovetores e autovalores (2.227) na equação de Schrödinger independente do tempo para o oscilador harmônico simples.

De outra parte, a solução quântica do OHGDT pode ser igualmente encontrada de forma exata, recorrendo à teoria de Lewis e Riesenfeld. Isto permitirá a comparação entre as fases geométricas de Berry e de Lewis e Riesenfeld no caso de um problema não trivial. A equação de Schrödinger para o OHGDT tem a forma

$$-\frac{\hbar^2 Z}{2} \frac{\partial \psi}{\partial x^2} - i\hbar x \frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{1}{2}(X x^2 - i\hbar Y)\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}. \quad (2.235)$$

Aqui, o tempo não entra mais apenas como um parâmetro, o que é um fator que pode trazer dificuldades.

Por felicidade, o OHGDT possui [139, 140] o operador Hermitiano invariante

$$I = \frac{1}{2} \left( y^2 p^2 - \frac{y}{Z} (\dot{y} - yY)(px + xp) + \left( \frac{1}{Z^2} (\dot{y} - yY)^2 + \frac{1}{y^2} \right) x^2 \right), \quad (2.236)$$

onde  $y$  é uma solução particular da equação de segunda ordem

$$\ddot{y} - \frac{\dot{Z}}{Z} \dot{y} + \left( XZ - Y^2 + \frac{1}{Z} (Y\dot{Z} - Z\dot{Y}) \right) y = \frac{Z^2}{y^3}. \quad (2.237)$$

No caso específico do OHDT,  $X = \omega^2(t)$ ,  $Y = 0$ ,  $Z = 1$ , a equação (2.237) torna-se a equação de Pinney e o invariante exato (2.236) recai no invariante de Ermakov (1.2) usual. A derivação do invariante exato (2.236) foi feita pela utilização de uma álgebra dinâmica associada [139, 140].

A existência do invariante exato  $I$  aponta o método de Lewis e Riesenfeld como a alternativa natural para tratar o problema. Para obter a solução exata na forma de

Lewis e Riesenfeld, é necessário resolver o problema de autovetores e autovalores de  $I$ . Na representação de coordenada, se  $\psi_n$  são as autofunções e  $\lambda_n$  são os autovalores do operador Hermitiano invariante, tem-se que

$$-\frac{\hbar^2 y^2}{2} \frac{\partial^2 \psi_n}{\partial x^2} + \frac{i\hbar y}{Z} (\dot{y} - yY)x \frac{\partial \psi_n}{\partial x} + \frac{i\hbar y}{2Z} (\dot{y} - yY) \psi_n + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Z^2} (\dot{y} - yY)^2 + \frac{1}{y^2} \right) x^2 \psi_n = \lambda_n \psi_n. \quad (2.238)$$

Tal como se apresenta, o problema é ainda demasiadamente complicado. Entretanto, uma transformação unitária semelhante a da da em (2.228),

$$\bar{\psi}_n = \sqrt{y} \exp \left( \frac{1}{2i\hbar} \frac{(\dot{y} - yY)x^2}{Zy} \right) \psi_n, \quad (2.239)$$

converte (2.238) na equação de Schrödinger independente do tempo para um oscilador harmônico simples,

$$-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2 \bar{\psi}_n}{\partial Q^2} + \frac{1}{2} Q^2 \bar{\psi}_n = \lambda_n \bar{\psi}_n, \quad (2.240)$$

onde

$$Q = x/y. \quad (2.241)$$

A solução exata para a equação (2.240) é

$$\bar{\psi}_n = (2^n n!)^{-1/2} (\pi \hbar)^{-1/4} \exp \left( -Q^2/2\hbar \right) H_n(Q/\sqrt{\hbar}), \quad (2.242)$$

$$\lambda_n = \hbar(n + 1/2), \quad n = 0, 1, \dots, \infty, \quad (2.243)$$

onde os  $H_n$  são polinômios de Hermite.

Invertendo a transformação unitária (2.239) e utilizando a solução exata (2.242), vem que

$$\begin{aligned} \psi_n &= (2^n n! y)^{-1/2} (\pi \hbar)^{-1/4} \exp \left( i \frac{(\dot{y} - yY)x^2}{2\hbar Zy} \right) \exp \left( -\frac{x^2}{2\hbar y^2} \right) \times \\ &\times H_n \left( \frac{x}{y\sqrt{\hbar}} \right), \quad n = 0, 1, \dots, \infty. \end{aligned} \quad (2.244)$$

Isto completa a determinação dos autovalores e autofunções do operador Hermitiano invariante (2.236).

Para a obtenção das fases de Lewis e Riesenfeld definidas na equação (2.114), os produtos escalares de interesse são dados por

$$\langle \psi_n | i\hbar \frac{\partial}{\partial t} | \psi_n \rangle = \frac{\hbar(n + 1/2)y^2}{2Z} \left( XZ - Y^2 - \frac{Z^2}{y^4} + \frac{\dot{y}^2}{y^2} \right), \quad (2.245)$$

$$\langle \psi_n | H | \psi_n \rangle = \frac{\hbar(n + 1/2)y^2}{2Z} \left( XZ - Y^2 + \frac{Z^2}{y^4} + \frac{\dot{y}^2}{y^2} \right). \quad (2.246)$$

Com isto, a equação (2.114) para a fase de Lewis total toma a forma

$$\dot{\alpha}_n = -(n + 1/2) \frac{Z}{y^2}, \quad (2.247)$$

cuja solução é

$$\alpha_n(t) = -(n + 1/2) \int_0^t \frac{Z(\tau) d\tau}{y^2(\tau)}. \quad (2.248)$$

Finalmente, a solução exata do OHGDT quântico pode ser expressa na forma de Lewis e Riesenfeld (2.99), onde as autofunções estão na equação (2.244) e as fases na equação (2.248). Este resultado engloba, como um caso particular, a solução exata para o OHDT quântico.

Por outro lado, a fase de Lewis e Riesenfeld geométrica (2.225) advém diretamente da equação (2.245),

$$\alpha_n^g(t) = \frac{1}{2}(n + 1/2) \int_0^t \left( XZ - Y^2 - \frac{Z^2}{y^4} + \frac{\dot{y}^2}{y^2} \right) \frac{y^2}{Z} d\tau. \quad (2.249)$$

Na integral no lado direito da equação (2.249), todas as funções são consideradas como funções da variável de integração  $\tau$ .

Por inspeção, se verifica que as fases geométricas de Berry (2.233) e de Lewis e Riesenfeld (2.249) são diferentes. Na verdade, seria uma grande surpresa se estas fases coincidissem, pois são a expressão de processos físicos diferentes. No caso de Berry, o estado inicial é um auto-estado do Hamiltoniano do sistema. No caso de Lewis e Riesenfeld, a condição inicial é um auto-estado do operador Hermitiano invariante (2.236). Entretanto, no caso no qual os parâmetros do OHGDT variam lentamente, as fases (2.233) e (2.249) coincidem. Este limite adiabático será analisado na seqüência.

Seja a variável temporal lentamente variável

$$\bar{t} = \epsilon t, \quad (2.250)$$

onde  $\epsilon$  é um parâmetro pequeno que mede o quão lentamente estão variando os parâmetros do sistema. A partir da introdução deste parâmetro pequeno, é possível obter o limite adiabático da fase de Lewis e Riesenfeld geométrica (2.249), que é exata.

A equação (2.237) para a variável auxiliar  $y$ , em termos de  $\bar{t}$ , tem o aspecto

$$\epsilon^2 \frac{d^2 y}{d\bar{t}^2} - \frac{\epsilon^2}{Z} \frac{dZ}{d\bar{t}} \frac{dy}{d\bar{t}} + \left( XZ - Y^2 + \frac{\epsilon}{Z} \left( Y \frac{dZ}{d\bar{t}} - Z \frac{dY}{d\bar{t}} \right) \right) y = \frac{Z^2}{y^3}. \quad (2.251)$$

Até agora, o tratamento foi exato. Aproveitando o fato de  $\epsilon$  ser um parâmetro pequeno, pode-se propor uma solução da equação (2.251) na forma de uma série de potências,

$$y = y_0 + \epsilon y_1 + O(\epsilon^2), \quad (2.252)$$

onde  $y_0$  e  $y_1$  são funções do tempo cuja magnitude não é infinitesimal. Obtém-se, para os primeiros termos da série,

$$y_0^2 = (XZ - Y^2)^{-1/2} Z, \quad (2.253)$$

$$y_1 = \frac{(Z dY/d\bar{t} - Y dZ/d\bar{t})y_0}{4Z(XZ - Y^2)}. \quad (2.254)$$

Inserindo na relação (2.249), vem que

$$\alpha_n^g(t) = \frac{1}{2}(n + 1/2) \int_0^{\epsilon t} \frac{(Z dY/d\tau - Y dZ/d\tau)}{Z(XZ - Y^2)^{1/2}} d\tau + O(\epsilon^2), \quad (2.255)$$

onde as funções no integrando dependem de uma variável de integração  $\tau$ .

No caso de uma evolução cíclica, o termo dominante na equação (2.255) fornece

$$\alpha_n^g = \alpha_n^g(C) = \frac{1}{2}(n + 1/2) \oint_C \frac{(Z dY - Y dZ)}{Z(XZ - Y^2)^{1/2}} + O(\epsilon^2), \quad (2.256)$$

sendo que  $C$  é o caminho percorrido no espaço dos parâmetros, cujas coordenadas são  $X, Y$  e  $Z$ .

Constata-se que as fases geométricas de Berry (2.234) e de Lewis e Riesenfeld (2.256) coincidem no limite adiabático. A priori, este resultado não seria de se esperar, já que, como dito anteriormente, as duas fases possuem um significado físico diferente. Pode-se entender o resultado fazendo uma expansão também para o operador Hermitiano invariante, da forma

$$I = I_0 + O(\epsilon^1). \quad (2.257)$$

Inserindo a solução  $y_0$  de primeira ordem dada em (2.253) no invariante exato dado em (2.236), vem

$$I_0 = \frac{y_0^2}{2Z} H. \quad (2.258)$$

Em outras palavras, no limite adiabático o Hamiltoniano do OHGDT e o operador Hermitiano invariante  $I$  são proporcionais. Consequentemente, no limite adiabático seus vetores próprios coincidem, e não há distinção entre as fases geométricas de Berry e de Lewis e Riesenfeld.

---

Nenhuma das propriedades discutidas nesta seção traz resultados desconhecidos. Entretanto, deliberadamente buscou-se ir a fundo nos detalhes, o que pode servir de ponto de partida na criação de uma teoria mais geral descrevendo as fases geométricas para sistemas quânticos com operadores Hermitianos invariantes. No momento, não existe esta teoria geral, embora alguns trabalhos esparsos constem na literatura, em acréscimo aos referentes ao OHGDT. Dentre estes trabalhos, pode-se citar uma contribuição de Leach [141], que relaciona a solução de Lewis e Riesenfeld e as fases geométricas para sistemas potenciais dependentes do tempo com invariantes exatos quadráticos no momentum. Além disso, Maamache [8, 31], [142] analisou alguns sistemas do tipo do OHGDT, porém com um potencial repulsivo extra.

## Capítulo 3

### SIMETRIAS DE LIE PARA SISTEMAS DE ERMAKOV

Recentemente, tem havido interesse na busca de simetrias de Lie eventualmente admitidas pelos sistemas de Ermakov [74], [112]–[114], [123]. Sem dúvida, este interesse tem sua motivação na identificação das estruturas básicas dos sistemas de Ermakov. De fato, sistemas físicos de classes distintas mas admitindo o mesmo grupo de simetrias são, num certo sentido, identificáveis. Este ponto de vista permite colocar problemas aparentemente desconectados num mesmo contexto, o que é de importância fundamental. Neste espírito, Leach [74] obteve o grupo de simetrias dos sistemas de ELRR e propôs a definição de sistemas de ELRR multidimensionais como sendo aqueles sistemas com o mesmo grupo de simetrias.

A teoria de Leach e outras propostas de extensão do conceito de sistema de Ermakov são tratadas na seção 3.3. Antes, na seção 3.1, são introduzidos os conceitos básicos necessários para o uso de simetrias de Lie aplicadas a equações diferenciais ordinárias. Na seção 3.2, aplica-se esta teoria básica aos sistemas de Ermakov.

#### *3.1 Simetrias de Lie para equações diferenciais ordinárias*

A utilização de simetrias de Lie para o entendimento de sistemas dinâmicos de dimensão finita e infinita é uma metodologia bastante disseminada [73]. Uma lista completa das áreas nas quais simetrias de Lie tem relevância está além dos limites deste trabalho. De modo análogo, uma exposição detalhada das técnicas envolvendo simetrias de Lie e suas aplicações não é fornecida aqui. A respeito destes assuntos, o leitor interessado pode consultar as referências [67, 73]. Nesta seção introdutória, são considerados tópicos elementares concernentes ao uso de simetrias de Lie no tratamento de sistemas de equações diferenciais ordinárias. A exposição é tão informal quanto possível.

Simetrias de Lie para sistemas dinâmicos tem aplicação em diversos contextos. Abaixo, são discutidas brevemente algumas destas aplicações, sem nenhuma pretensão de fornecer

uma discussão completa. Como mencionado no capítulo introdutório, podem-se procurar constantes de movimento exatas utilizando simetrias de Lie. Neste caso, a estratégia, dada uma classe de sistemas dinâmicos, é identificar quais sistemas nesta classe admitem simetrias de Lie. Estes sistemas são fortes candidatos a apresentar comportamento regular, com uma ou mais constantes de movimento exatas associadas. Entretanto, a construção explícita das constantes de movimento exatas associadas a uma dada simetria de Lie pode ser uma tarefa não trivial. Diferentemente, no caso de sistemas Lagrangianos, o uso de simetrias de Noether leva diretamente à constantes de movimento exatas, o que será visto em detalhe no capítulo 4. Recentemente [144], tem havido o esforços no sentido de tornar mais simples a construção de integrais primeiras exatas associadas a simetrias de Lie.

De modo algum o uso das simetrias de Lie limita-se à busca de constantes de movimento exatas. No caso de equações diferenciais ordinárias, o conhecimento de um grupo de simetrias de Lie permite a redução da ordem do sistema. Eventualmente, se for conhecido um número suficientemente grande de simetrias de Lie, pode-se integrar completamente as equações de movimento. Por outro lado, no caso de sistemas dinâmicos contínuos, ou seja, de equações diferenciais parciais, simetrias de Lie permitem a redução no número de variáveis independentes. O sistema simplificado, envolvendo um número menor de variáveis, frequentemente é tratável analiticamente ou, se necessário, numericamente.

Estas duas aplicações, para sistemas dinâmicos discretos ou contínuos, estão baseadas na introdução de coordenadas adequadas ao problema sob análise. Estas coordenadas, conhecidas como coordenadas canônicas do grupo, são identificadas a partir do conhecimento da estrutura do grupo de simetrias de Lie. Um exemplo elementar é fornecido pelos problemas com simetria de rotação em torno de um eixo. Neste caso, as coordenadas canônicas do grupo são as coordenadas cilíndricas. Mais frequentemente, entretanto, o grupo de simetrias de Lie subjacente não salta à vista. São necessárias, portanto, técnicas sistêmicas para a detecção do grupo de simetrias de Lie. Estas técnicas serão descritas abaixo, no caso de sistemas de equações diferenciais ordinárias, com vistas aos sistemas de Ermakov.

As simetrias de Lie também podem ser utilizadas para a construção de novas soluções de um dado sistema dinâmico a partir de soluções conhecidas. No caso das equações diferenciais parciais, as simetrias de Lie podem ser utilizadas para a obtenção de soluções invariantes, ou soluções de similaridade. Com frequência, as únicas soluções analíticas conhecidas para sistemas contínuos são as soluções de similaridade. Além disso, as soluções de similaridade muitas vezes possuem características físicas atrativas, refletindo, por ex-

emplo, o comportamento assintótico do sistema sob análise.

Neste trabalho, busca-se identificar as simetrias de Lie que podem ser associadas pelos sistemas de Ermakov. Com isto, não se tem em vista nenhuma das aplicações enumeradas acima. Na verdade, uma das estruturas matemáticas fundamentais de qualquer sistema físico é o grupo de simetrias de Lie que lhe é subjacente. Neste sentido, por exemplo, o grupo de simetrias de Lie é importante quando se quer estender os sistemas de Ermakov a muitas dimensões. Isto é, são preferíveis as extensões com a mesma estrutura de grupo dos sistemas de Ermakov de baixa dimensionalidade. Este ponto de vista foi utilizado com sucesso por Leach [74] na construção de sistemas de Ermakov de dimensionalidade arbitrária. Além disso, como será visto na seção 3.2, nem todo sistema de Ermakov generalizado admite simetrias de Lie. Isto distingue os sistemas de Ermakov admitindo simetrias de Lie como uma subclasse especial, que merece análise separada.

A partir de agora, serão expostos alguns dos conceitos elementares referentes às simetrias de Lie. A análise que segue é suficiente para nossos propósitos. Maiores detalhes encontram-se nas referências [67, 73]. Especificamente, serão tratados sistemas de equações diferenciais ordinárias com  $N$  variáveis dependentes  $q_i$ ,  $i = 1, \dots, N$ , e dependente  $t$ . Dadas estas variáveis, seja a transformação infinitesimal

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \varepsilon \eta(\mathbf{q}, t), \quad (3.1)$$

$$\bar{t} = t + \varepsilon \tau(\mathbf{q}, t), \quad (3.2)$$

com parâmetro infinitesimal  $\varepsilon$ , onde  $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_N)$  e  $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)$ . Nas equações (3.1–3.2), está-se propondo uma transformação das coordenadas continuamente conectada à identidade. Com isto, excluem-se transformações discretas como reflexões ou reversão temporal. Além disso, as funções  $\eta_i$  e  $\tau$  são consideradas analíticas. Finalmente, estão sendo excluídas as chamadas transformações dinâmicas, nas quais há presença das componentes  $\dot{q}_i$  da velocidade na definição da transformação infinitesimal. As transformações dinâmicas expandem significativamente a potencialidade dos grupos de transformações no tratamento de equações diferenciais. Por simplicidade, entretanto, serão tratadas apenas transformações do tipo (3.1–3.2), as chamadas transformações geométricas.

A informação contida na transformação infinitesimal pode ser compactamente representada pelo operador diferencial

$$G = \tau(\mathbf{q}, t) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(\mathbf{q}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}, \quad (3.3)$$

que é chamado de gerador de simetria. Com isto, as equações (3.1–3.2) podem ser expressas em componentes segundo

$$\bar{q}_i = q_i + \varepsilon G q_i, \quad (3.4)$$

$$\bar{t} = t + \varepsilon G t. \quad (3.5)$$

De modo mais geral, a modificação infinitesimal induzida pela transformação (3.4–3.5) em uma função  $A(\mathbf{q}, t)$  é dada por

$$A(\bar{\mathbf{q}}, \bar{t}) = A(\mathbf{q}, t) + \varepsilon G A(\mathbf{q}, t). \quad (3.6)$$

Dada a forma infinitesimal da transformação, obtém-se a forma global,

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{a}(\mathbf{q}, t; \varepsilon), \quad (3.7)$$

$$\bar{t} = b(\mathbf{q}, t; \varepsilon), \quad (3.8)$$

onde  $\mathbf{a}$  e  $b$  são funções analíticas e agora  $\varepsilon$  é um parâmetro finito, por integração. Como a transformação está continuamente conectada à identidade, pode-se pensar a forma global como o resultado de uma sucessão infinita de transformações infinitesimais. Uma maneira de expressar este fato é a representação

$$\bar{\mathbf{q}} = \exp(\varepsilon G)\mathbf{q}, \quad (3.9)$$

$$\bar{t} = \exp(\varepsilon G)t \quad (3.10)$$

para a transformação global (3.7–3.8), onde, por definição,

$$\exp G = 1 + \varepsilon G + \frac{\varepsilon^2}{2!}G^2 + \dots \quad (3.11)$$

Nesta última fórmula, entende-se o produto  $G^2$  como sendo igual ao operador obtido pela atuação de  $G$  duas vezes. Isto é,  $(G^2)F = G(G(F))$ . As demais potências de  $G$  são interpretadas de modo análogo.

De um modo mais geral, a modificação global induzida pela transformação (3.9–3.10) numa função  $A(\mathbf{q}, t)$  arbitrária é dada por

$$A(\bar{\mathbf{q}}, \bar{t}) = A(\exp(\varepsilon G)\mathbf{q}, \exp(\varepsilon G)t). \quad (3.12)$$

No limite em que  $\varepsilon \rightarrow 0$ , as transformações globais (3.9–3.10) e (3.12) recaem nas transformações infinitesimais (3.4–3.5) e (3.6), respectivamente.

As formas (3.9–3.10) e (3.12) de representar transformações globais são úteis especialmente na demonstração de teoremas. Na prática, muitas vezes é preferível entender a transformação infinitesimal (3.1–3.2) como uma transformação uniparamétrica do plano nele mesmo. Em outras palavras, como um sistema dinâmico. Esta idéia pode ser formalizada no sistema de equações diferenciais

$$\frac{d\bar{\mathbf{q}}}{d\varepsilon} = \eta(\bar{\mathbf{q}}, \bar{t}) \quad , \quad \frac{d\bar{t}}{d\varepsilon} = \tau(\bar{\mathbf{q}}, \bar{t}) \quad , \quad (3.13)$$

com condição inicial

$$\bar{\mathbf{q}}(\varepsilon = 0) = \mathbf{q} \quad , \quad \bar{t}(\varepsilon = 0) = t \quad . \quad (3.14)$$

Nesta descrição,  $\varepsilon$  cumpre o papel de parâmetro temporal. A solução do sistema (3.13) com condição inicial (3.14) fornece a forma global (3.7–3.8).

O problema inverso ao de construir a transformação global a partir da infinitesimal é o problema de como obter o gerador  $G$  a partir da transformação global. Expandindo as equações (3.7–3.8) até primeira ordem em  $\varepsilon$ , vem que

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \varepsilon \left( \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{q}, t; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \quad , \quad \bar{t} = t + \varepsilon \left( \frac{\partial b(\mathbf{q}, t; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \quad . \quad (3.15)$$

Supõe-se que a transformação é bem comportada, de modo que as derivadas acima estão bem definidas. A comparação das relações (3.1–3.2) com (3.15) mostra que

$$\eta(\mathbf{q}, t) = \left( \frac{\partial \mathbf{a}(\mathbf{q}, t; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \quad , \quad \tau(\mathbf{q}, t) = \left( \frac{\partial b(\mathbf{q}, t; \varepsilon)}{\partial \varepsilon} \right)_{\varepsilon=0} \quad . \quad (3.16)$$

Neste trabalho, tratam-se de transformações (3.7–3.8) que tem a estrutura de um grupo de Lie. Ou seja, dadas as funções  $\mathbf{a}$  e  $b$ , são satisfeitos os axiomas necessários para que o conjunto de todas as transformações (3.7–3.8) forme um grupo de Lie. Cada elemento deste conjunto é caracterizado por um valor do parâmetro  $\varepsilon$ . Os axiomas para que haja estrutura de grupo são os seguintes:

a) A composição de duas transformações do tipo (3.7–3.8) é uma transformação do tipo (3.7–3.8).

Formalmente, isto significa que se

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{a}(\mathbf{a}(\mathbf{q}, t; \varepsilon_1), b(\mathbf{q}, t; \varepsilon_1); \varepsilon_2) \quad , \quad (3.17)$$

$$\bar{t} = b(\mathbf{a}(\mathbf{q}, t; \varepsilon_1), b(\mathbf{q}, t; \varepsilon_1); \varepsilon_2) \quad (3.18)$$

denota o resultado de efetuar duas transformações (3.7–3.8) seguidas, sendo  $\varepsilon_1$  o parâmetro da primeira e  $\varepsilon_2$  o da segunda, então

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{a}(\mathbf{q}, t; C(\varepsilon_1, \varepsilon_2)), \quad (3.19)$$

$$\bar{t} = b(\mathbf{q}, t; C(\varepsilon_1, \varepsilon_2)) \quad (3.20)$$

é equivalente às relações (3.17–3.18). Nas fórmulas (3.19–3.20),  $C(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$  é uma função numérica que caracteriza a regra de composição entre transformações.

b) Associatividade.

Chamando de  $T_i$  a transformação com parâmetro  $\varepsilon_i$ , associatividade significa que  $T_1 \circ (T_2 \circ T_3) = (T_1 \circ T_2) \circ T_3$ , onde  $\circ$  denota composição. Em termos da função  $C$  que fornece a regra de composição, é necessário que

$$C(C(\varepsilon_3, \varepsilon_2), \varepsilon_1) = C(\varepsilon_3, C(\varepsilon_2, \varepsilon_1)). \quad (3.21)$$

c) Existência do elemento identidade.

Sempre é possível estipular que o elemento identidade é o correspondente a  $\varepsilon = 0$ . Com isto,

$$\mathbf{a}(\mathbf{q}, t; 0) = \mathbf{q} \quad , \quad b(\mathbf{q}, t; 0) = t \quad . \quad (3.22)$$

d) Existência de inversa.

Para toda transformação com parâmetro  $\varepsilon_1$ , existe outra com parâmetro  $\varepsilon_2$  de modo que

$$C(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = 0. \quad (3.23)$$

Com isto, o produto das duas transformações resulta na identidade.

Por definição, o grupo de transformações (3.7–3.8) está sendo considerado um grupo de Lie. Por grupo de Lie, se entende um grupo com a estrutura de uma variedade diferenciável. Para nossos propósitos, a existência da estrutura de variedade diferenciável significa que os elementos do grupo de transformações podem ser obtidos variando continuamente um ou mais parâmetros. No caso das transformações uniparamétricas (3.7–3.8), o parâmetro que está sendo variado é  $\varepsilon$ . Além disso, a existência da estrutura de variedade diferenciável significa que as transformações podem ser representadas por algum sistema de coordenadas. Isto está feito implicitamente nas equações (3.7–3.8), através das coordenadas  $(\mathbf{q}, t)$ . Finalmente, no caso dos grupos de Lie as funções  $\mathbf{a}(\mathbf{q}, t; \varepsilon)$  e  $b(\mathbf{q}, t; \varepsilon)$  são analíticas.

Um conceito de importância fundamental no estudo das simetrias de Lie de equações diferenciais é o de função invariante sob o grupo de transformações. Uma função  $A(\mathbf{q}, t)$  é dita invariante se a sua forma for mantida pela transformação. Em outras palavras,

$$A(\bar{\mathbf{q}}(\mathbf{q}, t; \varepsilon), \bar{t}(\mathbf{q}, t; \varepsilon)) = A(\mathbf{q}, t). \quad (3.24)$$

A definição acima é feita em termos da transformação global e, assim, sua verificação pode exigir uma álgebra considerável em aplicações. Neste e em outros casos, é preferível adotar algum critério baseado na transformação infinitesimal ou, o que é o mesmo, no gerador  $G$ . Um critério necessário e suficiente para invariância, em termos do gerador  $G$ , é dado por

$$G A(\mathbf{q}, t) = 0. \quad (3.25)$$

É fácil deduzir a relação (3.25) expandindo a equação (3.24) em uma série de potências e impondo invariância para todas as ordens de  $\varepsilon$ . Observe-se que não se deve confundir os conceitos de função invariante sob um grupo de transformações e de invariante exato associado a um sistema dinâmico.

Já é hora de exemplificar os conceitos expostos acima. Seja a função de duas variáveis

$$A(x, y) = x^2 + y^2. \quad (3.26)$$

Evidentemente, esta função é invariante sob o grupo das rotações no plano, cuja forma global é

$$\bar{x}(x, y; \varepsilon) = x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon, \quad (3.27)$$

$$\bar{y}(x, y; \varepsilon) = x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon. \quad (3.28)$$

A invariância se verifica, pois

$$\begin{aligned} A(\bar{x}(x, y; \varepsilon), \bar{y}(x, y; \varepsilon)) &= (x \cos \varepsilon - y \sin \varepsilon)^2 + (x \sin \varepsilon + y \cos \varepsilon)^2 = \\ &= x^2 + y^2. \end{aligned} \quad (3.29)$$

A forma infinitesimal do grupo das rotações é obtida tomando as equações (3.27–3.28) até primeira ordem em  $\varepsilon$ . O resultado é

$$\bar{x} = x - \varepsilon y, \quad (3.30)$$

$$\bar{y} = y + \varepsilon x. \quad (3.31)$$

Consequentemente, o gerador das rotações é dado por

$$G = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}. \quad (3.32)$$

A invariância da função  $A(x, y)$  pode ser verificada novamente utilizando  $G$ , pois

$$G A(x, y) = \left( x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) (x^2 + y^2) = 0. \quad (3.33)$$

Finalmente, se fossem dadas inicialmente a transformação infinitesimal (3.30–3.31), a obtenção da forma global das transformações requereria a solução de

$$\frac{d\bar{x}}{d\varepsilon} = -\bar{y}, \quad \frac{d\bar{y}}{d\varepsilon} = \bar{x}, \quad (3.34)$$

com condição inicial

$$\bar{x}(\varepsilon = 0) = x, \quad \bar{y}(\varepsilon = 0) = y. \quad (3.35)$$

A solução é, de fato, dada por (3.27–3.28).

Até agora, foram consideradas transformações genéricas, que podem ou não ser simetrias de sistemas dinâmicos. Tendo já introduzido os conceitos fundamentais sobre transformações, é possível voltar nossa atenção ao caso específico das simetrias de Lie para sistemas de equações diferenciais de segunda ordem, da forma

$$\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = 0, \quad (3.36)$$

onde  $\mathbf{N} = (N_1, \dots, N_M)$ , sendo  $M$  algum número inteiro e finito.

Por definição [73], o grupo de simetrias de Lie de um sistema de equações diferenciais ordinárias é o maior grupo de transformações do tipo (3.7–3.8) com a propriedade de transformar soluções em soluções. Para entender precisamente a definição, é necessário descrever o que é a transformação induzida pela transformação (3.7–3.8) numa solução

$$\mathbf{q} = \mathbf{f}(t) = (f_1(t), \dots, f_N(t)) \quad (3.37)$$

para o sistema (3.36). Geometricamente, a solução (3.37) representa uma curva num espaço de  $N$  dimensões que, para todos os efeitos, pode ser tomado como sendo o  $\mathfrak{R}^N$ . Ao ser introduzido o grupo de transformações, o mapeamento desta curva produz uma nova curva, da forma

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{b} \bar{f}(\bar{t}; \varepsilon), \quad (3.38)$$

onde  $\bar{\mathbf{f}} = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_N)$  é uma função vetorial que é obtida seguindo o procedimento do parágrafo seguinte. Mais precisamente, a relação (3.38) descreve uma família de curvas, sendo cada elemento desta família especificado por um valor do parâmetro  $\varepsilon$ .

A obtenção de  $\bar{\mathbf{f}}$  na fórmula (3.38) requer a eliminação do tempo  $t$  entre as equações

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{a}(\mathbf{f}(t), t; \varepsilon), \quad (3.39)$$

$$\bar{t} = b(\mathbf{f}(t), t; \varepsilon), \quad (3.40)$$

que fornece o mapeamento da curva  $\mathbf{q} = \mathbf{f}(t)$  pela transformação.

No caso das transformações projetáveis, que são as que ocorrem mais frequentemente em aplicações, a transformação do parâmetro temporal não envolve as coordenadas espaciais. Isto é, a transformação é da forma

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{a}(\mathbf{q}, t; \varepsilon), \quad (3.41)$$

$$\bar{t} = b(t; \varepsilon), \quad (3.42)$$

onde a função  $b$  acima não depende de  $\mathbf{q}$ . Neste caso dos grupos projetáveis a prescrição para obter a transformação de uma curva se traduz numa forma mais simples. Seja

$$t = \bar{b}(\bar{t}; \varepsilon) \quad (3.43)$$

a inversa da relação (3.42), a qual sempre existe, ao menos localmente. Inserindo a inversa na equação (3.39), vem que

$$\bar{\mathbf{q}} = \mathbf{a}(\mathbf{f}(\bar{b}(\bar{t}; \varepsilon), \bar{b}(\bar{t}; \varepsilon); \varepsilon)). \quad (3.44)$$

Ou seja,

$$\bar{f}(\bar{t}) = \mathbf{a}(\mathbf{f}(\bar{b}(\bar{t}; \varepsilon), \bar{b}(\bar{t}; \varepsilon); \varepsilon)). \quad (3.45)$$

No caso de grupos não projetáveis, a forma final da função  $\bar{\mathbf{f}}$  é bem mais complicada e será o mitida.

Como exemplo de transformação de uma curva, seja

$$y = f(x) = cx + d \quad (3.46)$$

a equação da reta no  $\mathfrak{R}^2$ , sendo  $c$  e  $d$  constantes e o grupo das rotações já definido pelas fórmulas (3.27–3.28). Aqui,  $y$  faz o papel de variável dependente e  $x$  o de variável independente.

Naturalmente, o efeito de uma rotação sobre uma reta é produzir outra reta. Assim, é de se esperar que se obtenha uma curva *bary*( $\bar{x}$ ) linear. Além disso, desde que a nova reta não seja vertical, espera-se que esta função  $\bar{y}(\bar{x})$  seja bem comportada. Sob a rotação (3.27–3.28), a reta é mapeada em

$$\bar{x} = x \cos \varepsilon - (cx + d) \sin \varepsilon, \quad (3.47)$$

$$\bar{y} = x \sin \varepsilon + (cx + d) \cos \varepsilon. \quad (3.48)$$

Eliminando  $x$  usando a equação (3.47) e inserindo na equação (3.48), obtém-se a função linear

$$\bar{y} = \bar{f}(\bar{x}) = \bar{c}\bar{x} + \bar{d}, \quad (3.49)$$

onde  $\bar{c}$  e  $\bar{d}$  são as constantes dadas por

$$\bar{c} = \left( \frac{\sin \varepsilon + c \cos \varepsilon}{\cos \varepsilon - c \sin \varepsilon} \right), \quad (3.50)$$

$$\bar{d} = \frac{d}{(\cos \varepsilon - c \sin \varepsilon)}. \quad (3.51)$$

Estas funções  $\bar{c}$  e  $\bar{d}$  não são singulares se a rotação não produzir uma reta vertical.

Agora que foi definida a transformação de uma curva sob o grupo de transformações (3.7–3.8), é possível definir precisamente mapeamento de soluções em soluções. Este conceito é fundamental para a caracterização de simetrias de Lie. Dada a solução (3.37) para o sistema de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem (3.36), tem-se que a expressão (3.38) representa uma nova solução se e somente se

$$\mathbf{q} = \bar{\mathbf{f}}(t; \varepsilon) \quad (3.52)$$

satisfaz a equação (3.36). Observe-se que, nesta nova solução, comparece a mesma função  $\bar{f}$  dada em (3.38), mas o argumento presente é o parâmetro temporal  $t$ , não transformado.

De imediato, se vê que as simetrias de Lie podem ser utilizadas para construir soluções mais gerais da equação (3.36) a partir de soluções particulares. De fato, na fórmula (3.52) está presente o parâmetro  $\varepsilon$ . Ou seja, dada uma solução particular  $\mathbf{q} = \mathbf{f}(t)$ , obtém-se, via simetrias de Lie, uma família uniparamétrica de soluções. Neste espírito, o conhecimento de uma solução particular e de um número suficiente de simetrias de Lie pode levar à integração completa do sistema (3.36). Neste caso, as constantes de integração são os vários parâmetros que especificam o grupo de simetrias.

A definição de grupo de simetrias de Lie envolveu a forma global das transformações de simetria. Entretanto, grande parte da utilidade dos grupos de Lie está no fato de ser

possível usar apenas sua, o que simplifica consideravelmente os cálculos. De fato, estando continuamente conectadas à identidade, as transformações globais podem ser vistas como o resultado de uma sucessão infinita de transformações infinitesimais. Embora os aspectos globais dos grupos de Lie sejam de interesse em outros contextos, para nossos propósitos é suficiente considerar sua forma local. Assim, tendo definido o que é simetria de Lie, nos falta estabelecer um critério para verificar se uma dada transformação infinitesimal é uma simetria para um sistema de equações ordinárias. Juntamente com este critério, é fundamental obter uma estratégia para a obtenção das simetrias de Lie de um dado sistema de equações diferenciais.

Seja  $\mathbf{q}(t)$  a solução geral do sistema (3.36). A transformação de variáveis (3.7–3.8) produzirá, a partir de  $\mathbf{q}(t)$ , uma nova trajetória  $\bar{\mathbf{q}}(\bar{t})$  no espaço transformado, de coordenadas  $(\bar{q}_1, \dots, \bar{q}_N)$ . No caso de transformações de simetria, soluções são mapeadas em soluções. Assim, é necessário que  $\bar{\mathbf{q}}(\bar{t})$  satisfaça, formalmente, o mesmo sistema de equações que  $\mathbf{q}(t)$ . Ou seja,

$$\mathbf{N} \left( \bar{\mathbf{q}}, \frac{d\bar{\mathbf{q}}}{d\bar{t}}, \frac{d^2\bar{\mathbf{q}}}{d\bar{t}^2}, \bar{t} \right) = 0. \quad (3.53)$$

Na condição (3.53), comparece a mesma função vetorial  $\mathbf{N}$  definida no sistema original (3.36). Isto é, encarando  $\mathbf{N}$  como uma função num espaço de coordenadas  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t)$ , as transformações de simetria seriam aquelas que mantêm  $\mathbf{N}$  invariante.

A condição (3.53) não é local, o que torna complicada a sua utilização na prática. É necessário reformular o critério de invariância para que o grupo de Lie apareça apenas na sua forma infinitesimal. Para isto, é preciso obter as modificações na velocidade  $\dot{\mathbf{q}}$  e na aceleração  $\ddot{\mathbf{q}}$  induzidas pela transformação infinitesimal (3.1–3.2).

O critério de invariância (3.53) envolve as derivadas de  $\bar{\mathbf{q}}$  em relação ao novo parâmetro temporal. Geometricamente, a transformação (3.7–3.8) transforma curvas em curvas. A transformação induzida na tangente da curva original, que é a velocidade  $\dot{\mathbf{q}}$ , fornece a nova velocidade  $d\bar{\mathbf{q}}/d\bar{t}$ . Um raciocínio semelhante aplica-se à transformação da aceleração. Formalmente, usando a transformação infinitesimal (3.1–3.2), obtém-se

$$\frac{d\bar{\mathbf{q}}}{d\bar{t}} = \dot{\mathbf{q}} + \varepsilon(\dot{\eta} - \dot{\tau}\dot{\mathbf{q}}), \quad (3.54)$$

onde

$$\dot{\eta} = \partial\eta/\partial t + \dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla\eta, \quad (3.55)$$

$$\dot{\tau} = \partial\tau/\partial t + \dot{\mathbf{q}} \cdot \nabla\tau. \quad (3.56)$$

A relação (3.54) fornece a mudança induzida na velocidade pela transformação infinitesimal. Esta informação e a própria transformação infinitesimal podem ser compactamente representadas pelo gerador uma vez estendido  $G^{[1]}$  definido por

$$G^{[1]} = G + (\dot{\eta} - \dot{\tau}\dot{\mathbf{q}}) \cdot \frac{\partial}{\partial \dot{\mathbf{q}}} . \quad (3.57)$$

A forma de atuação do gerador uma vez estendido  $G^{[1]}$  é similar à do gerador  $G$ . Porém, o espaço em que o gerador uma vez estendido atua é descrito por coordenadas  $(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$ , que inclui a velocidade. Neste contexto, a condição de invariância de uma função  $A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  sob o grupo de Lie (3.1–3.2) é dada por

$$G^{[1]} A(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) = 0 . \quad (3.58)$$

Esta é uma condição necessária e suficiente para invariância até mesmo sob o grupo global (3.7–3.8).

De modo similar, a transformação infinitesimal na aceleração é obtida via

$$\frac{d^2 \bar{\mathbf{q}}}{dt^2} = \ddot{\mathbf{q}} + \varepsilon(\ddot{\eta} - 2\dot{\tau}\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\tau}\dot{\mathbf{q}}) , \quad (3.59)$$

onde as derivadas segundas de  $\eta$  e  $\tau$  são definidas de modo análoga às derivadas primeiras nas fórmulas (3.55–3.56). Estas expressões serão omitidas por sua extensão e por não contribuírem para um melhor entendimento do assunto.

Dada a relação (3.59), define-se o gerador duas vezes estendido como sendo o operador diferencial

$$G^{[2]} = G^{[1]} + (\ddot{\eta} - 2\dot{\tau}\ddot{\mathbf{q}} - \ddot{\tau}\dot{\mathbf{q}}) \cdot \frac{\partial}{\partial \ddot{\mathbf{q}}} . \quad (3.60)$$

Se tem à mão, finalmente, todos os ingredientes necessários para estabelecer um critério local para que uma dada transformação seja uma simetria de Lie. Até a primeira ordem em  $\varepsilon$ , a equação (3.53) e quivale a

$$\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) + \varepsilon G^{[2]} \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = 0 . \quad (3.61)$$

Ocorre que a transformação está agindo sobre uma solução da equação (3.36). Utilizando esta informação na condição (3.61), conclui-se que invariância sob a transformação infinitesimal implica

$$\left( G^{[2]} \mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) \right)_{\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t)=0} . \quad (3.62)$$

Demonstra-se que esta condição de simetria assegura que a transformação global também seja uma simetria de Lie.

É importante ressaltar que o critério (3.62) não requer invariância absoluta do sistema de equações diferenciais, mas apenas invariância no sub-espaço  $\mathbf{N}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, \ddot{\mathbf{q}}, t) = 0$ . Isto possibilita encontrar um número maior de transformações de simetria. Além disso, o critério (3.62) é coerente com a definição de simetria de Lie, que requer apenas que soluções sejam transformadas em soluções.

Pode-se entender (3.62) como uma condição a ser satisfeita identicamente pelas funções  $\eta$  e  $\tau$  que compõem o gerador de simetria. Com isto, obtém-se um conjunto de equações parciais que determina a totalidade de simetrias admissíveis por um dado sistema de equações de segunda ordem. Estas transformações formam o grupo de simetrias de Lie do problema. Na seção seguinte, mostra-se em detalhe a utilização do critério obtido na determinação do grupo de simetrias de Lie dos sistemas de Ermakov generalizados. Pode-se também considerar a relação (3.62) do ponto de vista inverso. Isto é, dado o gerador de simetrias, especificado pelas funções  $\eta$  e  $\tau$ , pode-se encarar (3.62) como um conjunto de equações para  $\mathbf{N}$ . Com isto, se determina o sistema de equações de segunda ordem mais geral possível com um determinado grupo de simetrias. Esta abordagem inversa é seguida na seção 3.3, com o intuito de estender os sistemas de Ermakov para dimensões arbitrárias.

Para finalizar a seção, serão discutidos brevemente ainda dois tópicos de interesse sobre simetrias de Lie. Um deles é o método de simetrias de Lie para obtenção de constantes de movimento exatas, e o outro é a definição de coordenadas canônicas de um grupo de transformações.

Dado um sistema dinâmico com uma simetria de Lie, é natural buscar uma constante de movimento exata  $I(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  satisfazendo

$$G^{[1]} I = 0. \quad (3.63)$$

Em outras palavras, no método das simetrias de Lie para constantes de movimento exatas, busca-se uma constante de movimento exata que seja invariante sob o grupo de simetrias. Supondo que seja possível obter a solução geral da equação diferencial parcial linear (3.63) para  $I$ , deve-se ainda levar em conta a definição de integral primeira exata,

$$\dot{I}_{\mathbf{N}=0} = 0. \quad (3.64)$$

Em aplicações práticas, nada garante que seja possível levar a cabo globalmente a tarefa de solucionar as equações (3.63–3.64). Este assunto será apreciado com um exemplo na seção 3.3, onde, em particular, é procurada uma integral primeira exata utilizando o método das simetrias de Lie para um certo sistema dinâmico.

O outro tópico que será analisado é o da definição de coordenadas canônicas

$$u_i = u_i(\mathbf{q}, t) \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad ; \quad T = T(\mathbf{q}, t) \quad (3.65)$$

para um dado grupo de simetrias. Nestas coordenadas, o grupo de simetrias passa a ser composto por translações no parâmetro  $T$ ,

$$G = \frac{\partial}{\partial T} . \quad (3.66)$$

A variável  $T$  faz o papel de parâmetro temporal.

Evidentemente, as coordenadas canônicas simplificam os problemas com simetria, podendo ser consideradas as variáveis naturais em termos das quais estes sistemas devem ser formulados. Esta simplificação pode ser verificada em diversos contextos. Para citar um exemplo, no caso das equações diferenciais parciais com simetria de Lie o uso de coordenadas canônicas permite reduzir o número de coordenadas independentes. No caso das equações ordinárias, o uso de coordenadas canônicas sempre elimina a presença de  $T$  das equações de movimento, que passam a ser da forma

$$\mathbf{u}'' = \bar{\mathbf{N}}(\mathbf{u}, \mathbf{u}') \quad (3.67)$$

onde  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_N)$ , a linha denota derivada frente ao novo tempo  $T$  e  $\bar{\mathbf{N}}$  é uma certa função vetorial que se obtém das equações de movimento originais. Ou seja, obtém-se um sistema autônomo.

A obtenção das coordenadas canônicas requer a solução das equações parciais

$$G u_i = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, N \quad ; \quad G T = 1 \quad . \quad (3.68)$$

Como estas equações são lineares, localmente é garantida a existência de soluções bem comportadas, graças ao teorema de Cauchy–Kovalevskaya. Finalmente, a condição (3.63) pode ser expressa em termos de coordenadas canônicas conforme

$$I = I(\mathbf{u}, \mathbf{u}') . \quad (3.69)$$

Isto completa esta breve revisão das técnicas de simetrias de Lie.

### 3.2 Sistemas de Ermakov com simetrias de Lie

A seção dedica-se à análise das simetrias de Lie geométricas admissíveis pelos sistemas de Ermakov generalizados. Com isto, estende-se a contribuição de Leach e colaboradores

[74], [112]–[114], que consideraram as simetrias de Lie geométricas dos sistemas de ELRR. Nestes sistemas de Ermakov, por definição, a frequência depende tão somente do tempo. Ao considerar frequências mais complexas, é encontrada uma classe bem mais ampla de sistemas dinâmicos de Ermakov com simetrias de Lie geométricas. Como primeira aplicação deste ponto de vista estendido, mostra-se que um oscilador não linear considerado por Ray e Reid [145] e Lutzky [146] pode ser interpretado como um sistema de Ermakov com simetrias de Lie. Além disso, os resultados anteriores concernentes aos sistemas de ELRR são encontrados como um caso particular.

Para aplicar as técnicas de simetrias de Lie expostas na seção 3.1, considera-se inicialmente um gerador de simetrias de Lie da forma

$$G = \tau(x, y, t) \frac{\partial}{\partial t} + \eta_1(x, y, t) \frac{\partial}{\partial x} + \eta_2(x, y, t) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.70)$$

Seguindo a abordagem de Go vinder e Leach para o caso dos sistemas de ELRR [74, 113], impõe-se que  $G$  dado acima seja o gerador de simetrias de Lie para o sistema

$$N_1 = x\ddot{y} - y\ddot{x} + \frac{1}{x^2}F(y/x) = 0, \quad (3.71)$$

$$N_2 = \ddot{y} + \Omega^2(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t)y = 0, \quad (3.72)$$

o qual é equivalente ao sistema de Ermakov generalizado (1.23–1.24). É vantajoso considerar (3.71) porque esta equação não contém a frequência. Isto proporciona uma maior facilidade na obtenção do gerador de simetria admissível.

Para encontrar as simetrias de Lie correspondentes ao sistema dinâmico (3.71–3.72), é necessário aplicar o critério (3.62) obtido na seção anterior, onde o gerador é dado pela equação (3.70) e  $\mathbf{N} = (N_1, N_2)$ . O procedimento é feito por etapas. Inicialmente, se encontram as simetrias que podem ser associadas à equação de movimento (3.71). Impõe-se, então, que o gerador de simetrias assim obtido também gere simetrias para a equação (3.72).

No caso de um gerador num espaço de duas variáveis dependentes e uma independente, como na definição (3.70), a forma da segunda extensão encontrada a partir da equação (3.60) é dada por

$$\begin{aligned} G^{[2]} &= \tau \frac{\partial}{\partial t} + \eta_1 \frac{\partial}{\partial x} + \eta_2 \frac{\partial}{\partial y} + \left( -\frac{\partial \tau}{\partial x} \dot{x}^2 - \frac{\partial \tau}{\partial y} \dot{x}\dot{y} + \left( \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \dot{x} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \eta_1}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{x}} + \\ &+ \left( -\frac{\partial \tau}{\partial y} \dot{y}^2 - \frac{\partial \tau}{\partial x} \dot{x}\dot{y} + \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \dot{x} + \left( \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \dot{y} + \frac{\partial \eta_2}{\partial t} \right) \frac{\partial}{\partial \dot{y}} + \\ &+ \left( \left( -3\frac{\partial \tau}{\partial x} \dot{x} - 2\frac{\partial \tau}{\partial y} \dot{y} - 2\frac{\partial \tau}{\partial t} + \frac{\partial \eta_1}{\partial x} \right) \dot{x} + \left( -\frac{\partial \tau}{\partial y} \dot{x} + \frac{\partial \eta_1}{\partial y} \right) \dot{y} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} \dot{x}^3 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - 2 \frac{\partial \tau^2}{\partial x \partial y} \dot{x}^2 \dot{y} - \frac{\partial \tau^2}{\partial y^2} \dot{x} \dot{y}^2 + \left( \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial t} \right) \dot{x}^2 + \left( 2 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial y \partial t} \right) \dot{x} \dot{y} + \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial y^2} \dot{y}^2 + \\
 & + \left( 2 \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x \partial t} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \right) \dot{x} + 2 \frac{\partial \eta_1}{\partial y \partial t} \dot{y} + \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial \ddot{x}} + \left( -\frac{\partial \tau}{\partial x} \dot{y} + \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \right) \ddot{x} + \\
 & + \left( -2 \frac{\partial \tau}{\partial x} \dot{x} - 3 \frac{\partial \tau}{\partial y} \dot{y} + \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - 2 \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) \ddot{y} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} \dot{x}^2 \dot{y} - 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} \dot{x} \dot{y}^2 - \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} \dot{y}^3 + \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x^2} \dot{x}^2 + \\
 & + 2 \left( \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial t} \right) \dot{x} \dot{y} + \left( \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau}{\partial y \partial t} \right) \dot{y}^2 + \\
 & + 2 \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x \partial t} \dot{x} + \left( 2 \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial y \partial t} - \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \right) \dot{y} + \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial t^2} \frac{\partial}{\partial \ddot{y}}. \tag{3.73}
 \end{aligned}$$

Aplicando a segunda extensão de  $G$  em  $N_1$ , encontra-se a longa expressão

$$\begin{aligned}
 \left( G^{[2]} N_1 \right)_{\mathbf{N}=0} & = \left( \left( y \frac{\partial \tau}{\partial y} + x \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) (x \dot{y} - y \dot{x}) + x \left( y \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - x \frac{\partial \eta_2}{\partial x} + \eta_2 \right) + \right. \\
 & + \left. y \left( y \frac{\partial \eta_1}{\partial y} - x \frac{\partial \eta_2}{\partial y} - \eta_1 \right) \right) \Omega^2 + (x \eta_2 - y \eta_1) \frac{dF/d(y/x)}{x^4} + \\
 & + \left( 3 \frac{\partial \tau}{\partial x} \frac{\dot{x}}{x^2} + \left( 2 y \frac{\partial \tau}{\partial y} - x \frac{\partial \tau}{\partial x} \right) \frac{\dot{y}}{y x^2} + \frac{1}{x y} \frac{\partial \eta_2}{\partial x} \right. \\
 & - \left. \frac{1}{x^2} \frac{\partial \eta_1}{\partial x} - 2 \frac{\eta_1}{x^3} - \frac{\eta_2}{y x^2} + \frac{2}{x^2} \frac{\partial \tau}{\partial t} \right) F + \\
 & + y \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} \dot{x}^3 + \left( 2 y \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} - x \frac{\partial^2 \tau}{\partial x^2} \right) \dot{x}^2 \dot{y} + \left( y \frac{\partial \tau}{\partial y^2} - 2 x \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial y} \right) \dot{x} \dot{y}^2 - x \frac{\partial^2 \tau}{\partial y^2} \dot{y}^3 + \\
 & + \left( x \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x^2} - y \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x^2} + 2 y \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial t} \right) \dot{x}^2 + \left( x \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial y^2} - y \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial y^2} - 2 x \frac{\partial \tau}{\partial y \partial t} \right) \dot{y}^2 + \\
 & + 2 \left( x \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x \partial y} - y \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x \partial y} + y \frac{\partial^2 \tau}{\partial y \partial t} - x \frac{\partial^2 \tau}{\partial x \partial t} \right) \dot{x} \dot{y} \\
 & + \left( 2 x \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial x \partial t} - 2 y \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial x \partial t} + y \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \right) \dot{x} + \left( 2 x \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial y \partial t} - 2 y \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial y \partial t} - x \frac{\partial^2 \tau}{\partial t^2} \right) \dot{y} + \\
 & + x \frac{\partial^2 \eta_2}{\partial t^2} - y \frac{\partial^2 \eta_1}{\partial t^2} = 0. \tag{3.74}
 \end{aligned}$$

Observe-se que nesta expressão não constam as componentes  $\ddot{x}$  e  $\ddot{y}$  da aceleração, as quais foram eliminadas usando as equações de movimento.

Foi obtida a relação (3.74), que é uma condição necessária e suficiente sobre as funções  $\tau$ ,  $\eta_1$  e  $\eta_2$  para que haja simetria de Lie geométrica. Como não se está interessado em algum sistema de Ermakov particular, mas sim na totalidade dos sistemas de Ermakov, se deve postergar ao máximo a escolha das funções  $\Omega$  e  $F$ . A cada escolha particular destas funções corresponde um sistema de Ermakov específico. Para manter máxima generalidade, portanto, deve-se tomar os coeficientes de  $dF/d(y/x)$ ,  $F$  e  $\Omega^2$  como sendo

nulos na expressão (3.74). Só assim mantém-se totalmente genérica a forma do sistema de Ermakov, ao menos no que concerne às simetrias da equação  $N_1 = 0$ . Esta estratégia de anular os coeficientes de  $dF/d(y/x)$ ,  $F$  e  $\Omega^2$ , entretanto, pode excluir algum sistema de Ermakov muito específico, que eventualmente possua um grupo de simetrias mais amplo.

O coeficiente de  $dF/d(y/x)$  na fórmula (3.74) implica que

$$\eta_2 = \frac{y}{x}\eta_1. \quad (3.75)$$

A exigência de que o coeficiente de  $F$  na equação (3.74) se anule, levando em consideração o resultado (3.75), implica

$$3\frac{\partial\tau}{\partial x}\frac{\dot{x}}{x^2} + (2y\frac{\partial\tau}{\partial y} - x\frac{\partial\tau}{\partial x})\frac{\dot{y}}{yx^2} + \frac{2}{x^3}(x\frac{\partial\tau}{\partial t} - 2\eta_1) = 0. \quad (3.76)$$

Esta última equação tem de ser identicamente satisfeita, o que só é possível anulando os coeficientes das componentes da velocidade. De fato, como se está tratando de simetrias de Lie geométricas,  $\tau$  e  $\eta_1$  não dependem da velocidade. Com isto, conclui-se, por inspeção das relações (3.75) e (3.76), que

$$\tau = \rho^2(t) \quad , \quad \eta_1 = \rho\dot{\rho}x \quad , \quad \eta_2 = \rho\dot{\rho}y \quad , \quad (3.77)$$

sendo  $\rho(t)$  uma função arbitrária do tempo. O gerador associado é

$$G_\rho = \rho^2\frac{\partial}{\partial t} + \rho\dot{\rho}x\frac{\partial}{\partial x} + \rho\dot{\rho}y\frac{\partial}{\partial y}, \quad (3.78)$$

no qual incluiu-se o subscrito “ $\rho$ ” para enfatizar que a cada função  $\rho(t)$  corresponde um gerador de simetria. De resto, verifica-se que o resultado (3.77) é solução para a equação (3.74) completa. Portanto, conclui-se que a forma mais geral possível do gerador de simetrias de Lie geométricas que mantém invariante a equação  $N_1 = 0$  é dada pela expressão (3.78). A invariância é válida para funções  $\Omega$  e  $F$  arbitrárias no sistema de Ermakov.

Ainda falta aplicar o critério de invariância (3.62) à segunda equação do sistema de Ermakov, dada em (3.72). Utilizando o gerador  $G_\rho$  dado na fórmula (3.78), vem que

$$\begin{aligned}
 (G_\rho^{[2]} N_2)_{\mathbf{N}=0} &= \rho^2 \frac{\partial(\Omega^2)}{\partial t} y + \rho \dot{\rho} y \left( x \frac{\partial(\Omega^2)}{\partial x} + y \frac{\partial(\Omega^2)}{\partial y} \right) + \\
 &+ \left( -\rho \dot{\rho} \dot{x} + (\rho \ddot{\rho} + \dot{\rho}^2) x \right) y \frac{\partial(\Omega^2)}{\partial \dot{x}} + \\
 &+ \left( -\rho \dot{\rho} \dot{y} + (\rho \ddot{\rho} + \dot{\rho}^2) y \right) x \frac{\partial(\Omega^2)}{\partial \dot{y}} + \\
 &+ 4\rho \dot{\rho} y \Omega^2 + (\rho \ddot{\rho} + 3\dot{\rho} \ddot{\rho}) y = 0.
 \end{aligned} \tag{3.79}$$

A equação (3.79) é uma equação diferencial parcial quasilinear para  $\Omega^2$ , que pode ser resolvida pelo método das características. A solução é

$$\Omega^2 = -\frac{\ddot{\rho}}{\rho} + \frac{1}{\rho^4} \sigma(\mathbf{q}/\rho, \rho \dot{\mathbf{q}} - \dot{\rho} \mathbf{q}) \quad , \quad \mathbf{q} = (x, y) \quad , \tag{3.80}$$

onde  $\sigma$  é uma função arbitrária dos argumentos indicados. Note-se que dependência nas velocidades também é possível, o que expande consideravelmente a classe de sistemas de Ermakov invariantes sob as simetrias geradas por  $G_\rho$ .

Para sumarizar os resultados obtidos até aqui nesta seção, provou-se que a classe mais geral dos sistemas de Ermakov invariantes sob simetrias de Lie puntuais são da forma

$$\ddot{x} + \left( \frac{\sigma}{\rho^4} - \frac{\ddot{\rho}}{\rho} \right) x = \frac{1}{yx^2} F(y/x), \tag{3.81}$$

$$\ddot{y} + \left( \frac{\sigma}{\rho^4} - \frac{\ddot{\rho}}{\rho} \right) y = 0. \tag{3.82}$$

onde  $\sigma$  é arbitrária mas restrita por

$$\sigma = \sigma(\mathbf{q}/\rho, \rho \dot{\mathbf{q}} - \dot{\rho} \mathbf{q}). \tag{3.83}$$

O gerador de simetrias associado é dado por  $G_\rho$ .

A classe dos sistemas de ELRR usuais é toda descrita pelo presente tratamento. Para demonstrar isto, usa-se a relação

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t) \rho = k/\rho^3, \tag{3.84}$$

sendo  $k$  uma constante, para *definir* uma nova função  $\omega(t)$  em termos de  $\rho$ . Apesar de sua aparência de equação diferencial, a relação (3.84) pode ser alternativamente considerada como a definição de  $\omega$  em termos de  $\rho$ . Com este ponto de vista, seja uma função modificada  $\bar{\sigma}$  via

$$\bar{\sigma}(\mathbf{q}/\rho, \rho \dot{\mathbf{q}} - \dot{\rho} \mathbf{q}) = -k + \frac{\rho^4}{xy^3} g(x/y) + \sigma, \tag{3.85}$$

onde foi introduzida, por conveniência, uma função  $g(x/y)$  espúria que pode ser absorvida por  $\sigma$ . Estas redefinições colocam o sistema de Ermakov generalizado (3.81–3.82) na forma mais usual

$$\ddot{x} + (\omega^2(t) + \frac{\bar{\sigma}}{\rho^4})x = \frac{1}{yx^2}f(y/x), \quad (3.86)$$

$$\ddot{y} + (\omega^2(t) + \frac{\bar{\sigma}}{\rho^4})y = \frac{1}{xy^2}g(x/y). \quad (3.87)$$

Nas equações (3.86–3.87) foi feita a substituição

$$F(y/x) = f(y/x) + \frac{x^2}{y^2}g(x/y) \quad (3.88)$$

para facilitar a comparação com os resultados prévios sobre a estrutura do grupo de simetrias dos sistemas de ELRR. Deve-se enfatizar, entretanto, que a função  $g(x/y)$  foi introduzida apenas para reconstruir a forma tradicional de apresentação do sistema de ELRR.

As equações (3.86–3.87) reduzem-se ao sistema de ELRR apenas quando  $\bar{\sigma} \equiv 0$ . Para esta classe de frequências [41], a transformação

$$\bar{x} = x/C \quad , \quad \bar{y} = y/C \quad , \quad \bar{t} = \int dt/C^2 \quad , \quad (3.89)$$

remove  $\omega$  das equações de movimento, que passam a ser

$$\frac{d^2\bar{x}}{d\bar{t}^2} = \frac{1}{\bar{y}\bar{x}^2}f(\bar{y}/\bar{x}), \quad \frac{d^2\bar{y}}{d\bar{t}^2} = \frac{1}{\bar{x}\bar{y}^2}g(\bar{x}/\bar{y}), \quad (3.90)$$

sendo que  $C(t)$  é uma solução para o OHDT,

$$\ddot{C} + \omega^2(t)C = 0. \quad (3.91)$$

A transformação (3.89) já foi considerada na seção 2.2, em conexão com a linearização do sistema de ELRR. O grupo de simetria do sistema de Ermakov transformado (3.90) é o  $SL(2, R)$ , como demonstrado em [74]. Entretanto, este não é o caso das equações (3.86–3.87), as quais são mais gerais do que os sistemas de ELRR com simetria sob o  $SL(2, R)$ , graças à função  $\bar{\sigma}$ . As transformações pertencentes ao  $SL(2, R)$  estão entre as transformações associadas a  $G_\rho$ . Para verificar isto, basta tomar  $\rho^2 = 1, 2t$  e  $t^2$ , respectivamente. Os geradores correspondentes são dados, pela ordem, por

$$G_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (3.92)$$

$$G_2 = 2t \frac{\partial}{\partial t} + x \frac{\partial}{\partial x} + y \frac{\partial}{\partial y}, \quad (3.93)$$

$$G_3 = t^2 \frac{\partial}{\partial t} + tx \frac{\partial}{\partial x} + ty \frac{\partial}{\partial y}. \quad (3.94)$$

Analisando a forma global obtida a partir das transformações infinitesimais associadas a  $G_1, G_2$  e  $G_3$ , verifica-se que estes geradores correspondem a translação temporal, auto-similaridade e mapeamento conforme, respectivamente. Com isto, o grupo  $SL(2, R)$  completo é obtido. Além disso, definindo o comutador  $[U, V]$  entre dois campos vetoriais  $U$  e  $V$  quaisquer pela fórmula usual  $[U, V] = UV - VU$ , obtém-se a estrutura algébrica

$$[G_1, G_2] = 2G_1 \quad , \quad [G_1, G_3] = G_2 \quad , \quad [G_2, G_3] = 2G_3 \quad , \quad (3.95)$$

que é a álgebra de geradores associada ao  $SL(2, R)$ .

As simetrias consideradas até agora não requerem nenhuma forma particular da função  $\sigma$ , nem dependem de nenhuma transformação de variáveis prévia como (3.89). A este respeito, deve-se notar que, apesar de sua simplicidade aparente, a transformação (3.89) não é bem definida quando  $\omega$  depende das variáveis dinâmicas, pois nesta situação a equação (3.91) perde o sentido. Além disso, mesmo para  $\omega = \omega(t)$ , a equação (3.91) do OHDT nem sempre tem solução exata, o que pode impedir a sua aplicação em muitas situações de interesse. Observações similares já foram feitas, na seção 2.2, sobre a linearização dos sistemas de ELRR proposta em [41], a qual parte justamente da transformação (3.89).

Os sistemas de Ermakov com simetria  $SL(2, R)$  a duas dimensões espaciais são solúveis em forma fechada [114]. Os sistemas de Ermakov mais gerais (3.81–3.82), entretanto, nem sempre são exatamente solúveis e este, certamente, é o preço a pagar pela generalidade extra. Alguma estrutura adicional, como uma formulação Hamiltoniana, deve existir de modo que se obtenha equações com solução exata. Para apresentar um exemplo de aplicação e para ilustrar melhor este aspecto, seja o oscilador bidimensional com acoplamento não linear considerado por Ray e Reid [145] e Lutzky [146]

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = x\rho^{-4}\gamma(xy/\rho^2), \quad (3.96)$$

$$\ddot{y} + \omega^2(t)y = y\rho^{-4}\gamma(xy/\rho^2), \quad (3.97)$$

onde  $\gamma$  é uma função arbitrária do argumento exposto e  $\rho(t)$  é uma variável auxiliar satisfazendo a equação de Pinney

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = 1/\rho^3. \quad (3.98)$$

Ray and Reid encontraram uma integral primeira exata para o sistema (3.96–3.97) dada por

$$J = (\rho\dot{x} - \dot{\rho}x)(\rho\dot{y} - \dot{\rho}y) + \frac{xy}{\rho^2} - \int^{xy/\rho^2} \gamma(\tau) d\tau, \quad (3.99)$$

mas não obtiveram sua solução completa. No restante desta seção, será mostrado que a solução exata pode ser obtida considerando (3.96–3.97) como um sistema de Ermakov generalizado com simetria de Lie.

Primeiramente, será mostrado que o par (3.96–3.97) é, na verdade, um sistema de Ermakov generalizado. Isto é facilmente verificado tomando  $F = 0$  e  $\Omega$  uma função da forma

$$\Omega^2 = \omega^2(t) - \frac{1}{\rho^4} \gamma(xy/\rho^2). \quad (3.100)$$

Deste ponto de vista o quadrado da amplitude do momentum angular

$$I = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})^2, \quad (3.101)$$

é o invariante de Ermakov associado. A existência do invariante exato (3.101) não foi apontada por Ray e Reid [145] ou por Lutzky [146], provavelmente porque o conjunto de equações (3.96–3.97) não foi reconhecido como um sistema de Ermakov.

As equações (3.96–3.97) formam um sistema de Ermakov Hamiltoniano. O Hamiltoniano é

$$H = p_x p_y + \omega^2 xy - \frac{1}{\rho^2} \int^{xy/\rho^2} \gamma(\lambda) d\lambda, \quad (3.102)$$

que não é uma constante de movimento exata, já que o sistema não é conservativo.

A frequência (3.100) é da forma adequada fornecida pela condição (3.80), o que garante a invariância das equações (3.96–3.97). O uso da equação auxiliar (3.98) para substituir  $\omega(t)$  transforma  $\Omega$  em

$$\Omega^2 = -\frac{d\dot{\rho}}{\rho} + \frac{1}{\rho^4}(1 - \gamma(xy/\rho^2)), \quad (3.103)$$

que é, de fato, da forma geral expressa na relação (3.80).

A estrutura Hamiltoniana e a simetria podem ser exploradas para reduzir o problema a quadraturas. Com este intento, o uso de coordenadas canônicas do grupo,

$$u = x/\rho, \quad v = y/\rho, \quad T = \int \rho^{-2} dt, \quad (3.104)$$

é um artifício essencial, com o qual  $G_\rho$  representa meramente translações temporais, ou seja,  $G_\rho = \partial/\partial T$ . Nestas novas variáveis, as equações de movimento passam a ser dadas pelo sistema autônomo

$$u'' + u = u\gamma(uv), \quad v'' + v = v\gamma(uv), \quad (3.105)$$

onde a linha denota derivada frente ao novo parâmetro temporal. O sistema é descrito pela Hamiltoniana autônoma

$$K = p_u p_v + uv - \int^{uv} \gamma(\lambda) d\lambda, \quad (3.106)$$

que é a versão transformada da integral primeira  $J$  dada pela fórmula (3.99). A Hamiltoniana  $K$  nas coordenadas canônicas de grupo é quadrática nas componentes do momentum. Nestes casos, como será visto em detalhe no capítulo 4, as variáveis apropriadas para quadratura são

$$s = uv, \quad \phi = \arctan(v/u). \quad (3.107)$$

Nestas coordenadas, as constantes de movimento exatas tornam-se

$$\sqrt{2I} = s \phi' / (\sin \phi \cos \phi), \quad (3.108)$$

$$J = (s'^2 - 2I)/4s + s - \int^s \gamma(\lambda) d\lambda. \quad (3.109)$$

A quadratura destas últimas duas equações fornece sucessivamente  $s(T)$  and  $\phi(T)$ . Para obter a solução nas variáveis originais basta utilizar as relações algébricas

$$x^2 = \rho^2 s / \tan \phi, \quad y^2 = \rho^2 s \tan \phi, \quad (3.110)$$

para encontrar  $(x, y)$  em termos de  $(s, \phi)$ . A etapa final é a determinação de  $T(t)$  obtida da última equação em (3.104). Em termos de quadraturas, isto completa o processo de integração. Pressupõe-se o conhecimento de uma solução particular  $\rho(t)$  para a equação de Pinney, sem o que não se pode definir a troca de parâmetro temporal  $t \mapsto T(t)$ . A estrutura necessária para a integração e a escolha correta de variáveis foram obtidas graças ao caráter Hamiltoniano, ao reconhecimento do sistema ser um sistema de Ermakov generalizado e à presença de simetria. Em particular, a forma analítica da solução pode ser obtida explicitamente em termos de funções elípticas quando  $\gamma(\lambda) = c_1/\lambda^2 + c_2 + c_3\lambda + c_4\lambda^2$ , onde  $c_i$  são constantes arbitrárias. No capítulo 4, será vista com maior detalhe a questão do caráter Hamiltoniano dos sistemas de Ermakov generalizados.

### 3.3 Generalizações adicionais dos sistemas de Ermakov

Na sua formulação original, conforme discutido no capítulo introdutório, o sistema de Ermakov era dado tão somente pela equação do OHDT acoplado à equação de Pinney. Mais tarde, Ray e Reid [25] estenderam o conceito básico de sistema de Ermakov pela

incorporação de duas funções arbitrárias extras às equações originais. Esta generalização aumentou grandemente a potencialidade dos sistemas de Ermakov sem prejuízo de sua propriedade essencial, a saber a existência de uma constante de movimento exata, o invariante de Ermakov associado. Em ambas as formulações mencionadas, o sistema de Ermakov contém frequências dependentes apenas do tempo. Numa generalização subsequente [52], as variáveis dinâmicas passaram a ser possíveis argumentos da frequência. Os sistemas de Ermakov generalizados resultantes possuem propriedades formais interessantes, bem como aplicações relevantes. No entanto, os sistemas de Ermakov generalizados ainda permanecem largamente inexplorados. Neste trabalho, já se teve a oportunidade de evidenciar alguns dos atributos extras dos sistemas de Ermakov generalizados, quais sejam a possível linearização em casos especiais (seção 2.2) e a estrutura de seu grupo de simetrias de Lie (seção 3.2). Torna-se claro que a busca de extensões para o sistema de Ermakov é uma estratégia que fornece bons resultados.

As generalizações por incorporação de novas funções arbitrárias ou pela admissão de frequências mais complexas são pautadas pela preservação do invariante de Ermakov e da lei de superposição não linear associada. Entretanto, embora a existência de uma lei de superposição não linear seja um dos atributos básicos dos sistemas de Ermakov, outras propriedades formais são de importância também. Por exemplo, como foi visto, os sistemas de ELR  $R$  possuem o grupo de simetrias  $SL(2, R)$ . Esta propriedade foi utilizada como ponto de partida por Leach [74] na sua extensão dos sistemas de Ermakov a dimensão arbitrária. Dado que qualquer extensão dos sistemas de Ermakov tem grande probabilidade de levar a resultados novos interessantes, é importante explorar todas as alternativas possíveis. Entre estas, encontram-se as extensões baseadas no critério da estrutura do grupo de simetrias. As diferentes extensões não são, necessariamente, equivalentes. Por exemplo, como foi visto, nem todos os sistemas de Ermakov generalizados, com frequência dependente das variáveis dinâmicas, possuem simetrias de Lie geométricas. Assim, uma extensão baseada no critério da estrutura de grupo exclui todos os sistemas de dimensionalidade menor que não possuem simetrias de Lie geométricas. Mesmo assim, os sistemas estendidos desta maneira contém em si alguma das propriedades que distinguem os sistemas de Ermakov de baixa dimensionalidade.

Outro tipo de extensão fundamenta-se na teoria de Sarlet para sistemas com lei de superposição não linear, vista na seção 2.1. Ou seja, obtém-se sistemas que são mais gerais do que o sistema de Ermakov postulando a existência de um invariante exato que possa ser expresso segundo a equação (2.29). Em particular, com esta abordagem é possível

obter sistemas na forma (2.33–2.34), que contém os sistemas de Ermakov generalizados (1.23–1.24) como um caso limite. Este tipo de extensão tem como ponto de partida a propriedade de preservar a lei de superposição não linear inerente aos sistemas de Ermakov usuais. Não é preciso dizer que não necessariamente os sistemas assim obtidos possuem simetrias de Lie.

Extender os sistemas de Ermakov só é possível através de uma caracterização adequada de suas propriedades. Neste sentido, a busca de extensões incentiva um melhor entendimento dos sistemas de Ermakov. Além disso, sempre deve-se ter em mente possíveis aplicações físicas dos sistemas de Ermakov extendidos. Devido a todos estes motivos, esta seção direciona-se a uma análise de diversas extensões propostas para os sistemas de Ermakov. Vários tipos de extensão são concebíveis. No caso da extensão dos sistemas de ELRR (1.16–1.17) para os sistemas de Ermakov generalizados (1.23–1.24), foi permitida uma dependência mais ampla das funções presentes nas equações de movimento. Também é possível que as equações de movimento sejam modificadas pela incorporação de novos termos. Finalmente, extensões multidimensionais ou mesmo de dimensionalidade infinita são alternativas que devem ser consideradas. Nesta seção, todas estas possibilidades são analisadas, com início na teoria de Leach [74] dos sistemas de Ermakov multidimensionais.

A teoria de Leach parte do fato de que o grupo de simetrias dos sistemas de ELRR, após eliminação da frequência pela transformação (3.89), é o  $SL(2, R)$ . Com base nisso, se propõe como *definir* sistemas de Ermakov como sendo os sistemas dinâmicos cuja simetria associada é fornecida pelo  $SL(2, R)$ . O conceito tem o mérito de conter uma receita simples para obter sistemas de Ermakov multidimensionais, os quais seriam, por definição, invariantes sob o  $SL(2, R)$ .

Para obter explicitamente os sistemas de equações de segunda ordem invariantes sob o  $SL(2, R)$ , é necessário seguir uma estratégia inversa a usualmente adotada na aplicação de simetrias de Lie. Ou seja, ao invés de se buscar o grupo de simetrias de um sistema, se busca o sistema invariante sob um dado grupo. No caso, o grupo é o  $SL(2, R)$ , cujos geradores estão dados nas fórmulas (3.92–3.94). Será mostrado em detalhe o procedimento a seguir no caso de um sistema dinâmico composto por duas equações de primeira e segunda ordem, na forma genérica

$$N_1 = \ddot{x} - A(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = 0, \quad (3.111)$$

$$N_2 = \ddot{y} - B(x, y, \dot{x}, \dot{y}, t) = 0, \quad (3.112)$$

onde  $A$  e  $B$  são, inicialmente, funções arbitrárias. A questão que se põe é qual é a forma

mais geral possível de  $A$  e  $B$  para que haja simetria  $SL(2, R)$ .

Uma observação inicial é de que é necessária invariância sob os três geradores  $G_i$ , com  $i = 1, 2, 3$ , nas relações (3.92–3.94), separadamente. Com isto, e levando em conta o estabelecido na seção 3.1, invariância sob o  $SL(2, R)$  acarreta

$$\left(G_i^{[2]} \mathbf{N}\right)_{\mathbf{N}=0} = 0 \quad , \quad i = 1, 2, 3 \quad , \quad (3.113)$$

onde  $\mathbf{N} = (N_1, N_2)$ . A condição (3.113) resulta numa série de equações parciais para  $A$  e  $B$  no sistema (3.111–3.112).

Invariância sob  $G_1$ , o u seja, sob translações temporais, acarreta que nem  $A$  nem  $B$  podem depender do tempo. Para obter as implicações da invariância sob  $G_2$ , que corresponde à transformações de auto-similaridade, é necessária a segunda extensão

$$G_2^{[2]} = G_2 - \dot{x} \frac{\partial}{\partial \dot{x}} - \dot{y} \frac{\partial}{\partial \dot{y}} - 3\ddot{x} \frac{\partial}{\partial \ddot{x}} - 3y\ddot{x} \frac{\partial}{\partial \ddot{y}} \quad , \quad (3.114)$$

que é deduzida via (3.60). Usando (3.114) em (3.113), vem que

$$\left(G_2^{[2]} N_1\right)_{\mathbf{N}=0} = -3A - x \frac{\partial A}{\partial x} - y \frac{\partial A}{\partial y} + \dot{x} \frac{\partial A}{\partial \dot{x}} + \dot{y} \frac{\partial A}{\partial \dot{y}} = 0 \quad . \quad (3.115)$$

A solução geral desta equação parcial linear, pelo método das características, é fornecida por

$$A = \frac{1}{yx^2} \bar{f}(y/x, x\dot{x}, y\dot{y}) \quad , \quad (3.116)$$

onde  $\bar{f}$  é uma função arbitrária dos argumentos indicados. De modo similar, encontra-se

$$B = \frac{1}{xy^2} \bar{g}(x/y, x\dot{x}, y\dot{y}) \quad , \quad (3.117)$$

sendo  $\bar{g}$  uma função arbitrária dos argumentos indicados. Isto completa a derivação das equações invariantes sob  $G_1$  e  $G_2$ , isto é, sob translações temporais e transformações de auto-similaridade. O sistema invariante é dado por (3.111–3.112), sendo  $A$  e  $B$  dados pelas expressões (3.116–3.117).

Para finalizar a derivação dos sistemas com simetria  $SL(2, R)$  bidimensionais, falta considerar invariância sob  $G_3$ , que gera transformações conformes. A segunda extensão é

$$G_3^{[2]} = G_3 + (x - t\dot{x}) \frac{\partial}{\partial \dot{x}} + (y - t\dot{y}) \frac{\partial}{\partial \dot{y}} - 3t\ddot{x} \frac{\partial}{\partial \ddot{x}} - 3t\dot{y} \frac{\partial}{\partial \ddot{y}} \quad . \quad (3.118)$$

Com isto e (3.116), mostra-se que

$$\left(G_3^{[2]} N_1\right)_{\mathbf{N}=0} = 0 \quad (3.119)$$

implica

$$\frac{\partial \bar{f}}{\partial v} + u^2 \frac{\partial \bar{f}}{\partial w} = 0, \quad (3.120)$$

onde

$$u = y/x \quad , \quad v = x\dot{x} \quad , \quad w = y\dot{y} \quad . \quad (3.121)$$

A solução de (3.120) é  $\bar{f} = f(u, w/u - uv)$  ou, em termos das variáveis originais,

$$\bar{f} = f(y/x, x\dot{y} - y\dot{x}), \quad (3.122)$$

onde  $f$  é arbitrária. De modo semelhante, obtém-se

$$\bar{g} = g(x/y, x\dot{y} - y\dot{x}), \quad (3.123)$$

para  $g$  arbitrária.

Levando em conta todos os resultados, conclui-se que a classe mais geral possível de sistemas invariantes sob o  $SL(2, R)$  a duas dimensões é dada por

$$\ddot{x} = \frac{1}{yx^2} f(y/x, x\dot{y} - y\dot{x}), \quad (3.124)$$

$$\ddot{y} = \frac{1}{xy^2} g(x/y, x\dot{y} - y\dot{x}). \quad (3.125)$$

No caso em que  $f = f(y/x)$  e  $g = g(x/y)$ , recai-se no sistema de ELRR usual com frequência zero. Este resultado pode ser facilmente compreendido levando em conta que o grupo de simetrias do sistema de ELRR, após remoção da frequência via (3.89), é o  $SL(2, R)$ . Entretanto, para  $f$  e  $g$  arbitrários em (3.124–3.125), obtém-se sistemas dinâmicos mais gerais do que simplesmente os sistemas de ELRR. Em particular, é possível uma dependência nas velocidades.

O procedimento utilizado para obter extensões dos sistemas de Ermakov a duas dimensões pode ser facilmente transportado à dimensão arbitrária. Por exemplo, a três dimensões, pode-se definir sistemas de Ermakov estendidos como sendo aqueles sistemas invariantes sob os geradores

$$G_1 = \partial/\partial t, \quad (3.126)$$

$$G_2 = 2t\partial/\partial t + r\partial/\partial r, \quad (3.127)$$

$$G_3 = t^2\partial/\partial t + tr\partial/\partial r \quad (3.128)$$

do  $SL(2, R)$  a três dimensões. Acima,  $r$  é a variável radial utilizada na definição das coordenadas esféricas,  $x = r \cos \phi \sin \theta$ ,  $y = r \sin \phi \sin \theta$ ,  $z = r \cos \theta$ . Verifica-se que os

geradores (3.126–3.128) possuem, de fato, as relações de comutação (3.95) do  $SL(2, R)$ . Seguindo o mesmo procedimento utilizado no caso bidimensional, verifica-se [74, 112] que, em coordenadas esféricas, a forma dos sistemas invariantes sob o  $SL(2, R)$  a três dimensões é dada por

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = r^{-3} f(\theta, \phi, r^2 \dot{\theta}, r^2 \dot{\phi}), \quad (3.129)$$

$$r\ddot{\phi} \sin \theta + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\theta}\dot{\phi} \cos \theta = r^{-3} g(\theta, \phi, r^2 \dot{\theta}, r^2 \dot{\phi}), \quad (3.130)$$

$$r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \sin \theta \cos \theta = r^{-3} h(\theta, \phi, r^2 \dot{\theta}, r^2 \dot{\phi}), \quad (3.131)$$

sendo  $f, g$  e  $h$  funções arbitrárias dos seus argumentos.

Um exemplo relevante de sistema que pode ser posto na forma (3.129–3.131) de um sistema de Ermakov tridimensional é o sistema de uma partícula carregada sob ação de um monopolo magnético fixo na origem. A equação clássica correspondente é dada por

$$\ddot{\mathbf{q}} = \gamma \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{q} / r^3, \quad (3.132)$$

onde  $\gamma$  é uma constante positiva proporcional à carga positiva e  $\mathbf{q} = r\hat{r}$  é o vetor posição, sendo  $\hat{r}$  o versor radial. Para colocar a equação de Lorentz (3.132) na forma de Ermakov tridimensional, basta tomar

$$f = 0 \quad , \quad g = -\gamma r^2 \dot{\theta} \quad , \quad h = \gamma r^2 \dot{\phi} \sin \theta \quad (3.133)$$

nas fórmulas (3.129–3.131). A equação de Lorentz (3.132) possui também invariância sob rotações, daí decorrendo sua integrabilidade [112]. De modo geral, entretanto, os sistemas de Ermakov estendidos (3.129–3.131) não são exatamente solúveis. Isto contrasta com a extensão bidimensional (3.124–3.125), a qual, como pode ser demonstrado [113, 114], é exatamente solúvel. Mais tarde, no capítulo 5, será analisada com maior detalhe a estrutura do grupo de simetrias de problemas envolvendo um monopolo magnético.

Tendo sido apresentada a abordagem de Leach de extensão multidimensional dos sistemas de Ermakov, restam alguns comentários por fazer. Sem dúvida, a abordagem baseada no critério de invariância frente ao  $SL(2, R)$  tem o mérito da simplicidade, sendo facilmente implementada. Além disso, os sistemas de Ermakov estendidos obtidos, por construção, retêm uma das características básicas dos sistemas de ELRR, qual seja, o mesmo grupo de simetrias. Entretanto, também por construção a abordagem não contempla a totalidade dos sistemas de Ermakov generalizados. De fato, como foi visto na seção anterior, os sistemas de Ermakov generalizados não necessariamente possuem

simetrias de Lie. Além disso, quando há simetria, esta não necessariamente é a simetria  $SL(2, R)$ . Por este motivo, o critério de Leach, apesar de levar a resultados interessantes, não pode ser considerado universal. Uma outra alternativa ainda não considerada na literatura é a de procurar sistemas de equações parciais de uma dada ordem com a simetria  $SL(2, R)$ . Com isto, seriam obtidos sistemas de Ermakov na acepção de Leach com um número infinito de graus de liberdade.

Ray e Reid [45] [71] também obtiveram generalizações do sistema de Ermakov usando uma abordagem baseada em simetrias de Lie. Entretanto, ao invés de procurarem as equações de movimento que possuem um certo grupo de simetrias de Lie, Ray e Reid buscaram as equações de movimento mais gerais da forma

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = A(x, t) \quad (3.134)$$

possuindo simetrias de Lie geométricas. O gerador associado é fornecido por

$$G = \tau(x, t) \frac{\partial}{\partial t} + \eta(x, t) \frac{\partial}{\partial x}. \quad (3.135)$$

Note-se que a formulação é intrinsecamente unidimensional. Na equação (3.134), a função  $A(x, t)$  é arbitrária, porém assumidamente não contém termos lineares na posição. Ou seja, a dependência linear já está contida no termo com a frequência  $\omega(t)$ . A abordagem de Ray e Reid tem inspiração no fato do sistema de Ermakov ser remanescente do OHDT, que é o caso limite da equação (3.134) quando  $A = 0$ .

Seguindo sua proposta, Ray e Reid obtiveram [45] [71] a equação de movimento

$$\ddot{x} + \omega^2(t)x = \frac{1}{yx^2} \exp\left(3\alpha \int^t \frac{d\lambda}{\rho^2(\lambda)}\right) F\left(\frac{y}{x} \exp\left(\alpha \int^t \frac{d\lambda}{\rho^2(\lambda)}\right)\right), \quad (3.136)$$

onde  $F$  é uma função arbitrária do argumento indicado,  $\alpha$  é uma constante e  $y$  é uma variável auxiliar satisfazendo a equação de Pinney,

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = k/\rho^3 \quad , \quad k = cte. \quad (3.137)$$

O gerador de simetrias geométricas associado é dado por

$$G = y^2 \frac{\partial}{\partial t} + (y\dot{y} + \alpha)x \frac{\partial}{\partial x}. \quad (3.138)$$

Portanto, as equações mais gerais possíveis na forma (3.134) com simetrias de Lie geométricas são fornecidas pela expressão (3.136), com gerador (3.138).

Algumas observações devem ser feitas. Por um lado, o par (3.136–3.137) representa uma modificação de um sistema de ELRR, o qual é obtido tomando  $\alpha = 0$ . Entretanto, a segunda equação do par de Ermakov é mais geral do que a equação de Pinney. Por outro lado, é interessante notar que a equação auxiliar (3.137) foi encontrada seguindo uma estratégia dedutiva. Frequentemente, como na técnica de Ermakov mencionada no capítulo introdutório, se postula a forma da equação auxiliar. A partir daí, procura-se uma constante de movimento exata recorrendo diretamente ao par de equações. Na abordagem de Ray e Reid, entretanto, a equação auxiliar é decorrente da imposição de invariância sob um grupo de simetrias. Entretanto, o método de Lie não leva diretamente a uma constante de movimento exata. Possivelmente devido a este fato, Ray e Reid buscaram uma constante de movimento exata para o sistema (3.136–3.137) eliminando a frequência, no estilo do método de Ermakov. Com isto, chegaram à integral primeira exata

$$I = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})^2 + \frac{k}{2}(x/y)^2 + \int \frac{dt}{x^2}(\dot{y}x - y\dot{x}) \exp\left(3\alpha \int^t \frac{d\tilde{t}}{y^2(\tilde{t})}\right) F\left(\frac{y}{x} \exp\left(\alpha \int^t \frac{d\tilde{t}}{y^2(\tilde{t})}\right)\right). \quad (3.139)$$

Como apontado por Ray e Reid, a constante de movimento exata (3.139) apresenta o defeito óbvio de ser não local. Isto é, para obtê-la explicitamente é necessário primeiramente calcular as trajetórias exatas  $x(t)$  e  $y(t)$ , para então calcular a integral no lado direito da expressão (3.139). Claramente, este problema reduz drasticamente a utilidade do invariante exato. Resta, então, a alternativa de buscar uma integral primeira exata para o par (3.136–3.137) seguindo algum outro método. Devido a existência de uma simetria de Lie subjacente, o método de Lie se apresenta como o mais indicado. Entretanto, esta alternativa não foi explorada por Ray e Reid, sendo desenvolvida na seqüência.

Seguindo o método de Lie, como foi estabelecido na seção 3.1, procura-se uma constante de movimento exata  $I(x, \dot{x}, t)$  que satisfaça a condição (3.67). Ou seja, procura-se uma constante de movimento exata invariante sob a primeira extensão do gerador (3.138). A primeira extensão é

$$G^{[1]} = G + ((-y\dot{y} + \alpha)\dot{x} + (y\ddot{y} + \dot{y}^2)x) \frac{\partial}{\partial \dot{x}}. \quad (3.140)$$

O requerimento

$$G^{[1]}I = 0 \quad (3.141)$$

leva a

$$I = I(u, u'), \quad (3.142)$$

onde as variáveis  $x$  e  $y$  e  $u$  e  $u'$  são dadas por

$$u = \frac{x}{y} \exp\left(-\alpha \int^t \frac{d\lambda}{y^2(\lambda)}\right), \quad u' = (y\dot{x} - x\dot{y}) \exp\left(-\alpha \int^t \frac{d\lambda}{y^2(\lambda)}\right). \quad (3.143)$$

Se verifica diretamente que o invariante (3.142) de fato satisfaz a condição (3.141).

Impondo que  $I$  dado na equação (3.142) seja uma constante de movimento exata para o sistema (3.136–3.137), encontra-se a equação parcial

$$(u' - \alpha u) \frac{\partial I}{\partial u} + (-\alpha u' - ku + u^{-2}F(u^{-1})) \frac{\partial I}{\partial u'} = 0. \quad (3.144)$$

A solução geral é uma função arbitrária da constante de integração associada à equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$du'/du = (-\alpha u' - ku + u^{-2}F(u^{-1})) / (u' - \alpha u). \quad (3.145)$$

Quando  $\alpha = 0$ , esta equação é integrável, daí resultando a constante de movimento exata

$$I = u'^2/2 + k \int^{1/u} F(\lambda) d\lambda, \quad \alpha = 0. \quad (3.146)$$

Utilizando as expressões em (3.143) no caso particular em que  $\alpha = 0$ , conclui-se que a equação fornece o invariante exato usual associado ao sistema de Ermakov cujo segundo membro é a equação de Pinney. Entretanto, se  $\alpha \neq 0$  a equação (3.145) é genericamente não integrável. Isto não exclui a possível existência de solução exata para funções  $F$  particulares.

Pode-se tirar algumas lições da abordagem acima. Fica explícito que pode ser difícil aplicar o método de Lie para constantes de movimento exatas. A situação é diferente no tocante ao método de simetrias de Noether, considerado nos capítulos 4 e 5. Neste método, deduzem-se simultaneamente as simetrias e as constantes de movimento exatas associadas, de modo direto. Entretanto, o método de Noether requer uma formulação variacional para as equações de movimento. Além disso, mesmo havendo formulação variacional, o grupo de simetrias de Noether é apenas um subgrupo do grupo mais amplo das simetrias de Lie. Estes tópicos serão discutidos com maior detalhe nos próximos capítulos.

A questão de como estender o conceito de sistema de Ermakov para o caso de infinitos graus de liberdade ainda está bastante aberta. De fato, presentemente existem apenas algumas poucas formulações de sistemas de Ermakov em termos de equações diferenciais parciais. Dentre estas, destaca-se o sistema introduzido por Ray [147],

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} + \omega^2 \varphi = \frac{1}{\psi^3} \sin(\varphi/\psi), \quad (3.147)$$

onde a função  $\psi(x, t)$  satisfaz a equação auxiliar

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \omega^2 \psi = 0 \quad (3.148)$$

e  $\omega$  é uma função arbitrária de  $\varphi, \psi$ , suas derivadas,  $x$  e  $t$ . Ray denominou o sistema acima de sistema de Ermakov multidimensional. No caso particular em que  $\omega = 0$  e  $\psi = 1$ , a equação (3.147) reduz-se à equação de seno-Gordon, a qual possui soluções do tipo sóliton. Para  $\omega$  constante, Ray [147] obteve soluções do tipo onda solitária para o sistema (3.147–3.148). Mais tarde, Siermak [148] tomou outras escolhas de  $\omega$  no mesmo sistema (3.147–3.148), obtendo, assim, soluções do tipo “kink”. Finalmente, Rogers et al. [149] propuseram a incorporação de uma variável espacial extra no sistema (3.147–3.148). Com isto, obtiveram certos sistemas de Ermakov  $(2 + 1)$  dimensionais. Nestas análises, não está esclarecido se o sistema (3.147–3.148) tem soluções do tipo sóliton. Outras extensões de sistemas de Ermakov com número infinito de graus de liberdade podem ser encontradas em [33]–[35], [127], [150] e [151].

São concebíveis outras extensões dos sistemas de Ermakov. Kaushal e colaboradores, numa série de trabalhos [83], [106, 107], obtiveram certos sistemas bi e tridimensionais com invariantes exatos que recaem nos sistemas de Ermakov em casos particulares. Estes sistemas, obtidos pelos métodos direto e de álgebra dinâmica (ver capítulo 1), se notabilizam por fazer parte dos poucos sistemas de dimensão maior que um com constantes de movimento exatas. Entretanto, ainda está por ser feita uma análise mais profunda de seus atributos básicos. Em particular, para que se qualifiquem como sistemas de Ermakov, na nossa opinião é necessário que ao menos uma das propriedades de linearização, lei de superposição não linear ou de simetria de Lie esteja presente. Sem qualquer destas propriedades, torna-se difícil denominar os sistemas de Kaushal e colaboradores de sistemas de Ermakov estendidos, na acepção correta do termo. Finalmente, além destas generalizações, pode-se mencionar certas versões discretas [171] de sistemas de Ermakov, nas quais o parâmetro temporal assume apenas valores discretos.

## Capítulo 4

### SISTEMAS DE ERMAKOV HAMILTONIANOS

Desde o advento da mecânica quântica, as formulações Hamiltonianas tem desempenhado um papel crucial na física teórica. Mais recentemente, descobriu-se a estrutura Hamiltoniana de um grande número de modelos. Entre estes, pode-se citar a equação de Korteweg–de Vries [152], a magnetohidrodinâmica [153], as equações de Vlasov–Poisson e Vlasov–Maxwell [153], a mecânica dos fluidos em diversas aproximações [153], certos modelos biológicos de competição entre espécies [154] ou de disseminação de epidemias [155] e a dinâmica de raios na ótica de meios axisimétricos [156]. Tanto interesse origina-se na utilidade das descrições Hamiltonianas nos mais diversos contextos, tais como na análise da estabilidade não linear dos pontos críticos de sistemas dinâmicos ou na construção de teorias de perturbação. Quanto a este último tópico, os métodos Hamiltonianos foram fundamentais na busca da simplificação das teorias de perturbação na mecânica celeste. Para uma discussão mais completa das aplicações dos métodos Hamiltonianos, pode-se consultar [9]. Do ponto de vista da integrabilidade dos sistemas dinâmicos, os sistemas Hamiltonianos são especiais. Pelo teorema de Liouville–Arnold [110], a existência de apenas  $N$  integrais primeiras exatas em involução assegura a integrabilidade completa dos sistemas Hamiltonianos com espaço de fase  $2N$  dimensional. No caso dos sistemas dinâmicos  $2N$  dimensionais não Hamiltonianos, são necessárias  $2N - 1$  leis de conservação.

No enunciado do teorema de Liouville–Arnold, faz-se menção ao conceito de involução. Entende-se que duas funções  $F$  e  $G$  definidas no espaço de fase estão em involução quando

$$\{F, G\} = 0, \quad (4.1)$$

sendo  $\{, \}$  o colchete de Poisson subjacente à descrição Hamiltoniana. No caso usual, o colchete de Poisson entre duas funções  $F$  e  $G$  é dado por

$$\{F, G\} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial F}{\partial q_i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial G}{\partial q_i} \frac{\partial F}{\partial p_i} \right), \quad (4.2)$$

onde  $q_i$  e  $p_i$  são as posições e os momenta canonicamente conjugados.

É possível ampliar a definição de colchete de Poisson, preservando suas propriedades algébricas básicas. Com isto, obtém-se as chamadas formulações Hamiltonianas generalizadas [9]. Entretanto, neste capítulo a equação (4.2) será tomada como a definição de colchete de Poisson. Finalmente, no teorema de Liouville-Arnold, também se exige que os  $n$  invariantes exatos tenham superfícies de nível compactas no espaço de fase. Esta condição técnica, no entanto, não será de importância vital no presente tratamento.

Com motivação na relevância das formulações Hamiltonianas nos aspectos apontados, este capítulo dedica-se a obter formulações Hamiltonianas para sistemas de Ermakov. Na seção 4.1, obtém-se uma descrição Hamiltoniana adequada a uma certa classe de sistemas de Ermakov. A seção 4.2 contém alguns sistemas relevantes que recaem na forma derivada na seção 4.1, que são um sistema de Calogero descrevendo uma interação entre três corpos e um sistema apresentando simetria dinâmica. Na seção 4.3, buscam-se simetrias de Noether para a classe de sistemas de Ermakov generalizados Hamiltonianos. O objetivo é procurar uma segunda constante de movimento exata, que, juntamente com o invariante de Ermakov, garanta integrabilidade completa, de acordo com o teorema de Liouville-Arnold. Finalmente, a seção 4.4 dedica-se a construção explícita da solução exata da classe de sistemas de Ermakov Hamiltonianos com simetria de Noether determinada. Obtém-se as soluções exatas clássica e quântica.

#### 4.1 Formulações Hamiltonianas para sistemas de Ermakov

Nesta seção, é considerado o problema de associar uma estrutura Hamiltoniana aos sistemas de Ermakov, considerados na sua versão generalizada, dada pelas equações (1.23–1.24). Esta abordagem diferencia-se da adotada por outros autores [157, 158], que buscam estruturas Hamiltonianas para sistemas de Ermakov com frequência dependente apenas do tempo. Os sistemas de Ermakov Hamiltonianos encontrados nesta abordagem simplificada tem aplicação em ótica [36, 37], em conexão com o estudo da propagação de feixes Gaussianos elípticos. A proposta adotada aqui, como será visto, permite a derivação de uma classe de sistemas de Ermakov bem mais ampla. Serão exibidas aplicações nos casos de um potencial de Calogero [159], descrevendo uma interação entre três corpos numa linha, e de um potencial de Hartmann [160]–[162], possuindo simetria dinâmica.

### 4.1.1 Formalismo Hamiltoniano

Como Hamiltoniana para o sistema de Ermakov generalizado (1.23–1.24), será tomada como *ansatz* a função [26]

$$H = \frac{A}{2}p_x^2 + Bp_xp_y + \frac{C}{2}p_y^2 + V(x, y, t), \quad (4.3)$$

onde  $A$ ,  $B$  e  $C$  são números tais que  $AC - B^2 \neq 0$  e  $V(x, y, t)$  é uma função potencial dependendo apenas do tempo e das variáveis espaciais. Assumidamente, o *ansatz* (4.3) não contempla forças dependentes da velocidade. Entretanto, duas classes de sistemas de Ermakov Hamiltonianas conhecidas na literatura [117, 157] são casos particulares da forma proposta.

Agora será imposto que as equações canônicas de Hamilton descrevam o sistema de Ermakov generalizado (1.23–1.24). A Hamiltoniana (4.3) gera as seguintes equações de movimento,

$$\dot{x} = Ap_x + Bp_y, \quad (4.4)$$

$$\dot{y} = Bp_x + Cp_y, \quad (4.5)$$

$$\dot{p}_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \quad (4.6)$$

$$\dot{p}_y = -\frac{\partial V}{\partial y}. \quad (4.7)$$

Este sistema de primeira ordem em  $(x, y, p_x, p_y)$  pode ser facilmente posto na forma equivalente de um sistema de segunda ordem em  $(x, y)$ ,

$$\ddot{x} + \Omega^2 x = -A\frac{\partial V}{\partial x} - B\frac{\partial V}{\partial y} + \Omega^2 x, \quad (4.8)$$

$$\ddot{y} + \Omega^2 y = -B\frac{\partial V}{\partial x} - C\frac{\partial V}{\partial y} + \Omega^2 y, \quad (4.9)$$

onde os termos proporcionais a  $\Omega^2$  foram convenientemente adicionados a ambos os lados. A comparação entre as equações (4.9) e (1.24) leva à conclusão de que as frequências admissíveis devem satisfazer

$$\Omega^2 = \frac{1}{y}\left(B\frac{\partial V}{\partial x} + C\frac{\partial V}{\partial y}\right). \quad (4.10)$$

Além disso, a comparação entre as equações (4.8) e (1.23), quando  $\Omega$  é dada pela relação (4.10), mostra que o potencial deve obedecer a equação diferencial parcial de primeira ordem linear

$$(Bx - Ay)\frac{\partial V}{\partial x} + (Cx - By)\frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{x^2}F(y/x). \quad (4.11)$$

As equações características associadas a (4.11) podem ser escritas na forma

$$\frac{dx}{Bx - Ay} = \frac{dy}{Cx - By} = \frac{x^2 dV}{F(y/x)}, \quad (4.12)$$

que possuem – como facilmente se verifica – a solução geral

$$V = \Lambda(s, t) + \frac{1}{s^2} U(y/x). \quad (4.13)$$

Aqui,  $\Lambda(s, t)$  é uma função arbitrária dos seus argumentos, onde

$$s^2 = Ay^2 - 2Bxy + Cx^2, \quad (4.14)$$

e

$$U(y/x) = \int^{y/x} F(\lambda) d\lambda \quad (4.15)$$

é uma nova função arbitrária, definida a partir de  $F(y/x)$ . Examinando a nova variável (4.14), verifica-se que, quando  $A = C = 1, B = 0$ ,  $s$  reduz-se a variável radial comumente utilizada. É conveniente também definir a função

$$\xi(\lambda) = A\lambda^2 - 2B\lambda + C, \quad (4.16)$$

de modo que  $s^2 = x^2 \xi(\lambda)$ .

Na notação convencional, o sistema de Ermakov Hamiltoniano derivado do potencial admissível é dado por

$$\ddot{x} + \frac{\kappa}{s} \frac{\partial \Lambda}{\partial s} x = \frac{1}{yx^2} \bar{f}(y/x), \quad (4.17)$$

$$\ddot{y} + \frac{\kappa}{s} \frac{\partial \Lambda}{\partial s} y = \frac{1}{xy^2} \bar{g}(x/y), \quad (4.18)$$

onde

$$\bar{f}(\lambda) = 2\kappa \frac{\lambda}{\xi^2} U(\lambda) + \frac{\lambda}{\xi} (A\lambda - B) U'(\lambda), \quad (4.19)$$

$$\bar{g}(1/\lambda) = 2\kappa \frac{\lambda^3}{\xi^2} U(\lambda) + \frac{\lambda^2}{\xi} (B\lambda - C) U'(\lambda), \quad (4.20)$$

sendo que  $U'(\lambda) = dU(\lambda)/d\lambda$  e

$$\kappa = AC - B^2. \quad (4.21)$$

O invariante de Ermakov correspondente é dado por

$$I = \frac{1}{2} ((Ay - Bx)p_x - (Cx - By)p_y)^2 + U(y/x) \quad (4.22)$$

Sobrevivem duas funções arbitrárias no sistema de Ermakov Hamiltoniano, a saber,  $\Lambda(s, t)$  e  $U(y/x)$ . Na verdade,  $\bar{f}$  and  $\bar{g}$  no sistema (4.17–4.18) são determinadas unicamente pela função homogênea  $U$ , e pode-se verificar diretamente que

$$\lambda(B\lambda - C)\frac{d\bar{f}}{d\lambda} + (C + 2B\lambda)\bar{f} = (A\lambda - B)\frac{d\bar{g}}{d\lambda} + (A + \frac{2B}{\lambda})\bar{g}. \quad (4.23)$$

É interessante comparar os resultados obtidos aqui com os da literatura. Os sistemas de Ermakov Hamiltonianos de Cerveró e Lejarreta [157] são obtidos pelo presente formalismo tomando  $A = C = 1$ ,  $B = 0$ , and  $\Lambda = \omega^2(t)s^2/2$  nas equações (4.3) e (4.13). As funções  $\bar{f}$  and  $\bar{g}$  resultantes satisfazem uma condição estabelecida em [157], a qual é precisamente a condição (4.23) especializada para os valores apropriados dos parâmetros. Este formalismo já foi utilizado no estudo da propagação de feixes elípticos Gaussianos em meios não lineares e dispersivos [36, 158]. De resto, a classe de sistemas de Ermakov com um segundo invariante exato derivada por Goedert [117] é Hamiltoniana e derivável do presente formalismo. Neste caso, a escolha adequada é  $A = C = 0$ ,  $B = 1$  e  $\Lambda = \Lambda(s)$ . É desnecessário dizer que as funções  $\bar{f}$  e  $\bar{g}$  resultantes desta prescrição satisfazem a condição de integrabilidade exposta em [117].

De acordo com o teorema de Liouville-Arnold, sistemas Hamiltonianos  $2n$ -dimensionais possuindo  $n$  constantes de movimento exatas independentes em involução com superfícies de nível compactas, são integráveis por quadraturas [110]. Para estes sistemas, o movimento é quasi-periódico e restrito a um toro  $N$ -dimensional. Se a Hamiltoniana não depender do tempo, a presente classe de sistemas de Ermakov Hamiltonianos possui de modo imediato duas constantes de movimento exatas em involução. De fato, neste caso, a própria função  $H$  é uma constante de movimento exata independente do invariante de Ermakov. Assim, quando a função  $\Lambda(s, t)$ , que é a fonte da dependência temporal do Hamiltoniano, não contém  $t$ , é de se esperar que o problema seja completamente integrável. Na realidade, as superfícies de nível  $H = \text{const.}$  e  $I = \text{const.}$  não são compactas, mas as equações de movimento são redutíveis a quadratura. Conseqüentemente, o sistema de Ermakov Hamiltoniano tratado aqui pode ser incluído na classe não trivial de sistemas de Ermakov exatamente solúveis, à qual pertencem, por exemplo, alguns sistemas analisados por Govinder e Leach [114], os quais consideraram freqüências dependentes apenas do tempo. Uma outra classe de sistemas de Ermakov Hamiltoniana exatamente solúvel será considerada na seção 4.2. Esta nova classe é explicitamente dependente do tempo, e possui solução exata devido à existência de uma simetria de Noether subjacente.

O formalismo Hamiltoniano pode ser usado para resolver elegantemente as equações de

movimento. Claramente, as coordenadas  $(x, y)$  não são as mais adequadas ao problema. Sejam as novas coordenadas  $(s, \phi)$ , onde  $s$  já foi definida através da equação (4.14) e

$$\phi = \arctan(y/x) \quad (4.24)$$

é uma variável angular. A inversa da transformação de coordenadas  $(x, y) \mapsto (s, \phi)$  é dada por

$$x^2 = \frac{s^2 \cos^2 \phi}{\zeta(\phi)}, \quad y^2 = \frac{s^2 \sin^2 \phi}{\zeta(\phi)}, \quad (4.25)$$

onde

$$\zeta(\phi) = A \sin^2 \phi - 2B \sin \phi \cos \phi + C \cos^2 \phi \quad (4.26)$$

é uma nova função. Quando  $A = C = 1, B = 0$ , obtém-se  $\zeta = 1$ . Neste caso, (4.25) reduz-se à transformação para coordenadas polares usuais.

Nas novas variáveis, a Hamiltoniana e o invariante de Ermakov adquirem uma forma mais apropriada. Para obter a Hamiltoniana (4.3) e o invariante de Ermakov (4.22) em termos das novas coordenadas, inicialmente é conveniente escrevê-los em termos de  $(x, y)$  e suas derivadas,

$$H = \frac{1}{2\kappa} (C\dot{x}^2 - 2B\dot{x}\dot{y} + A\dot{y}^2) + \Lambda(s(x, y), t) - \frac{1}{s^2(x, y)} U(y/x), \quad (4.27)$$

$$I = \frac{1}{2} (x\dot{y} - y\dot{x})^2 + U(y/x). \quad (4.28)$$

Observe-se que  $\kappa \neq 0$ , o que garante o caráter não singular da expressão de  $H$  na fórmula (4.27). Introduzindo a transformação (4.25), obtém-se

$$H = \frac{1}{2\kappa} \dot{s}^2 + \frac{I}{s^2} + \Lambda(s, t), \quad (4.29)$$

$$I = \frac{s^4 \dot{\phi}^2}{2\zeta(\phi)} + U(\tan \phi). \quad (4.30)$$

Quando  $\Lambda$  é independente do tempo,  $H$  é um segundo invariante exato. Nesta situação, pode-se proceder de um modo similar ao usado no método da energia da mecânica clássica usual [17], dividindo o problema em duas equações diferenciais ordinárias separáveis,

$$(ds/dt)^2 = 2\kappa(H - I s^{-2} - \Lambda(s)), \quad (4.31)$$

$$(d\phi/dt)^2 = 2s^{-4}(t)\zeta(\phi)(I - U(\tan \phi)). \quad (4.32)$$

As equações (4.31-4.32) podem ser sucessivamente resolvidas em termos de quadraturas fornecendo uma solução formal para o sistema de Ermakov. Na realidade, a solução da equação (4.32) requer o conhecimento de  $s(t)$ , que se obtém resolvendo (4.31).

A estrutura da equação (4.32) sugere um re-escalamento de variável temporal, da forma

$$T(t) = \int^t d\lambda/s^2(\lambda). \quad (4.33)$$

Este re-escalamento é aplicável globalmente apenas quando  $s(t)$  é positivo definida no tempo, com o que  $T(t)$  resulta monotônico. Nestas circunstâncias o sistema (4.31-4.32) torna-se

$$(ds/dT)^2 = 2\kappa s^2 (Hs^2 - I - \Lambda(s)s^2), \quad (4.34)$$

$$(d\phi/dT)^2 = 2\zeta(\phi) (I - U(\tan \phi)), \quad (4.35)$$

que é um conjunto desacoplado de equações separáveis e, desta maneira, redutível a quadraturas. Este procedimento fornece a solução geral do problema, envolvendo quatro constantes arbitrárias, a saber,  $H$ ,  $I$  e duas constantes que surgem da integração do par (4.34) e (4.35).

Uma observação interessante concernente ao presente sistema de Ermakov Hamiltoniano é a seguinte: mudar  $\Lambda(s)$  de acordo com  $\Lambda(s) \mapsto \Lambda(s) + k_1$  ou de acordo com  $\Lambda(s) \mapsto \Lambda(s) + k_2/s^2$ , onde  $k_1$  e  $k_2$  são constantes, é equivalente a mudar os valores das constantes  $H$  ou  $I$  na fórmula (4.31). Desta forma, não há modificação da natureza das integrais por perfazer. Esta transformação pode ser explorada para identificar variações de sistemas exatamente solúveis que são igualmente exatamente solúveis. Por um lado, a adição de  $k_1$  a  $\Lambda$  não leva a uma variação relevante do problema, uma vez que sua única implicação é uma mudança no valor numérico de  $H$ . Por outro lado, a adição de  $k_2/s^2$  a  $\Lambda$  implica numa mudança qualitativa no potencial sem mudança relevante nos cálculos. Apenas é necessário modificar  $I$  nas equações originais de acordo com

$$I \mapsto I + k_2. \quad (4.36)$$

Concluindo, o sistema de Ermakov Hamiltoniano autônomo foi reduzido a quadraturas. Se estas quadraturas podem ser feitas exatamente é uma questão que deve ser analisada em cada aplicação particular. Outra observação importante é concernente à lei de superposição não linear dos sistemas de Ermakov (ver seção 2.1). Em geral, esta lei de superposição é implícita no sentido em que não pode ser aplicada, devido ao acoplamento entre as equações de movimento. Para os sistemas de Ermakov Hamiltonianos derivados aqui, obtém-se as equações (4.33) e (4.35), que constituem uma lei de superposição não linear explícita. Isto é evidente, pois se constrói  $\phi(t)$  usando  $s(t)$  obtida de uma equação desacoplada, a saber, (4.31).

## 4.2 Aplicações

Nesta seção são apresentados alguns exemplos de aplicação da teoria. São analisados um potencial de Calogero e um exemplo super-integrável de potencial não central. Alguns outros potenciais que representam generalizações dos potenciais harmônico ou Coulombiano podem ser tratados de modo similar ao menos no que concerne à dinâmica bidimensional obtida por projeção em um plano apropriado. O potencial super-integrável de Hartmann e algumas de suas variações [161, 162] pertencem a esta categoria.

### 4.2.1 Um sistema de Calogero como um sistema de Ermakov Hamiltoniano

Como primeiro exemplo que ilustra o procedimento para integração do sistema de Ermakov Hamiltoniano autônomo, será considerado um potencial de Calogero [159]. O sistema associado descreve a interação de três corpos numa linha, com Hamiltoniana

$$H_C = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{\omega_0^2}{6}((x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2) + \frac{g_1}{(x_1 - x_2)^2} + \frac{g_2}{(x_2 - x_3)^2} + \frac{g_3}{(x_3 - x_1)^2}, \quad (4.37)$$

onde  $\omega_0, g_1, g_2$  e  $g_3$  são constantes não negativas. Um re-escalamento de coordenadas temporal e espacial permite tomar  $\omega_0 = 1$ . Além disso, é conveniente fazer uma transformação para coordenadas de centro de massa e de Jacobi,

$$\begin{aligned} R &= \frac{1}{3}(x_1 + x_2 + x_3), \\ x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 - x_2), \\ y &= \frac{1}{\sqrt{6}}(x_1 + x_2 - 2x_3). \end{aligned} \quad (4.38)$$

O centro de massa executa movimento livre, e a dinâmica no plano de coordenadas  $(x, y)$  é descrita pela Hamiltoniana reduzida

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + \frac{g_1}{2x^2} + \frac{2g_2}{(x - \sqrt{3}y)^2} + \frac{2g_3}{(x + \sqrt{3}y)^2}. \quad (4.39)$$

Como pode ser facilmente verificado, a Hamiltoniana reduzida (4.39) é do tipo de Ermakov. Além disso, sendo autônoma, é integrável. Os coeficientes  $A, B$  e  $C$  na equação (4.3) são, neste caso,  $A = C = 1$  e  $B = 0$ . Conseqüentemente,  $s = \sqrt{x^2 + y^2} = r$  e o potencial de Ermakov correspondente é dado por

$$V = \frac{1}{2}r^2 + \frac{1}{2r^2 \cos^2 \phi} \left( g_1 + \frac{4g_2}{(1 - \sqrt{3} \tan \phi)^2} + \frac{4g_3}{(1 + \sqrt{3} \tan \phi)^2} \right). \quad (4.40)$$

Comparando este potencial e a equação (4.13), encontra-se

$$\Lambda = r^2/2, \quad (4.41)$$

e

$$U(\lambda) = \frac{1}{2}(1 + \lambda^2) \left( g_1 + \frac{4g_2}{(1 - \sqrt{3}\lambda)^2} + \frac{4g_3}{(1 + \sqrt{3}\lambda)^2} \right). \quad (4.42)$$

A equação (4.31) pode ser resolvida analiticamente para  $\Lambda$  dada segundo a expressão (4.41), podendo-se verificar diretamente que o re-escalamento  $t \mapsto T$  é propriamente definido, ou seja,  $s(t)$  é positivo definida no tempo. O sistema de equações resultante que deve ser solucionado agora é

$$(dr/dT)^2 = r^2(2Hr^2 - 2I - r^4), \quad (4.43)$$

$$(d\phi/dT)^2 = 2I - (1 + \tan^2 \phi) \left( g_1 + \frac{4g_2}{(1 - \sqrt{3} \tan \phi)^2} + \frac{4g_3}{(1 + \sqrt{3} \tan \phi)^2} \right). \quad (4.44)$$

Para encontrar a solução  $r(\tilde{T})$ , é mais apropriado utilizar o re-escalamento  $T \mapsto \tilde{T} = \sqrt{2I}T$ , considerando que o invariante  $I$  assume valores estritamente positivos no caso do sistema de Calogero. A solução é

$$r(\tilde{T}) = \frac{2I}{H - \sqrt{H^2 - 2I} \sin(2\tilde{T} + c_1)}, \quad (4.45)$$

onde  $c_1$  é a constante de integração advinda de (4.43).

A função  $\phi(T)$  pode ser calculada em termos de funções bem conhecidas para alguns valores diferentes dos parâmetros  $g_i$ . A escolha  $g_1 = g_2 = g_3 = g$  é provavelmente a mais interessante, pois resulta numa solução em termos de funções circulares,

$$\phi(\tilde{T}) = \frac{1}{3} \sin^{-1} \left( \left( 1 - \frac{9g}{2I} \right)^{1/2} \sin(3\tilde{T} + c_2) \right), \quad (4.46)$$

onde  $c_2$  é a última constante de integração do problema.

As últimas duas equações fornecem as órbitas paramétricas do problema e são sua solução geral, envolvendo quatro constantes de integração, a saber,  $H, I, c_1$  e  $c_2$ . Esta solução está em plena concordância com os resultados de Khandekar e Lawande [163], mas foi obtida de um modo mais sistemático.

Conforme mencionado anteriormente, a adição de  $2g_4s^{-2}$  a  $\Lambda$ , onde  $g_4$  é uma constante e, aqui,  $s = r$ , não altera a forma da solução analítica. Apenas requer a modificação

$I \rightarrow I + g_4$  em todas as fórmulas. Isto prova a existência de soluções exatas para a Hamiltoniana modificada

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) + \frac{\omega_0^2}{2}(x^2 + y^2) + \frac{g_1}{2x^2} + \frac{2g_2}{(x - \sqrt{3}y)^2} + \frac{2g_3}{(x + \sqrt{3}y)^2} + \frac{g_4}{x^2 + y^2}. \quad (4.47)$$

Desta maneira, nas variáveis originais, o problema de três corpos unidimensional descrito pela Hamiltoniana

$$\begin{aligned} \bar{H}_C = & \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) + \frac{\omega_0^2}{6} \left( (x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2 \right) + \\ & \frac{g_1}{(x_1 - x_2)^2} + \frac{g_2}{(x_2 - x_3)^2} + \frac{g_3}{(x_3 - x_1)^2} + \frac{3g_4}{(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_1)^2} \end{aligned} \quad (4.48)$$

é também exatamente solúvel.  $\bar{H}_C$  pode ser vista como uma modificação integrável do sistema de Calogero. Observe-se que o termo com  $g_4$  é uma nova contribuição, que não se refere ao sistema original. Esta generalização é possível graças ao fato do sistema de Calogero possuir a estrutura de um sistema de Ermakov Hamiltoniano nas coordenadas de Jacobi.

#### 4.2.2 Um potencial com simetria dinâmica

O problema não central descrito pela Hamiltoniana

$$H = \frac{1}{2}(p_x^2 + p_y^2) - \frac{\mu_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{g_1}{y^2} + \frac{g_2 x}{y^2 \sqrt{x^2 + y^2}}, \quad (4.49)$$

onde  $\mu_0$ ,  $g_1$  e  $g_2$  são constantes positivas, possui um grupo de simetrias dinâmicas [160] e é separável em coordenadas parabólicas e polares. Extensões tridimensionais de  $H$  são sistemas super-integráveis [161], e têm recebido atenção como problemas de força não central passíveis de quantização exata pelo método das integrais de caminho [162]. Diversas outras versões bidimensionais de sistemas tridimensionais super-integráveis podem ser reduzidas a sistemas de Ermakov Hamiltonianos. Selecionou-se o Hamiltoniano (4.49) como um bom exemplo para ilustrar a técnica proposta na seção 4.1.

Um re-escalamento do tempo e do espaço permite estipular  $\mu_0 = 2$  sem qualquer perda de generalidade. Para este problema, também se tem  $s = \sqrt{x^2 + y^2} = r$ . O potencial é

$$V = -\frac{2}{r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \phi} (g_1 + g_2 \cos \phi). \quad (4.50)$$

Comparação das equações (4.50) e (4.13) mostra que neste caso

$$\Lambda(r) = -\frac{4}{r}, \quad (4.51)$$

e

$$U(\tan \phi) = \frac{1}{\sin^2 \phi} (g_1 + g_2 \cos \phi). \quad (4.52)$$

O tratamento será restrito ao caso em que  $T$  é bem definido e monotônico. Uma análise detalhada mostra que, para valores suficientemente altos do invariante de Ermakov (momentum angular suficientemente alto), as trajetórias jamais cruzam a origem. Logo, para  $I > 0$  a variável  $r$  não se anula e  $T$  é monotonicamente crescente, como se verifica diretamente pela equação (4.33). Observe-se também que, para  $I > 0$ , a condição  $r \neq 0$  é necessária para que o lado direito da equação (4.31) seja positivo, o que é necessário para a existência de soluções reais. Considerando  $I > 0$ , reduz-se o problema original ao conjunto de equações diferenciais

$$(dr/dT)^2 = 2r^2(Hr^2 + 2r - I), \quad (4.53)$$

$$(d\phi/dT)^2 = 2 \left( I - \frac{1}{\sin^2 \phi} (g_1 + g_2 \cos \phi) \right). \quad (4.54)$$

Integração direta do par (4.53–4.54) (com  $T \mapsto \tilde{T} = \sqrt{2I}T$ ) fornece as equações paramétricas

$$r(\tilde{T}) = \frac{I}{1 - \sqrt{1 + HI} \sin(\tilde{T} + c_1)}, \quad (4.55)$$

$$\cos \phi(\tilde{T}) = -\frac{g_2}{2I} \left( 1 - \sqrt{1 + 4I(I - g_1)/g_2^2} \sin(\tilde{T} + c_2) \right), \quad (4.56)$$

onde  $c_1, c_2$  são constantes de integração. Para valores negativos da energia, o movimento é confinado. Quando a energia é positiva, as trajetórias escapam para o infinito em valores finitos de  $\tilde{T}$ . Entretanto, usando a variável original  $t$ , o processo é regular, requerendo um tempo físico infinito para se desenrolar. Outra característica interessante do movimento confinado é que não é explorada a faixa total de valores do ângulo, de  $\phi = 0$  até  $\phi = 2\pi$ . Isto é evidente da relação (4.56), que implica  $\chi_- \leq \cos \phi \leq \chi_+$ , onde

$$\chi_{\mp} = -\frac{g_2}{2I} \left( 1 \pm \sqrt{1 + 4I(I - g_1)/g_2^2} \right). \quad (4.57)$$

É fácil verificar que  $\chi_+ < 1$ , correspondendo ao fato de que as trajetórias não visitam o setor do plano onde  $\phi \leq \arccos \chi_+$ . Também é claro que para valores suficientemente pequenos de  $g_2$  pode existir outro setor excluído em torno de  $\phi = \pi$ . Este é o caso quando  $\chi_- > -1$ , o que é possível se e somente se  $2I > g_2$  e  $g_1 > g_2$ .

Tal como no exemplo do potencial de Calogero, a adição de um termo do tipo  $g_3 r^{-2}$  a  $\Lambda(r)$ , onde  $g_3$  é uma nova constante, não altera os cálculos. O novo potencial exatamente solúvel é

$$V = -\frac{\mu_0}{\sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{g_1}{y^2} + \frac{g_2 x}{y^2 \sqrt{x^2 + y^2}} + \frac{g_3}{x^2 + y^2}. \quad (4.58)$$

Aqui deve-se enfatizar que o termo proporcional a  $g_3$  é novo e representa uma incorporação ao potencial original que preserva a integrabilidade exata do sistema. Novamente, isto é possível graças ao caráter Hamiltoniano deste sistema de Ermakov.

### 4.3 Teorema de Noether

Na seção anterior, derivou-se uma classe de sistemas de Ermakov com formulação Hamiltoniana. A partir daí, obteve-se a solução formal destes sistemas, desde que estes possuam Hamiltoniana independente do tempo. Neste caso, a própria Hamiltoniana é um segundo invariante exato, a ser considerado juntamente com o invariante de Ermakov. A teoria foi aplicada nos exemplos de um potencial de Calogero e de um potencial com simetria dinâmica. Uma questão natural é perguntar o que ocorre quando há dependência temporal explícita da Hamiltoniana. Há outro invariante exato? Conforme dito na introdução deste trabalho, existe uma variedade de métodos de busca de constantes de movimento exatas. A qual deles deve-se recorrer na busca de um segundo invariante exato para os sistemas de Ermakov Hamiltonianos? Certamente, a disponibilidade de uma formulação variacional (Hamiltoniana ou Lagrangiana) deve ser aproveitada. Isto privilegia a escolha do método das transformações canônicas ou do teorema de Noether. O método das transformações canônicas tem o ônus de não ser sistemático. Por esta razão, nesta seção se utilizará o teorema de Noether na busca de um segundo invariante exato para os sistemas de Ermakov Hamiltonianos. Como será visto, isto delimitará uma subclasse com simetrias de Noether, contida na classe mais geral dos sistemas de Ermakov Hamiltonianos derivada em 4.1.

O teorema de Noether relaciona transformações de simetria contínuas e quantidades conservadas de um sistema com formulação variacional [48]–[66]. No formalismo Lagrangiano, as transformações de simetria de Noether de um sistema são transformações em suas coordenadas espaciais e temporal que deixam a ação clássica invariante (a menos de uma constante). Com isto, são obtidas as mesmas equações de movimento. Sendo

$L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  a Lagrangiana do sistema e

$$S[\mathbf{q}(t)] = \int L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt \quad (4.59)$$

o funcional da ação, as simetrias de Noether impõem que

$$L(\bar{\mathbf{q}}, d\bar{\mathbf{q}}/d\bar{t}, \bar{t}) d\bar{t} = L(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t) dt + \dot{g} dt, \quad (4.60)$$

onde  $\bar{\mathbf{q}}$  e  $\bar{t}$  são as variáveis espaciais e temporal transformadas e  $\tilde{g}$  uma função apropriada.

Na sua versão mais simples, adotada aqui, o teorema de Noether considera transformações infinitesimais do tipo

$$\bar{t} = t + \varepsilon \tau(\mathbf{q}, t) \quad , \quad \bar{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \varepsilon \mathbf{n}(\mathbf{q}, t) \quad , \quad (4.61)$$

onde  $\varepsilon$  é um parâmetro infinitesimal. Frequentemente se representa [73] compactamente as transformações (4.61) por meio do gerador de simetrias  $G$ , que é o operador diferencial dado por

$$G = \tau(\mathbf{q}, t) \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{n}(\mathbf{q}, t) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}. \quad (4.62)$$

Assim, a modificação infinitesimal de qualquer função  $A(\mathbf{q}, t)$  induzida pelas transformações (4.61) é dada por

$$A(\bar{\mathbf{q}}, \bar{t}) = A(\mathbf{q}, t) + \varepsilon GA(\mathbf{q}, t). \quad (4.63)$$

O gerador de simetrias de Noether foi introduzido de modo análogo ao gerador de simetrias de Lie definido no capítulo 3.

Nas equações (4.61) e (4.62), supõe-se que as transformações dependem apenas das posições e do tempo, e não das velocidades. Este tipo de transformação é chamada de geométrica ou puntual. Para estas transformações, a condição (4.60) expressa-se de acordo com

$$\tau \frac{\partial L}{\partial t} + \mathbf{n} \cdot \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} + (\dot{\mathbf{n}} - \dot{\tau} \dot{\mathbf{q}}) \cdot \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} + \dot{\tau} L = \dot{g}(\mathbf{q}, t), \quad (4.64)$$

sendo  $g(\mathbf{q}, t)$  uma função apropriada, relacionada com  $\tilde{g}$  por  $\tilde{g} = \varepsilon g$ . A relação (4.64), para uma Lagrangiana dada, é um polinômio nas diversas potências de  $\dot{q}_i$ , a ser identicamente satisfeito. Isto resulta numa série de equações parciais que, quando resolvidas, permitem a obtenção das simetrias de Noether geométricas para a Lagrangiana. Estas transformações formam um grupo contínuo (o grupo de Noether), que é um subgrupo do grupo das simetrias de Lie associadas às equações de movimento. De fato, o grupo de simetrias

de Noether não apenas preserva a forma das equações de movimento. Em acréscimo, as transformações de Noether modificam o funcional da ação no máximo pela adição de um valor constante. Nas referências [62, 143], acham-se exemplos que mostram grupos de Noether como subgrupos do grupo de simetrias de Lie.

O teorema de Noether permite obter, associada a cada transformação de simetria, uma quantidade conservada, dada por

$$J = \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \dot{\mathbf{q}} - L \right) \tau - \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \cdot \mathbf{n} + g. \quad (4.65)$$

Em geral, as quantidades conservadas obtidas da fórmula (4.65) não são todas funcionalmente independentes. As aplicações físicas mais relevantes e conhecidas são a conservação da energia associada a invariância frente a translações temporais, a conservação do momentum linear associada a translações espaciais e a conservação do momentum angular associada a rotações.

O teorema de Liouville-Arnold [110] garante a integrabilidade completa dos sistemas Hamiltonianos com espaço de fase  $2n$ -dimensional e  $n$  constantes de movimento exatas em involução. No caso dos sistemas de Ermakov Hamiltonianos, portanto, basta derivar uma constante de movimento exata além do invariante de Ermakov para garantir integrabilidade completa. No caso autônomo, a ação é invariante frente a translações temporais e o próprio Hamiltoniano é o invariante de Noether correspondente. A solução exata, neste caso, pode ser obtida do modo visto na seção 4.1. Quando a Hamiltoniana é explicitamente dependente do tempo, é necessária uma constante de movimento exata adicional. Isto converte a busca de simetrias de Noether numa alternativa atraente.

A dependência temporal explícita pode levantar dúvidas sobre a interpretação do teorema de Liouville-Arnold. De fato, geralmente este é formulado para sistemas autônomos. Ocorre que, usando um procedimento padrão [17], é possível estender o espaço de fase de modo a tratar o tempo como uma nova coordenada canônica. Nesta formulação num espaço de fase estendido, a Hamiltoniana não depende do parâmetro temporal, sendo, assim, um invariante exato. Caso sejam conhecidos  $n$  invariantes exatos na formulação original, explicitamente dependente do tempo, com a Hamiltoniana tem-se  $n + 1$  invariantes exatos na formulação autônoma, com espaço de fase de  $2n + 2$  dimensões. Daí vem que o teorema de Liouville-Arnold assegura a integrabilidade completa. Ou seja, mesmo se houver dependência temporal explícita, basta conhecer  $n$  invariantes exatos para um espaço de fase  $2n$  dimensional.

Na seção 4.1, analisou-se uma classe de sistemas de Ermakov Hamiltoniana. A aplicação

do teorema de Noether, entretanto, requer uma formulação Lagrangiana. Neste contexto, é aplicado o teorema de Noether à Lagrangiana

$$L = \frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - V(x, y, t), \quad (4.66)$$

onde

$$V(x, y, t) = \Lambda(r, t) + \frac{1}{r^2}U(y/x), \quad (4.67)$$

sendo  $\Lambda$  e  $U$  funções arbitrárias. Aplicando a transformada de Legendre à Lagrangiana (4.66), obtém-se justamente o Hamiltoniano (4.3) correspondente aos sistemas de Ermakov Hamiltonianos tratados na seção 4.1, com as restrições  $A = C = 1, B = 0$ . Tomar  $A, B$  e  $C$  arbitrários não produz resultados novos significativos e complica consideravelmente a notação. Se está tratando de um espaço de configuração bidimensional, de coordenadas  $\mathbf{q} = (x, y)$ . Além disso, por definição,  $U$  não será considerada nunca uma função constante. A contribuição de uma função  $U$  constante pode ser trivialmente incorporada em  $\Lambda(r, t)$ . A Lagrangiana (4.66) produz, via transformada de Legendre, os Hamiltonianos associados aos sistemas de Ermakov descritos na seção anterior.

Ao invés de aplicar diretamente a condição de simetria (4.64) à Lagrangiana (4.66), é conveniente adotar uma estratégia menos redundante. Já conhecemos, do capítulo 3, a forma geral das simetrias de Lie admissíveis pelos sistemas de Ermakov. Como o grupo de Noether é um subgrupo do grupo de simetrias de Lie, é mais direto verificar quais as simetrias de Lie que também se qualificam como simetrias de Noether.

Para que a seção seja completa em si mesma, veja-se novamente a forma geral das simetrias de Lie admissíveis pelos sistemas de Ermakov. Sejam as equações de Euler-Lagrange associadas à Lagrangiana (4.66),

$$\ddot{x} + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial r} - \frac{2U}{r^4} \right) x = \frac{y}{x^2 r^2} U'(y/x), \quad (4.68)$$

$$\ddot{y} + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \Lambda}{\partial r} - \frac{2U}{r^4} \right) y = -\frac{1}{x r^2} U'(y/x), \quad (4.69)$$

sendo que a linha denota diferenciação em relação ao argumento indicado. As equações (4.68–4.69) constituem um sistema de Ermakov, cujo invariante de Ermakov é dado por

$$I = \frac{1}{2}(x\dot{y} - y\dot{x})^2 + U(y/x). \quad (4.70)$$

Combinando as equações (4.68) e (4.69), obtém-se

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} + \frac{1}{x^2}U'(y/x) = 0. \quad (4.71)$$

Conforme visto no capítulo 3, as simetrias de Lie geométricas associadas à equação (4.71) são dadas por

$$\bar{t} = t + \varepsilon \rho^2(t) \quad , \quad \bar{x} = x + \varepsilon \rho \dot{\rho} x \quad , \quad \bar{y} = y + \varepsilon \rho \dot{\rho} y \quad , \quad (4.72)$$

sendo  $\rho(t)$  uma função do tempo arbitrária. Como o grupo de Noether é um subgrupo do grupo de simetrias de Lie, é válido procurar simetrias de Noether infinitesimais (4.61) especificadas por

$$\tau = \rho^2(t) \quad , \quad n_1 = \rho \dot{\rho} x \quad , \quad n_2 = \rho \dot{\rho} y \quad . \quad (4.73)$$

Inserindo os resultados (4.73) e (4.66) na condição de simetrias de Noether (4.64), obtém-se um polinômio nas componentes da velocidade, que deve ser identicamente nulo. Em virtude da proposta (4.73), este polinômio é linear. O termo proporcional a  $\dot{x}$  implica

$$\frac{\partial g}{\partial x} = (\rho \ddot{\rho} + \dot{\rho}^2) x \quad , \quad (4.74)$$

e o termo proporcional a  $\dot{y}$  implica

$$\frac{\partial g}{\partial y} = (\rho \ddot{\rho} + \dot{\rho}^2) y \quad . \quad (4.75)$$

Combinando as duas últimas equações, decorre que

$$g = g_0(t) + (\rho \ddot{\rho} + \dot{\rho}^2) r^2 / 2 \quad , \quad (4.76)$$

sendo  $g_0$  uma função que pode depender apenas do tempo.

O termo restante (independente das componentes da velocidade) na condição de simetria implica em

$$\rho^2 \frac{\partial \Lambda}{\partial t} + \rho \dot{\rho} r \frac{\partial \Lambda}{\partial r} = -2 \rho \dot{\rho} \Lambda - \dot{g}_0 - (\rho \ddot{\rho} + 3 \dot{\rho} \ddot{\rho}) r^2 / 2 \quad . \quad (4.77)$$

Esta equação parcial linear pode ser resolvida pelo método das características, com o resultado

$$\Lambda = -\frac{g_0}{\rho^2} - \frac{\ddot{\rho} r^2}{2\rho} + \frac{1}{\rho^2} \tilde{\sigma}(r/\rho) \quad , \quad (4.78)$$

sendo  $\tilde{\sigma}$  uma função arbitrária do seu argumento.

A forma do potencial correspondente a sistemas de Ermakov Lagrangianos com simetria é dada de modo mais transparente definindo uma nova função  $\omega(t)$  via

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t) \rho = k / \rho^3 \quad , \quad (4.79)$$

sendo  $k$  uma constante. A equação (4.79) pode ser vista como uma relação de compatibilidade entre as funções  $\rho$  e  $\omega$ . Para  $\omega$  dada, a decorrência é que  $\rho$  deve satisfazer a equação de Pinney. As relações (4.79) e (4.78) acarretam

$$\Lambda = -\frac{g_0}{\rho^2} + \frac{\omega^2(t)r^2}{2} + \frac{1}{\rho^2}\sigma(r/\rho), \quad (4.80)$$

sendo

$$\sigma(r/\rho) = \tilde{\sigma}(r/\rho) - kr^2/2\rho^2 \quad (4.81)$$

uma nova função arbitrária, definida a partir de  $\tilde{\sigma}$ .

Na realidade, tomar  $g_0 = 0$  na equação (4.80) não representa perda de generalidade. De fato, adicionar uma função dependendo apenas do tempo ao potencial não altera as equações de movimento. Adotando a convenção  $g_0 = 0$ , conclui-se que o potencial de Ermakov (4.67) correspondendo a simetria de Noether é dado por

$$V = \frac{\omega^2(t)r^2}{2} + \frac{1}{\rho^2}\sigma(r/\rho) + \frac{1}{r^2}U(y/x), \quad (4.82)$$

onde  $\rho$  e  $\omega$  satisfazem a condição de compatibilidade (4.79). As equações de movimento

$$\ddot{x} = -\partial V/\partial x \quad , \quad \ddot{y} = -\partial V/\partial y \quad (4.83)$$

associadas ao potencial (4.82) podem ser postas na forma de Ermakov generalizada

$$\ddot{x} + (\omega^2(t) + \sigma'(r/\rho)/\rho^4 - 2U(y/x)/r^4)x = yU'(y/x)/x^2r^2, \quad (4.84)$$

$$\ddot{y} + (\omega^2(t) + \sigma'(r/\rho)/\rho^4 - 2U(y/x)/r^4)y = -U'(y/x)/xr^2. \quad (4.85)$$

Observe-se que o termo correspondente à frequência, envolvido por parênteses nos lados esquerdos das equações (4.84) e (4.85), contém as variáveis dinâmicas. O invariante de Noether (4.65) associado é dado por

$$J = \frac{1}{2}(\rho\dot{\mathbf{q}} - \dot{\rho}\mathbf{q})^2 + \frac{kr^2}{2\rho^2} + \sigma(r/\rho) + \frac{\rho^2}{r^2}U(y/x). \quad (4.86)$$

Se a função  $g_0$  fosse mantida, não seria alterada a forma do invariante de Noether, como seria de se esperar.

A utilização de coordenadas polares ( $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$ ) simplifica consideravelmente a forma dos invariantes de Ermakov (4.70) e de Noether (4.86). O invariante de Ermakov tem a forma

$$I = \frac{r^4\dot{\phi}^2}{2} + U(\tan \phi). \quad (4.87)$$

Através de  $I$ , expressa-se o invariante de Noether apenas em termos da variável radial,

$$J = \frac{1}{2}(\rho\dot{r} - \dot{\rho}r)^2 + \frac{kr^2}{2\rho^2} + \sigma(r/\rho) + \frac{I\rho^2}{r^2}. \quad (4.88)$$

Para completar a seção, serão exibidos os invariantes exatos (4.87–4.88) em termos dos momenta canônicos

$$p_r = \partial L / \partial \dot{r} = \dot{r} \quad , \quad p_\phi = \partial L / \partial \dot{\phi} = r^2 \dot{\phi} \quad . \quad (4.89)$$

Obtém-se

$$I = \frac{1}{2}p_\phi^2 + U(\tan \phi), \quad (4.90)$$

$$J = \frac{1}{2}(\rho p_r - \dot{\rho}r)^2 + \frac{kr^2}{2\rho^2} + \sigma(r/\rho) + \frac{I\rho^2}{r^2}. \quad (4.91)$$

#### 4.4 Solução exata

Na seção precedente, derivou-se uma classe de sistemas dinâmicos com uma série de atributos muito particulares. Além de serem sistemas de Ermakov, os sistemas derivados possuem formulação variacional e simetria de Noether. Em consequência de todos estes atributos, as equações de movimento têm os invariantes exatos (4.87–4.88). Nesta seção, é obtida a solução clássica exata das equações de movimento. Em acréscimo, obtém-se também a solução exata do problema quântico correspondente. Apresentam-se separadamente os dois tratamentos, clássico e quântico.

##### 4.4.1 Solução clássica exata

Os invariantes de Ermakov (4.90) e de Noether (4.91) estão em involução. Isto pode ser verificado utilizando a definição (4.2). Alternativamente, pode-se constatar imediatamente que os dois invariantes exatos estão em involução. Para isto, basta notar que o invariante de Ermakov (4.90) envolve apenas as variáveis canônicas angulares  $(\phi, p_\phi)$ , enquanto que o invariante de Noether, na forma (4.91), contém dependência somente nas variáveis canônicas radiais  $(r, p_r)$ . Logo,  $\{I, J\} = 0$ , cumprindo uma das exigências do teorema de Liouville-Arnold para integrabilidade completa. Apesar de as superfícies de nível  $I = \text{cte.}$  não serem nunca compactas, verifica-se que as equações de movimento têm uma solução exata, construída no que segue.

Em coordenadas polares, as equações de movimento derivadas a partir do potencial (4.82) são dadas por

$$\ddot{r} + \omega^2(t)r = 2I/r^3 - \sigma'(r/\rho)/\rho^3, \quad (4.92)$$

$$r^2\ddot{\phi} + 2r\dot{r}\dot{\phi} = -U'(\tan \phi)/r^2 \cos^2 \phi, \quad (4.93)$$

onde se usou o invariante de Ermakov (4.87) para simplificar a equação radial (4.92). Na verdade, o invariante de Ermakov pode ser obtido imediatamente integrando a equação (4.93).

A equação radial está desacoplada (toda dependência angular está em  $I$ ). Em última análise, é isto que faz com que o invariante de Noether na forma (4.88) dependa apenas das variáveis  $(r, \dot{r})$ . O desacoplamento permite o tratamento separado da equação (4.92). A solução  $r(t)$  será obtida através da introdução das novas variáveis

$$R = r/\rho \quad , \quad T = \int^t d\lambda/\rho^2(\lambda) \quad . \quad (4.94)$$

Com estas coordenadas, o invariante de Noether (4.88) expressa-se como uma função do tipo energia,

$$J = \frac{1}{2} \left( \frac{dR}{dT} \right)^2 + v(R), \quad (4.95)$$

onde

$$v(R) = k R^2/2 + I R^{-2} + \sigma(R) \quad (4.96)$$

faz o papel de energia potencial. Seguindo a estratégia delineada nos livros básicos de mecânica [17] para a solução exata de problemas potenciais, obtém-se a solução por quadratura

$$T + c_1 = \int^R \frac{d\lambda}{\sqrt{2}(J - v(\lambda))^{1/2}}, \quad (4.97)$$

onde  $c_1$  é uma constante de integração. Se a integral no lado direito da equação (4.97) puder ser feita exatamente e se a inversão para obter  $R(T)$  for possível globalmente (localmente, sempre o será), então a relação (4.94) implica

$$r = r(t; c_1, I, J) = \rho R \left( \int^t d\lambda/\rho^2(\lambda) + c_1; I, J \right). \quad (4.98)$$

A equação acima está na forma de uma lei de superposição não linear, fornecendo a solução exata  $r(t)$  a partir de uma solução particular  $\rho(t)$  para a equação de Pinney (4.79).

A parte angular da dinâmica pode ser resolvida através do invariante de Ermakov (4.87), que fornece

$$\frac{d\phi}{\sqrt{2}(I - U(\tan \phi))^{1/2}} = \frac{dt}{r^2}. \quad (4.99)$$

A equação (4.99) está na forma de uma equação diferencial ordinária de primeira ordem a variáveis separáveis, após inserção de  $r(t; c_1, I, J)$ . Integrando a equação separável e invertendo (o que é sempre possível, ao menos localmente), obtém-se a solução exata

$$\phi = \phi(t; I, J, c_1, c_2), \quad (4.100)$$

onde  $c_2$  é a quarta e última constante de integração. Isto finaliza o procedimento para obter a solução exata das equações (4.92–4.93). Observe-se que este é um sistema dinâmico bastante geral, envolvendo as funções arbitrárias  $\omega(t)$ ,  $\rho(t)$ ,  $U(y/x)$  e  $\sigma(r/\rho)$ , sendo que  $\omega$  e  $\rho$  tem de ser compatíveis com a relação (4.79).

#### 4.4.2 Solução quântica exata

Nesta seção, é encontrada a solução exata da equação de Schrödinger correspondente ao potencial (4.82). Ou seja, é obtida a solução exata  $\psi(\mathbf{q}, t)$  de

$$H\psi(\mathbf{q}, t) = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t}(\mathbf{q}, t), \quad (4.101)$$

onde

$$H = -\frac{\hbar^2}{2}\nabla^2 + V(\mathbf{q}, t) \quad (4.102)$$

é o operador Hamiltoniano quântico,  $\nabla^2$  é o operador Laplaciano e  $V(\mathbf{q}, t)$  é dado na fórmula (4.82). Utiliza-se o método de Lewis e Riesenfeld, explicado com detalhes na seção 2.3, no caso de problemas de uma dimensão espacial. Na presente subseção, meramente se adapta para o caso de duas dimensões espaciais a teoria exposta em 2.3.

Para a aplicação do método de Lewis e Riesenfeld, lança-se mão de uma base de autovetores comuns aos operadores Hermitianos invariantes

$$I = \frac{1}{2}(xp_y - yp_x)^2 + U(y/x), \quad (4.103)$$

$$J = \frac{1}{2}(\rho\mathbf{p} - \dot{\rho}\mathbf{q})^2 + \frac{kr^2}{2\rho^2} + \sigma(r/\rho) + \frac{\rho^2}{r^2}U(y/x), \quad (4.104)$$

obtidos a partir da quantização dos invariantes de Ermakov (4.70) e de Noether (4.86). Nas equações (4.103–4.104), subentende-se que  $\mathbf{p} = (p_x, p_y)$ , com  $p_x = -i\hbar\partial/\partial x$  e

$p_y = -i\hbar\partial/\partial y$ , são os operadores correspondentes aos momenta clássicos na representação de coordenadas. Ou seja, nesta subseção sempre se entende que  $I$  e  $J$  são operadores diferenciais.

Pode-se verificar diretamente que os operadores  $I$  e  $J$  dados nas equações (4.103–4.104) comutam,

$$[I, J] = IJ - JI = 0. \quad (4.105)$$

Nada seria mais natural, pois os invariantes exatos clássicos  $I$  e  $J$  estão em involução. O isomorfismo  $\{, \} \rightarrow (i\hbar)^{-1}[,]$  entre a álgebra das funções no espaço de fase e a álgebra dos operadores no espaço de Hilbert implica o resultado (4.105) imediatamente.

Como  $I$  e  $J$  são observáveis compatíveis, é possível construir uma base ortonormalizada de autofunções  $\psi_{mn}(\mathbf{q}, t)$  comuns a  $I$  e a  $J$ ,

$$I\psi_{mn} = I_{mn}\psi_{mn} \quad , \quad (4.106)$$

$$J\psi_{mn} = J_{mn}\psi_{mn} \quad , \quad (4.107)$$

$$\int \psi_{mn}^*(\mathbf{q}, t)\psi_{rs}(\mathbf{q}, t)d\mathbf{q} = \delta_{mr}\delta_{ns} \quad , \quad (4.108)$$

sendo que  $I_{mn}$  e  $J_{mn}$  são os autovalores correspondentes. Pela teoria básica de Lewis e Riesenfeld, o fato de  $I$  e  $J$  serem operadores Hermitianos invariantes assegura que estes autovalores são constantes. Se está utilizando um par de índices discretos  $m$  e  $n$  para simplificar a notação. Caso uma parte do espectro de  $I$  ou de  $J$  seja contínua, basta modificar a notação coerentemente.

A solução exata de Lewis e Riesenfeld é da forma

$$\psi(\mathbf{q}, t) = \sum_{m,n} c_{mn} e^{i\alpha_{mn}(t)} \psi_{mn}(\mathbf{q}, t), \quad (4.109)$$

sendo que as fases  $\alpha_{mn}$  satisfazem

$$\hbar\dot{\alpha}_{mn} = \int \psi_{mn}^* \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - H \right) \psi_{mn} d\mathbf{q}, \quad (4.110)$$

onde  $H$  é o operador Hamiltoniano dado na fórmula (4.102).

Para obter a forma explícita da solução (4.109) de Lewis e Riesenfeld, é necessário resolver o par de problemas de autovalores (4.106–4.107). Utilizando coordenadas polares, estas equações traduzem-se no sistema

$$-\frac{\hbar^2}{2} \frac{\partial^2 \psi_{mn}}{\partial \phi^2} + U(\tan \phi) \psi_{mn} = I_{mn} \psi_{mn}, \quad (4.111)$$

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\hbar^2 \rho^2}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial r} \right) - \frac{\hbar^2 \rho^2}{2r^2} \frac{\partial^2 \psi_{mn}}{\partial \phi^2} + i\hbar \rho \dot{\rho} \left( r \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial r} + \psi_{mn} \right) + \\
 & + \frac{1}{2} (\dot{\rho}^2 + k/\rho^2) r^2 \psi_{mn} + \frac{\rho^2}{r^2} U(\tan \phi) \psi_{mn} + \sigma(r/\rho) \psi_{mn} = \\
 & = J_{mn} \psi_{mn}.
 \end{aligned} \tag{4.112}$$

Considerando explicitamente a equação (4.111), obém-se uma forma alternativa para o problema (4.112),

$$\begin{aligned}
 & -\frac{\hbar^2 \rho^2}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial r} \right) + i\hbar \rho \dot{\rho} \left( r \frac{\partial \psi_{mn}}{\partial r} + \psi_{mn} \right) + \\
 & + \left( \frac{1}{2} (\dot{\rho}^2 + k/\rho^2) r^2 + I_{mn} \rho^2 / r^2 + \sigma(r/\rho) \right) \psi_{mn} = \\
 & = J_{mn} \psi_{mn}.
 \end{aligned} \tag{4.113}$$

Na equação de autovalores (4.111), apenas comparecem a variável angular e o tempo. Por outro lado, no problema (4.113) comparecem apenas a variável radial e o tempo. Assim, é possível propor uma solução através de uma separação de variáveis,

$$\psi_{mn}(r, \phi, t) = \varphi_{mn}(r, t) Y_n(\phi). \tag{4.114}$$

Valem as condições de normalização

$$\int Y_m^*(\phi) Y_n(\phi) d\phi = \delta_{mn} \quad , \quad \int \varphi_{mn}^*(r, t) \varphi_{rs}(r, t) r dr = \delta_{mr} \delta_{ns} \quad . \tag{4.115}$$

A equação (4.111) pode ser tratada separadamente. Conseqüentemente, não são necessários dois índices para os autovalores de  $I$ . Fazendo, assim, a simplificação

$$I_{mn} \longrightarrow I_n, \tag{4.116}$$

e adotando a proposta (4.114), converte-se a equação (4.111) em

$$-\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2 Y_n}{d\phi^2} + U(\tan \phi) Y_n = I_n Y_n. \tag{4.117}$$

É coerente associar apenas um índice para as autofunções  $Y_n$  do operador  $I$ , pois o seu problema de autovalores pode ser tratado separadamente.

A equação (4.117), formalmente, é uma equação de Schrödinger unidimensional independente do tempo com potencial  $U(\tan \phi)$ . Supondo que seja possível resolvê-la, resta

a tarefa de resolver o problema (4.113). Inserindo nesta um autovalor particular  $I_n$  e considerando a proposta (4.114), obtém-se

$$-\frac{\hbar^2 \rho^2}{2r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{d\varphi_{mn}}{dr} \right) + i\hbar \rho \dot{\rho} \left( r \frac{d\varphi_{mn}}{dr} + \varphi_{mn} \right) + \left( \frac{1}{2}(\dot{\rho}^2 + k/\rho^2) r^2 + \frac{I_n \rho^2}{r^2} + \sigma(r/\rho) \right) \varphi_{mn} = J_{mn} \varphi_{mn}. \quad (4.118)$$

Esta equação pode ser convenientemente tratada através da transformação

$$\varphi_{mn}(r, t) = \frac{1}{\sqrt{\rho r}} \exp(i\dot{\rho} r^2 / 2\hbar) \bar{\varphi}_{mn}(r/\rho), \quad (4.119)$$

sendo que

$$\int \bar{\varphi}_{mn}^*(R) \bar{\varphi}_{rs}(R) dR = \delta_{mr} \delta_{rs} \quad (4.120)$$

para preservar a condição de normalização. Com isto, converte-se a equação (4.118) em outra equação de Schrödinger unidimensional independente do tempo,

$$-\frac{\hbar^2}{2} \frac{d^2 \bar{\varphi}_{mn}(R)}{dR^2} + v(R) \bar{\varphi}_{mn}(R) = J_{mn} \bar{\varphi}_{mn}(R), \quad (4.121)$$

onde  $R = r/\rho$  e onde

$$v(R) = kR^2/2 + (I_n - \hbar^2/8)R^{-2} + \sigma(R) \quad (4.122)$$

cumpra o papel de potencial. Em resumo, transformou-se o problema de encontrar uma base de autofunções comuns a  $I$  e a  $J$  num par de equações de Schrödinger independentes do tempo, (4.117) e (4.121).

Ainda resta encontrar as fases de Lewis  $\alpha_{mn}$ , definidas na equação (4.110). Considerando que as autofunções estão adequadamente normalizadas, que valem a equação de Pinney (4.79) e também a relação

$$H = \frac{J}{\rho^2} + \frac{\dot{\rho}}{2\rho} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}) + \frac{1}{2\rho^2} (\omega^2(t)\rho^2 - \dot{\rho}^2 - k/\rho^2) r^2, \quad (4.123)$$

expressa-se a fórmula (4.110) segundo a forma simples

$$\hbar \dot{\alpha}_{mn} = -J_{mn}/\rho^2. \quad (4.124)$$

Os cálculos envolvidos na obtenção da última equação são longos, mas simples. A forma final das fases de Lewis é dada por

$$\alpha_{mn}(t) = -\frac{J_{mn}}{\hbar} \int_0^t \frac{d\lambda}{\rho^2(\lambda)}. \quad (4.125)$$

Levando em consideração a proposta fundamental (4.109) de Lewis e Riesenfeld, a separação de variáveis (4.114), a transformação (4.119) e as fases dadas por (4.125), obtém-se, finalmente, a solução exata para a equação de Schrödinger,

$$\psi(\mathbf{q}, t) = \sum_{m,n} \frac{c_{mn}}{\sqrt{\rho r}} \exp\left(-\frac{i J_{mn}}{\hbar} \int_0^t \frac{d\lambda}{\rho^2(\lambda)}\right) \exp\left(\frac{i \dot{\rho} r^2}{2\hbar\rho}\right) \bar{\varphi}_{mn}(r/\rho) Y_n(\phi), \quad (4.126)$$

onde as constantes  $c_{mn}$  são determinadas pelas condições iniciais.

Os ingredientes básicos para construir a expressão (4.126) são uma solução particular  $\rho(t)$  para a equação (4.79) e a solução das equações de Schrödinger (4.117) e (4.121). Evidentemente, a obtenção destes ingredientes básicos nem sempre é tarefa trivial. Entretanto, a solução obtida tem o mérito de dividir o problema total em três etapas distintas, a saber, a resolução dos problemas (4.79), (4.117) e (4.121). Na prática, a dificuldade de cada uma destas etapas depende essencialmente das funções arbitrárias  $\omega(t)$ ,  $U(\tan \phi)$  e  $\sigma(r/\rho)$ , respectivamente.

Neste ponto, é de interesse comparar as soluções exatas clássica e quântica. Classicamente, reduziu-se a parte radial da dinâmica a um sistema potencial unidimensional, com potencial dado na fórmula (4.96). Quanticamente, obteve-se uma equação de Schrödinger unidimensional independente do tempo para a parte radial da função de onda. A função potencial, dada na relação (4.122), diferencia-se do potencial clássico (4.96) por uma correção proporcional a  $\hbar^2$ . Além disso, em princípio é possível que os autovalores  $I_n$  na equação (4.122) sejam quantizados e não contínuos. Por outro lado, a parte angular da dinâmica é basicamente determinada pelo invariante de Ermakov. Isto vale classicamente (ver a equação (4.99)) e quanticamente, no problema de autovalores (4.117).

Para finalizar a seção, será feita uma comparação entre os resultados encontrados e a literatura. Grammaticos e Dorizzi [79] deduziram o potencial (4.82) (ver a equação (60) do artigo citado) no curso de sua busca por sistemas bidimensionais possuindo invariantes exatos quadráticos na velocidade. Entretanto, não reconheceram que o sistema deduzido é completamente integrável. Conseqüentemente, não encontraram sua solução exata, nem clássica, nem quântica. Dhara e Lawande [82], nos casos A) e C) do artigo referido, encontraram, respectivamente, potenciais associados ou a sistemas de Ermakov ou a simetrias de Noether. Além disso, a existência de uma simetria de Noether subjacente a este último caso não foi reconhecida, pois foi utilizado o método direto de procura de invariantes exatos. A possibilidade de encontrar uma intersecção entre as duas classes, obtendo sistemas de Ermakov com simetria de Noether, não foi considerada. Com isto, não obtiveram sistemas completamente integráveis. Cerveró e Lejarreta [157] obtiveram o po-

---

tencial (4.82) com a restrição  $\sigma(r/\rho) = 0$ , no curso de sua análise de sistemas de Ermakov Hamiltonianos com frequência dependente apenas do tempo. A presente seção estendeu este tratamento ao permitir frequências mais gerais e, conseqüentemente, funções  $\sigma(r/\rho)$  não nulas. Finalmente, Leach, Lewis e Sarlet [95] encontraram, usando transformações canônicas generalizadas, uma classe de potenciais com uma constante de movimento exata quadrática. Uma subclasse desta classe geral está associada a sistemas de Ermakov. Entretanto, esta conexão não foi feita e, em conseqüência, não foram obtidos sistemas completamente integráveis. Em nenhuma das três referências se reconhece a possível existência de uma estrutura de sistemas de Ermakov. Tal pode ser imputado ao caráter não usual da frequência, o que fica evidenciado no sistema (4.84–4.85). Em última análise, pode-se dizer que esta é a razão da incompletude dos resultados contidos nas referências mencionadas.

## Capítulo 5

### SIMETRIAS DE NOETHER PARA O MOVIMENTO NÃO RELATIVÍSTICO DA PARTÍCULA CARREGADA

O objetivo deste capítulo é abordar a questão das simetrias e leis de conservação para as equações de movimento

$$\ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{E}(\mathbf{q}, t) + \dot{\mathbf{q}} \times \mathbf{B}(\mathbf{q}, t), \quad (5.1)$$

onde  $\mathbf{q} = (x, y, z)$  e  $\mathbf{E}(\mathbf{q}, t)$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{q}, t)$  são campos eletromagnéticos. O sistema (5.1) descreve o movimento não relativístico de uma partícula carregada com razão unitária entre carga e massa. Isto sempre é possível, graças ao uso de um re-escalamento apropriado. A metodologia utilizada no capítulo é a aplicação do teorema de Noether, já utilizado na análise de sistemas de Ermakov Hamiltonianos na seção 4.3.

Na seção 5.1, investigam-se as simetrias de Noether para o movimento de uma partícula carregada sob ação de campos eletromagnéticos gerais. Mostra-se que o problema reduz-se a duas equações parciais lineares envolvendo os campos eletromagnéticos e o gerador de simetrias. Na seção 5.2, resolve-se completamente este sistema no caso em que o campo magnético é devido a um monopolo magnético. Determinam-se duas classes admissíveis de campos elétricos, relacionadas a constantes de movimento exatas lineares ou quadráticas nas velocidades. Na seção 5.3, aplicam-se os resultados da seção 5.2 para dois casos particulares relevantes, nos quais o potencial do monopolo magnético é modificado ou pela adição de um potencial harmônico dependente do tempo ou de um potencial de Kepler dependente do tempo. Em ambos os casos, as equações de movimento são reduzidas a quadratura.

### 5.1 Simetrias de Noether para a partícula carregada sob um campo eletromagnético geral

Na seção 4.3, foi apresentada uma formulação do teorema de Noether aplicável a qualquer sistema com formulação Lagrangiana. A seguir, será analisado o caso da partícula carregada sob ação de um campo eletromagnético geral, executando movimento não relativístico.

Introduzindo os potenciais vetorial  $\mathbf{A}(\mathbf{q}, t)$  e escalar  $V(\mathbf{q}, t)$ , a Lagrangiana é dada por

$$L = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^2 + \mathbf{A}(\mathbf{q}, t) \cdot \dot{\mathbf{q}} - V(\mathbf{q}, t). \quad (5.2)$$

Já o campo eletromagnético é dado por

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad , \quad \mathbf{E} = -\nabla V - \partial \mathbf{A} / \partial t \quad . \quad (5.3)$$

Ao inserir  $L$  na condição de simetria (4.64), encontra-se um polinômio nas componentes da velocidade. O coeficiente de cada monômio deve se anular identicamente. Com isto, deriva-se um sistema de equações que determina simultaneamente a forma do gerador de simetria (4.62) e dos potenciais escalar e vetorial admissíveis.

O monômio de terceiro grau na velocidade acarreta

$$\dot{\mathbf{q}}^3 \longrightarrow \frac{\partial \tau}{\partial q_i} = 0, \quad (5.4)$$

com solução

$$\tau = \rho^2(t), \quad (5.5)$$

onde  $\rho(t)$  é uma função arbitrária do tempo. Inserindo esta solução no monômio de segundo grau na velocidade, vem que

$$\dot{\mathbf{q}}^2 \longrightarrow \left( \frac{\partial n_i}{\partial q_j} - \delta_{ij} \rho \dot{\rho} \right) \dot{q}_i \dot{q}_j = 0, \quad (5.6)$$

onde foram utilizadas notação com componentes e a delta de Kronecker. Neste capítulo, a repetição de índices implica soma. Apenas a parte simétrica do coeficiente de  $\dot{q}_i \dot{q}_j$  deve se anular na equação (5.6),

$$\frac{\partial n_i}{\partial q_j} + \frac{\partial n_j}{\partial q_i} - 2 \delta_{ij} \rho \dot{\rho} = 0. \quad (5.7)$$

A solução é

$$\mathbf{n} = \rho \dot{\rho} \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \boldsymbol{\Omega}(t) + \mathbf{a}(t), \quad (5.8)$$

onde  $\Omega(t)$  e  $\mathbf{a}(t)$  são funções vetoriais arbitrárias do tempo. A obtenção da solução (5.8) a partir da equação (5.7) é apresentada no apêndice A.

Com as funções  $\tau$  e  $\mathbf{n}$  nas equações (5.5) e (5.8), demonstrou-se que a forma geral do gerador de simetrias é dada por

$$G = \rho^2(t) \frac{\partial}{\partial t} + (\rho \dot{\rho} \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \boldsymbol{\Omega}(t) + \mathbf{a}(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}, \quad (5.9)$$

onde  $\rho(t)$ ,  $\boldsymbol{\Omega}(t)$  and  $\mathbf{a}(t)$  são arbitrárias. O gerador de simetrias inclui um re-escalonamento generalizado, uma rotação dependente do tempo e uma translação espacial dependente do tempo.

Até aqui, a aplicação do teorema de Noether não impôs nenhuma restrição sobre  $\mathbf{A}$  ou  $V$ . As equações remanescentes acarretadas pela condição (4.64) são dadas por

$$\dot{\mathbf{q}} \longrightarrow \nabla g = G\mathbf{A} + \rho \dot{\rho} \mathbf{A} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A} + \partial \mathbf{n} / \partial t, \quad (5.10)$$

$$\dot{\mathbf{q}}^{(0)} \longrightarrow \partial g / \partial t = -GV - 2\rho \dot{\rho} V + \mathbf{A} \cdot \partial \mathbf{n} / \partial t, \quad (5.11)$$

onde a forma (5.9) de  $G$  já foi considerada. Utilizou-se a definição

$$GW = \rho^2(t) \frac{\partial W}{\partial t} + (\rho \dot{\rho} \mathbf{q} + \mathbf{q} \times \boldsymbol{\Omega}(t) + \mathbf{a}(t)) \cdot \frac{\partial W}{\partial \mathbf{q}}, \quad (5.12)$$

válida para qualquer função  $W$ , aplicada nos casos em que  $W = V$  e  $W = A_i$ .

As equações (5.10–5.11) possuem uma solução se e somente se as condições de Cauchy

$$\frac{\partial^2 g}{\partial q_i \partial q_j} = \frac{\partial^2 g}{\partial q_j \partial q_i}, \quad \frac{\partial^2 g}{\partial q_i \partial t} = \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial q_i}. \quad (5.13)$$

são satisfeitas. De outra maneira, a função  $g$  não existe e não há simetria de Noether.

Usando as equações (5.10–5.11) nas condições de Cauchy, obtém-se, após cálculos simples,

$$G\mathbf{B} = -2\rho \dot{\rho} \mathbf{B} + 2\dot{\boldsymbol{\Omega}} + \mathbf{B} \times \boldsymbol{\Omega}, \quad (5.14)$$

$$G\mathbf{E} = -3\rho \dot{\rho} \mathbf{E} + \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{B} \times \frac{\partial \mathbf{n}}{\partial t} + \frac{\partial^2 \mathbf{n}}{\partial t^2}, \quad (5.15)$$

envolvendo apenas os campos eletromagnéticos físicos.

As equações (5.14–5.15) são as equações fundamentais na determinação de simetrias de Noether para o movimento não relativístico de uma partícula carregada. Trata-se de um sistema de equações diferenciais parciais e lineares para os campos  $\mathbf{E}$  e  $\mathbf{B}$ , envolvendo as funções  $\rho$ ,  $\boldsymbol{\Omega}$  e  $\mathbf{a}$ , que definem o gerador  $G$ . Verifica-se que os potenciais vetorial e

escalar não aparecem nas equações básicas. Portanto, a utilização de um ou outro calibre não modifica o cálculo de simetrias de Noether.

Uma vez resolvido o sistema (5.14–5.15) para os campos elétrico e magnético, ainda resta obter os potenciais escalar e vetorial e resolver o sistema (5.10–5.11) para  $g(\mathbf{q}, t)$ . Em princípio, estas tarefas são simples. A constante de movimento de Noether é obtida pela fórmula (4.65), e apresenta a forma

$$J = (\dot{\mathbf{q}}^2/2 + V)\rho^2 - (\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} + g. \quad (5.16)$$

$J$  é um polinômio quadrático nas velocidades quando  $\rho \neq 0$ . Para  $\rho = 0$ ,  $J$  é uma forma linear nas velocidades.

Para um campo eletromagnético dado, o par de equações (5.14–5.15) pode ser encarado como um sistema a ser identicamente satisfeito pelas funções que compõe o gerador de simetria. Esta abordagem é, certamente, a mais indicada quando se tem em mente um campo específico. Neste trabalho, tratar-se-á da resolução do sistema (5.14–5.15) com um campo magnético dado, na forma de um monopolo magnético. O campo elétrico, entretanto, mantido livre de início, será obtido *a posteriori*.

Os resultados desta seção aplicam-se a campos eletromagnéticos genéricos. Na próxima seção, se considerará um campo magnético gerado unicamente por um monopolo magnético fixo na origem. Determinam-se, então, quais as simetrias de Noether e campos elétricos associados admissíveis e as integrais primeiras exatas correspondentes.

## 5.2 O caso do monopolo magnético

Nesta seção, será aplicado o formalismo da seção 5.1 buscando os campos elétricos e as simetrias de Noether compatíveis com o campo de um monopolo magnético fixo na origem,

$$\mathbf{B} = \frac{\gamma \mathbf{q}}{r^3}, \quad (5.17)$$

onde  $\gamma$  é uma constante positiva, proporcional à carga magnética e  $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ .

Trabalhos anteriores referentes ao movimento de partículas carregadas na presença de monopolos magnéticos tem focado os casos nos quais  $V = V(r)$ , isto é, nos quais a força elétrica é central e estacionária. Nestes casos específicos, as equações de Lorentz possuem a integral primeira exata vetorial

$$\mathbf{D} = \mathbf{q} \times \dot{\mathbf{q}} - \gamma \hat{\mathbf{r}}, \quad (5.18)$$

onde  $\hat{\mathbf{r}} = \mathbf{q}/r$  é o versor radial. O vetor  $\mathbf{D}$  foi utilizado por Poincaré [164] na obtenção da solução exata das equações de movimento quando  $V = 0$ , isto é, para o caso em que há simplesmente o monopolo.

Mais recentemente [165], foram considerados os potenciais centrais

$$V = \frac{\omega_0^2 r^2}{2} + \frac{\gamma^2}{2r^2} \quad (5.19)$$

e

$$V = -\frac{\mu_0}{r} + \frac{\gamma^2}{2r^2}. \quad (5.20)$$

Classicamente, todas as órbitas confinadas são periódicas quando  $V$  é dado pelas fórmulas (5.19) ou (5.20). Quanticamente, para estes potenciais obtém-se degenerescência dos níveis de energia da equação de Schrödinger correspondente. Tais degenerescências estão relacionadas à existência de constantes de movimento exatas adicionais [165]. No caso do potencial (5.19), relacionado ao do oscilador harmônico isotrópico, existe uma constante de movimento exata tensorial, com componentes

$$T_{ij} = (\dot{u}_i + i\omega_0 u_i)(\dot{u}_j - i\omega_0 u_j), \quad (5.21)$$

onde  $\mathbf{u} = \mathbf{D} \times \hat{\mathbf{r}}$  e utilizou-se notação complexa. No caso do potencial (5.20), relacionado com uma interação Coulombiana ou Kepleriana, verifica-se a constância do vetor

$$\mathbf{F} = \mathbf{D} \times \dot{\mathbf{q}} + \mu_0 \hat{\mathbf{r}}. \quad (5.22)$$

Tanto (5.21) quanto (5.22) são constantes de movimento exatas quadráticas na velocidades. Pode ser demonstrado [166] que os potenciais dados pelas relações (5.19) ou (5.20) são os únicos potenciais centrais e independentes do tempo para os quais a equação (5.1) possui integrais primeiras exatas quadráticas além da energia. A degenerescência destes problemas foi explicada [167] em termos da álgebra de invariância  $su(2) \oplus su(2)$ .

É de interesse averiguar os efeitos da superposição de uma força elétrica não central e não estacionária no movimento de partículas carregadas sob um monopolo magnético. Um resultado imediato do caráter não central do campo elétrico é a não constância do vetor  $\mathbf{D}$  dado na equação (5.18). Entretanto, ao menos para formas específicas de  $V(\mathbf{q}, t)$ , é de se esperar o surgimento de outras simetrias e constantes de movimento exatas. Será analisada, então, a questão de quais são as formas de  $V(\mathbf{q}, t)$  para as quais o sistema descrito pela equação (5.1) possui simetrias de Noether. Esta abordagem permite um tratamento compacto da questão, pois envolve a determinação simultânea de simetrias e leis de conservação.

Inserindo a definição (5.17) na condição (5.14), obtém-se uma equação que deve ser identicamente satisfeita pelas funções  $\rho$ ,  $\mathbf{\Omega}$  e  $\mathbf{a}$  que compõem a simetria,

$$\gamma (r^2 \mathbf{a} - 3 \mathbf{a} \cdot \mathbf{q} \mathbf{q}) r^{-5} + \dot{\mathbf{\Omega}} = 0. \quad (5.23)$$

Note-se que  $\rho$  não está presente, permanecendo arbitrária. A equação (5.23) fica identicamente satisfeita se e somente se

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{\Omega}} = 0. \quad (5.24)$$

Conseqüentemente, a forma mais geral do gerador de simetrias de Noether é dada por

$$G = \rho^2 \frac{\partial}{\partial t} + (\rho \dot{\rho} \mathbf{q} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{q}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}. \quad (5.25)$$

Outra maneira de expressar o resultado é

$$G = G_\rho + \mathbf{\Omega} \cdot \mathbf{L}, \quad (5.26)$$

onde

$$G_\rho = \rho^2 \frac{\partial}{\partial t} + \rho \dot{\rho} \mathbf{q} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}, \quad (5.27)$$

sendo  $\mathbf{\Omega}$  é um vetor constante e  $\mathbf{L} = (L_1, L_2, L_3)$ , definido por

$$L_1 = y \frac{\partial}{\partial z} - z \frac{\partial}{\partial y}, \quad (5.28)$$

$$L_2 = z \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial z}, \quad (5.29)$$

$$L_3 = x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x}. \quad (5.30)$$

Se reconhece  $L_1, L_2, L_3$  como o conjunto dos geradores do grupo  $SO(3)$ . O operador  $G_\rho$  também gera um grupo de Lie, porém com dimensão infinita, já que  $\rho$  é arbitrária. O gerador  $G_\rho$  tem um papel central no estudo dos sistemas de Ermakov generalizados, como foi visto no capítulo 3. Aqui, entretanto, o gerador atua num espaço tridimensional e não bidimensional, como no caso dos sistemas de Ermakov generalizados.

A estrutura algébrica é especificada pelos comutadores

$$[G_{\rho_1}, G_{\rho_2}] = G_{\rho_3}, \quad (5.31)$$

$$[L_i, L_j] = -\varepsilon_{ijk} L_k, \quad (5.32)$$

$$[G_\rho, L_i] = 0, \quad (5.33)$$

onde se usou o símbolo de Levi-Civita  $\varepsilon_{ijk}$  e se definiu uma função  $\rho_3(t)$  a partir de duas funções arbitrárias  $\rho_1(t)$  e  $\rho_2(t)$  segundo

$$\rho_3 = 2\rho_1\rho_2(\rho_1\dot{\rho}_2 - \rho_2\dot{\rho}_1). \quad (5.34)$$

O conjunto de todos os campos vetoriais  $G_\rho$  forma uma sub-álgebra. A álgebra completa é a soma direta desta álgebra com  $so(3)$ , que é a álgebra associada ao grupo  $SO(3)$ . Este resultado vale para qualquer campo elétrico compatível justaposto ao campo do monopolo. Evidentemente, é concebível que para certas formas do campo elétrico nenhuma simetria de Noether sobreviva.

Para que um campo elétrico seja compatível com alguma simetria de Noether, a equação (5.15) deve ser satisfeita. Como o gerador de simetrias deve ser da forma (5.25), esta condição sobre  $\mathbf{E}$  resulta ser

$$G\mathbf{E} = -3\rho\dot{\rho}\mathbf{E} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{E} + (\rho\ddot{\rho} + 3\dot{\rho}\ddot{\rho})\mathbf{q}, \quad (5.35)$$

onde  $G$  é dado pela equação (5.25). Devido às formas específicas do campo magnético e de  $G$ , a carga magnética  $\gamma$  não comparece na equação (5.35).

Antes de solucionar o problema no caso geral, será analisado o subcaso  $\mathbf{E} = 0$ , isto é, o caso do monopolo simples. Neste contexto, a equação (5.35) se reduz a

$$\rho\ddot{\rho} + 3\dot{\rho}\ddot{\rho} = 0, \quad (5.36)$$

cujas soluções gerais são dadas por

$$\rho^2 = c_1 + 2c_2t + c_3t^2, \quad (5.37)$$

sendo  $c_1, c_2$  e  $c_3$  constantes arbitrárias. Tomando, alternadamente, apenas  $c_1, c_2$  ou  $c_3$  não nulos, obtém-se três simetrias de Noether. Conclui-se, assim, pela existência das simetrias de Noether geradas por

$$G_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (5.38)$$

$$G_2 = 2t\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{q} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \quad (5.39)$$

$$G_3 = t^2\frac{\partial}{\partial t} + t\mathbf{q} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}, \quad (5.40)$$

sem mencionar ainda os geradores do  $SO(3)$ . Os operadores (5.38–5.40) correspondem, respectivamente, a translações temporais, auto similaridade e transformações conformes, ingredientes do grupo  $SO(2, 1)$ . As relações de comutação são dadas por

$$[G_1, G_2] = 2G_1 \quad , \quad [G_1, G_3] = G_2 \quad [G_2, G_3] = 2G_3 \quad . \quad (5.41)$$

Conclui-se, em resumo, que o grupo de simetrias de Noether do problema apenas com o monopolo é dado por  $SO(2, 1) \times SO(3)$ , ou ainda o grupo isomórfico  $SL(2, R) \times SO(3)$ . Este resultado já foi obtido por Jackiw [168], que utilizou simetrias de Noether dinâmicas, envolvendo as velocidades. Mais tarde, Moreira et al. [169] encontraram o grupo  $SO(2, 1) \times SO(3)$  usando apenas simetrias de Lie, sem lançar mão de um formalismo Lagrangiano. Esta abordagem tem a vantagem de não necessitar a introdução de um potencial vetorial, o qual, pela natureza do campo do monopolo, sempre é singular. Entretanto, como foi visto na seção 5.1, a análise das simetrias de Noether reduz-se ao sistema de equações (5.14–5.15), envolvendo apenas os campos físicos e a simetria sem se referir aos potenciais eletromagnéticos.

### 5.3 Campos elétricos compatíveis

Tendo sido determinadas todas as simetrias de Noether no caso de um monopolo magnético, resta saber quais os campos elétricos para os quais estas são admitidas. A resposta à questão exige a solução da equação (5.35). A solução geral é de duas categorias, dependendo da função  $\rho$  ser ou não identicamente nula. De acordo com a fórmula (5.16), cada categoria corresponde a integrais primeiras exatas quadráticas ou lineares nas velocidades. Os dois casos serão tratados separadamente.

#### 5.3.1 O caso em que $\rho \neq 0$

A solução geral da equação (5.35) quando  $\rho \neq 0$  é dada por

$$\mathbf{E} = \frac{\ddot{\rho}}{\rho} \mathbf{q} + \frac{1}{\rho^4} \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}) + \frac{1}{\rho^3} R(\Omega \bar{t}) \cdot \bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{q}}), \quad (5.42)$$

onde se utilizaram as definições

$$\bar{\mathbf{q}} = \frac{1}{\rho} R^T(\Omega \bar{t}) \cdot \mathbf{q} \quad , \quad \bar{t} = \int^t d\Lambda / \rho^2(\Lambda) \quad , \quad (5.43)$$

sendo  $R(\Omega \bar{t})$  a matriz de rotação em torno de  $\boldsymbol{\Omega}$  por um ângulo  $\Omega \bar{t}$ , com  $\Omega = \|\boldsymbol{\Omega}\|$ . O símbolo  $T$  na equação (5.43) indica transposta. Na fórmula (5.42),  $\bar{\mathbf{E}}$  é uma função vetorial arbitrária do seu argumento. Para  $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ , a forma explícita da matriz de rotação é

$$R(\Omega \bar{t}) = \begin{pmatrix} \cos \Omega \bar{t} & -\sin \Omega \bar{t} & 0 \\ \sin \Omega \bar{t} & \cos \Omega \bar{t} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.44)$$

Pode-se verificar diretamente que a proposta (5.42) satisfaz a equação (5.35). Para isto, as relações

$$\frac{\partial}{\partial \bar{t}} = \rho^2 \frac{\partial}{\partial t} + (\rho \dot{\rho} \mathbf{q} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}, \quad (5.45)$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{q}}} = \rho R^T(\Omega \bar{t}(t)) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}} \quad (5.46)$$

são úteis. Por outro lado, as equações (5.25) e (5.45) mostram que

$$G = \partial / \partial \bar{t} \quad (5.47)$$

ou seja, que  $(\bar{\mathbf{q}}, \bar{t})$  são coordenadas canônicas para o grupo de simetrias de Noether.

É instrutivo expressar o campo elétrico (5.42) em componentes. Tomando  $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$  por simplicidade, resulta que

$$E_1 = \left( \ddot{\rho} - \frac{\Omega^2}{\rho^3} \right) \frac{x}{\rho} + \frac{1}{\rho^3} \left( \bar{E}_1(\bar{\mathbf{q}}) \cos \Omega \bar{t} - \bar{E}_2(\bar{\mathbf{q}}) \sin \Omega \bar{t} \right), \quad (5.48)$$

$$E_2 = \left( \ddot{\rho} - \frac{\Omega^2}{\rho^3} \right) \frac{y}{\rho} + \frac{1}{\rho^3} \left( \bar{E}_2(\bar{\mathbf{q}}) \cos \Omega \bar{t} + \bar{E}_1(\bar{\mathbf{q}}) \sin \Omega \bar{t} \right), \quad (5.49)$$

$$E_3 = \frac{\ddot{\rho}}{\rho} z + \frac{1}{\rho^3} \bar{E}_3(\bar{\mathbf{q}}), \quad (5.50)$$

onde  $\rho$  e  $\bar{\mathbf{E}} = (\bar{E}_1, \bar{E}_2, \bar{E}_3)$  são funções arbitrárias. No entanto, para que o campo vetorial (5.42) qualifique-se como um campo elétrico, é preciso que as equações de Maxwell sejam satisfeitas. Isto impõe novas restrições, examinadas abaixo.

A lei de Faraday

$$\nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (5.51)$$

implica, para  $\mathbf{E}$  dado segundo a expressão (5.42),

$$R(\Omega \bar{t}) \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{\mathbf{E}}(\bar{\mathbf{q}})) = 0, \quad (5.52)$$

onde  $\bar{\nabla} = \partial / \partial \bar{\mathbf{q}}$ . Como a matriz de rotação  $R(\Omega \bar{t})$  não é singular, deve existir uma função  $U(\bar{\mathbf{q}})$  tal que

$$\bar{\mathbf{E}} = -\bar{\nabla} U(\bar{\mathbf{q}}). \quad (5.53)$$

As demais equações de Maxwell sempre podem ser satisfeitas escolhendo adequadamente as densidades de carga e corrente. No caso, tem-se que

$$n_q = \nabla \cdot \mathbf{E} = 3 \frac{\ddot{\rho}}{\rho} - 2 \frac{\Omega^2}{\rho^4} - \frac{1}{\rho^2} \nabla^2 U, \quad (5.54)$$

$$\mathbf{J}_q = \nabla \times \mathbf{B} - \partial \mathbf{E} / \partial t = \left( \frac{\dot{\rho} \ddot{\rho}}{\rho^2} - \frac{\ddot{\rho}}{\rho} \right) \mathbf{q} + 4 \frac{\dot{\rho}}{\rho^5} \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}) - 2 \frac{\dot{\rho}}{\rho^3} \nabla U + \frac{1}{\rho^2} \nabla \frac{\partial U}{\partial t} \quad (5.55)$$

são, respectivamente, as densidades de carga e corrente em unidades apropriadas.

Em resumo, as equações de Maxwell acarretam a condição (5.53) sobre os campos elétricos (5.42). Levando em consideração a condição (5.53) e também a fórmula (5.46), segue que

$$\mathbf{E} = \frac{\ddot{\rho}}{\rho} \mathbf{q} + \frac{1}{\rho^4} \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q}) - \frac{1}{\rho^2} \nabla U(\bar{\mathbf{q}}) \quad (5.56)$$

é a forma geral dos campos elétricos admissíveis. Para cada campo desta forma genérica, existe uma simetria de Noether dada pela expressão (5.25) e uma constante de movimento exata da forma (5.16), com  $\rho \neq 0$ .

Para especificar os campos elétricos admissíveis, é preciso escolher as funções arbitrárias  $\rho$  e  $U$ , além do vetor constante  $\boldsymbol{\Omega}$ . Finalmente, a expressão (5.56) determina uma classe de campos elétricos que inclui, como caso particular, campos centrais. Estes são obtidos fazendo  $\boldsymbol{\Omega} = 0$  e  $U = U(\bar{r})$ , sendo  $\bar{r}$  o módulo de  $\bar{\mathbf{q}}$ .

A forma da constante de movimento de Noether (5.16) requer os potenciais vetorial e escalar, bem como a função  $g$ , a qual satisfaz as equações (5.10–5.11). Os potenciais são dados por

$$\mathbf{A} = \frac{\gamma z}{r(x^2 + y^2)} (y, -x, 0) + \nabla \Lambda(\mathbf{q}, t), \quad (5.57)$$

$$V = -\frac{\ddot{\rho} r^2}{2\rho} + \frac{1}{2\rho^4} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q})^2 + \frac{1}{\rho^2} U(\bar{\mathbf{r}}) - \frac{\partial \Lambda}{\partial t}(\mathbf{q}, t), \quad (5.58)$$

sendo  $\Lambda(\mathbf{q}, t)$  uma função de calibre. A função  $g$  no sistema (5.10–5.11) é dada por

$$g = \frac{1}{2} (\dot{\rho}^2 + \rho \ddot{\rho}) r^2 + G\Lambda, \quad (5.59)$$

e a integral primeira exata (5.16) é

$$J = \frac{1}{2} (\rho \dot{\mathbf{q}} - \dot{\rho} \mathbf{q} - \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q} / \rho)^2 + U(\bar{\mathbf{q}}) + \gamma \boldsymbol{\Omega} \cdot \hat{\mathbf{r}}. \quad (5.60)$$

Como era de se esperar,  $J$  não contém a função de calibre  $\Lambda$ , mostrando um resultado intrínseco. A forma dos potenciais eletromagnéticos é questão apenas de conveniência, sendo secundário o seu papel. Além disso, verifica-se que  $J$ , de fato, é constante ao longo das trajetórias da equação de Lorentz.

### 5.3.2 O caso em que $\rho = 0$

Quando  $\rho = 0$ , a equação (5.35) se reduz a

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial \mathbf{q}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{E}, \quad (5.61)$$

que fornece a forma geral do campo elétrico para que haja invariância sob  $SO(3)$ , ou ao menos, sob algum subgrupo de  $SO(3)$ . Em outros termos, pode-se considerar situações em que há simetria frente a rotação em torno de apenas um eixo, e não sob o grupo completo das rotações. Para exaurir as diferentes classes de soluções da equação (5.61), é suficiente considerar dois casos. São eles o caso em que há simetria de rotação apenas em torno de um eixo e aquele em que há simetria de rotação em torno de qualquer eixo. Efetivamente, quando há simetria de rotação em torno de dois eixos, de imediato existe invariância sob o  $SO(3)$  completo. Este fato pode ser entendido examinando a álgebra dos geradores (5.28–5.30). Pode haver invariância apenas sob  $L_3$ , correspondendo a simetria de rotação em torno do eixo  $z$ . Havendo invariância também sob  $L_1$ , por exemplo, decorrerá invariância sob  $L_2$ . De fato,  $L_2 = [L_3, L_1]$ . Para maiores detalhes a respeito, ver [114].

Considerando rotações em torno do eixo  $z$  apenas, deve-se tomar  $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega_3)$  na equação (5.61), com  $\Omega_3 \neq 0$ . Em outros termos,  $G$  reduz-se a  $L_3$ , o gerador das rotações em torno do eixo  $z$ . Para esta situação, a solução geral é

$$\mathbf{E} = E_r(r, \theta, t)\hat{r} + E_\theta(r, \theta, t)\hat{\theta} + E_\phi(r, \theta, t)\hat{\phi}, \quad (5.62)$$

em coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  tais que  $x = r \cos \phi \sin \theta$ ,  $y = r \sin \phi \sin \theta$ ,  $z = r \cos \theta$ .

Foi obtida a classe geral dos campos elétricos com simetria azimutal. Utilizando um potencial escalar  $V = V(r, \theta, t)$  apropriado, juntamente com o potencial vetorial (5.57), obtém-se

$$g = G\Lambda \quad (5.63)$$

como solução do sistema (5.10–5.11). A constante de movimento exata (5.16) correspondente é

$$J_3 = \Omega_3(y\dot{x} - x\dot{y} + \gamma z/r), \quad (5.64)$$

independente do calibre. Esta integral primeira exata é proporcional à terceira componente do vetor de Poincaré definido na relação (5.18).

Quando se analisa o caso de invariância sob o  $SO(3)$  completo, recobra-se a constância das demais componentes do vetor de Poincaré. De fato, os campos elétricos correspondendo a invariância sob o grupo completo de rotações são os campos centrais,

$$\mathbf{E} = E(r, t)\hat{r}, \quad (5.65)$$

possivelmente dependentes do tempo. Neste caso, os geradores de simetria são  $L_1, L_2$  e  $L_3$ . Para cada simetria, existe uma constante de movimento exata (5.16) associada.

Considerando o gerador  $L_1$ , tomando  $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, 0, 0)$  e usando  $V = V(r, t)$ , obtém-se

$$g = \Omega_1 \gamma x r / (x^2 + y^2) + G\Lambda \quad (5.66)$$

como solução do sistema (5.10–5.11). A constante de movimento exata (5.16) correspondente é

$$J_1 = \Omega_1 (z\dot{y} - y\dot{z} + \gamma x/r). \quad (5.67)$$

Analogamente, invariância sob  $L_2$  está associada a

$$g = \Omega_2 \gamma y r / (x^2 + y^2) + G\Lambda \quad (5.68)$$

como solução das equações (5.10–5.11) e a constante de movimento exata

$$J_2 = \Omega_2 (x\dot{z} - z\dot{x} + \gamma y/r). \quad (5.69)$$

Como resultado, o movimento de partícula carregada sob o campo de um monopolo magnético e de um campo elétrico central possui as constantes de movimento de Noether  $J_1, J_2$  e  $J_3$  nas fórmulas (5.67), (5.69) e (5.64). As três podem ser combinadas para formar o vetor de Poincaré. Tanto quanto se sabe, esta é a primeira derivação do vetor de Poincaré via simetrias de Noether geométricas.

Conclui-se a seção assinalando que foram obtidas três classes de potenciais escalares na equação (5.1) para os quais existe simetria de Noether, com  $\mathbf{B}$  dado pela definição (5.17). Quando  $\rho \neq 0$ , o potencial admissível é dado na equação (5.58). Quando  $\rho = 0$  são admitidos os potenciais  $V = V(r, \theta, t)$  ou  $V = V(r, t)$ .

## 5.4 Aplicações

Nesta seção, aplicam-se os resultados das seções precedentes a dois campos elétricos relevantes, dados por

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{osc} = -\omega^2(t)\mathbf{q} + c^2\mathbf{q}/r^4, \quad (5.70)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{kep} = -\mu(t)\mathbf{q}/r^3 + c^2\mathbf{q}/r^4. \quad (5.71)$$

sendo  $\omega(t)$  e  $\mu(t)$  inicialmente funções arbitrárias e  $c$  uma constante numérica. Conforme observado anteriormente, para  $\omega$  e  $\mu$  constantes e  $c$  igual à carga magnética, isto é,  $c = \gamma$ , as trajetórias confinadas da equação de Lorentz são fechadas. Quanticamente,

há degenerescência dos níveis de energia. A degenerescência relaciona-se à existência das constantes de movimento exatas tensorial (5.21) e vetorial (5.22).

No caso geral, não estacionário, os campos (5.70–5.71) produzem os problemas de um monopolo perturbado por potenciais harmônicos e Keplerianos dependentes do tempo, com a adição de uma força centrífuga extra. Estes sistemas também podem ser encarados como perturbações do oscilador harmônico isotrópico dependente do tempo e do problema de Kepler dependente do tempo [170]. Tendo em vista a existência de constantes de movimento exatas além da energia nos casos estacionários, é de interesse analisar as simetrias de Noether no casos dependentes do tempo. Será analisado também o papel da constante numérica  $c$  na obtenção de simetrias de Noether. Por fim, discutir-se-á a solução das equações de movimento através das constantes de movimento exatas derivadas via teorema de Noether. Os dois sistemas serão discutidos separadamente.

#### 5.4.1 Perturbação por um potencial harmônico dependente do tempo

Como a força elétrica é central,  $SO(3)$  pertence ao grupo de simetrias de Noether, sendo conservado o vetor de Poincaré (5.18). Entretanto, o problema não possui somente simetria rotacional. Inserindo o campo (5.70) na condição (5.15), vem

$$\rho\ddot{\rho} + 3\dot{\rho}\ddot{\rho} + 4\omega^2\rho\dot{\rho} + 2\omega\dot{\omega}\rho^2 = 0. \quad (5.72)$$

Esta equação de terceira ordem não envolve  $\Omega$  nem  $c$ , e pode ser reduzida à equação de Pinney

$$\ddot{\rho} + \omega^2(t)\rho = k/\rho^3, \quad (5.73)$$

sendo  $k$  uma constante. Alternativamente [18, 171], definindo

$$\xi = \rho^2, \quad (5.74)$$

lineariza-se a equação (5.72),

$$\ddot{\xi} + 4\omega^2\dot{\xi} + 4\omega\dot{\omega}\xi = 0. \quad (5.75)$$

O valor da constante  $k$  na equação de Pinney é dado, correspondentemente, por

$$k = \frac{1}{2}(\xi\ddot{\xi} - \dot{\xi}^2/2 + 2\omega^2\xi^2). \quad (5.76)$$

A solução geral de (5.75) é qualquer combinação linear de três de suas soluções particulares linearmente independentes  $\xi_1, \xi_2$  e  $\xi_3$ ,

$$\xi = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + c_3\xi_3, \quad (5.77)$$

sendo  $c_1, c_2$  e  $c_3$  constantes.

A cada solução  $\xi_i$  linearmente independente corresponde uma simetria, de gerador da forma (5.27) com  $\xi_i = \rho_i^2$ ,

$$G_i = \xi_i \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\dot{\xi}_i \mathbf{q}}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (5.78)$$

e uma constante de movimento exata. A forma mais rápida de obter a constante de movimento exata é notar que o potencial escalar do problema,

$$V = \omega^2(t)r^2/2 + c^2/2r^2, \quad (5.79)$$

pode ser posto na forma (5.58) fazendo

$$\mathbf{\Omega} = 0, \quad U = U(\bar{r}) = k\bar{r}^2/2 + c^2/2\bar{r}^2, \quad \Lambda = 0, \quad (5.80)$$

onde  $\bar{r} = r/\rho$ , juntamente com a equação de Pinney (5.73). Recorrendo à relação (5.60), que fornece a forma geral das constantes de Noether quadráticas admissíveis, obtém-se as integrais primeiras exatas

$$J_i = \frac{1}{2} \left( \xi_i \dot{\mathbf{q}}^2 - \dot{\xi}_i \mathbf{q} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \frac{r^2}{2} (\ddot{\xi}_i + 2\omega^2 \xi_i) + \frac{c^2 \xi_i}{r^2} \right), \quad (5.81)$$

com  $i = 1, 2, 3$ .

Foi visto que a obtenção das simetrias de Noether do problema do monopolo-oscilador dependente do tempo está sujeita a solução da equação de Pinney ou, alternativamente, da equação linear (5.75). Em particular, quando

$$\omega = \omega_0, \quad (5.82)$$

para uma constante  $\omega_0$ , correspondendo ao problema estacionário, é possível resolver exatamente a equação (5.75). A solução é

$$\xi = c_1 + c_2 \cos(2\omega_0 t) + c_3 \sin(2\omega_0 t). \quad (5.83)$$

Na equação de Pinney (5.73) correspondente, a constante  $k$  é dada por  $k = \omega_0^2(c_1^2 - c_2^2 - c_3^2)$ .

Os geradores de simetria (5.78) têm a forma

$$G_1 = \frac{\partial}{\partial t}, \quad (5.84)$$

$$G_2 = \cos(2\omega_0 t) \frac{\partial}{\partial t} - \omega_0 \sin(2\omega_0 t) \mathbf{q} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}, \quad (5.85)$$

$$G_3 = \sin(2\omega_0 t) \frac{\partial}{\partial t} + \omega_0 \cos(2\omega_0 t) \mathbf{q} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}. \quad (5.86)$$

Juntamente com os geradores do  $SO(3)$ ,  $G_1, G_2$  e  $G_3$  constituem a álgebra de simetrias de Noether completa do sistema do monopolo com potencial harmônico dependente do tempo. A estrutura algébrica é determinada pelos comutadores

$$[G_1, G_2] = -2\omega_0 G_3 \quad , \quad [G_2, G_3] = 2\omega_0 G_1 \quad , \quad (5.87)$$

$$[G_3, G_1] = -2\omega_0 G_2 \quad , \quad [L_i, L_j] = -\epsilon_{ijk} L_k \quad , \quad (5.88)$$

$$[G_i, L_j] = 0 \quad , \quad i, j = 1, 2, 3 \quad , \quad (5.89)$$

sendo  $L_1, L_2, L_3$  os geradores (5.28–5.30) do  $SO(3)$ .

A álgebra  $\{G_1, G_2, G_3\}$  é isomórfica a  $so(2, 1)$ . Para verificar isto, basta definir a combinação linear

$$\bar{G}_1 = (G_1 - G_3)/4\omega_0 \quad , \quad \bar{G}_2 = G_2/\omega_0 \quad , \quad \bar{G}_3 = (G_1 + G_3)\omega_0 \quad . \quad (5.90)$$

Estes vetores satisfazem as mesmas relações de comutação (5.41) dos geradores do  $SO(2, 1)$ ,

$$[\bar{G}_1, \bar{G}_2] = \bar{G}_1 \quad , \quad [\bar{G}_1, \bar{G}_3] = 2\bar{G}_2 \quad [\bar{G}_2, \bar{G}_3] = \bar{G}_3 \quad . \quad (5.91)$$

Assim, a álgebra de simetria do problema do monopolo-oscilador independente do tempo é a álgebra  $so(2, 1) \times so(3)$ , a mesma do problema do monopolo simples.

Conforme já foi visto, invariância sob o  $SO(3)$  está associada à conservação do vetor de Poincaré  $\mathbf{D}$  dado em (5.18). Por outro lado, invariância sob  $G_1, G_2$  e  $G_3$  associa-se, respectivamente, às constantes de movimento exatas

$$J_1 = \frac{1}{2}(\dot{\mathbf{q}}^2 + \omega_0^2 r^2 + c^2/r^2) \quad , \quad (5.92)$$

$$J_2 = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 \cos(2\omega_0 t) + \omega_0 \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{q}} \sin(2\omega_0 t) - \frac{1}{2}\omega_0^2 r^2 \cos(2\omega_0 t) + \frac{c^2}{2r^2} \cos(2\omega_0 t) \quad , \quad (5.93)$$

$$J_3 = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^2 \sin(2\omega_0 t) - \omega_0 \mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{q}} \cos(2\omega_0 t) - \frac{1}{2}\omega_0^2 r^2 \sin(2\omega_0 t) + \frac{c^2}{2r^2} \sin(2\omega_0 t) \quad , \quad (5.94)$$

À primeira vista, parece que as seis simetrias de Noether estão associadas a seis constantes de movimento exatas, a saber, as três componentes do vetor de Poincaré e  $J_1, J_2$  e  $J_3$  dados nas relações (5.92–5.94). Entretanto, uma destas integrais primeiras exatas é funcionalmente dependente das demais, pois

$$\omega_0^2 \mathbf{D}^2 = J_1^2 - J_2^2 - J_3^2 \quad . \quad (5.95)$$

As constantes de movimento exatas  $\mathbf{D}, J_1, J_2$  e  $J_3$  podem ser utilizadas para integrar eficientemente as equações de movimento. Para qualquer campo elétrico da forma

$\mathbf{E} = E(\mathbf{q}, t)\hat{\mathbf{r}}$ , o vetor de Poincaré permite reduzir o problema a um problema unidimensional. Isto vale, em particular, para o sistema do monopolo com potencial harmônico independente do tempo. Da definição do vetor de Poincaré (5.18), segue que

$$\mathbf{D} \cdot \hat{\mathbf{r}} = -\gamma, \quad (5.96)$$

mostrando que o vetor posição faz um ângulo constante com  $\mathbf{D}$ . Como  $\mathbf{D}$  é constante, segue que o movimento se dá num cone centrado no monopolo. Tomando  $\mathbf{D} = (0, 0, D)$ , o que é uma escolha sempre possível através de uma rotação apropriada do sistema de coordenadas, decorre que

$$\cos \theta = -\gamma/D, \quad (5.97)$$

$$\dot{\phi} = D/r^2. \quad (5.98)$$

A equação (5.97) mostra que o ângulo  $\theta$  não varia, correspondendo ao movimento se dar num cone centrado na origem. Já a equação (5.98) mostra que o ângulo  $\phi(t)$  pode ser obtido, uma vez conhecido  $r(t)$ , através da quadratura

$$\phi(t) = \phi_0 + D \int^t d\lambda/r^2(\lambda), \quad (5.99)$$

sendo  $\phi_0$  um ângulo de referência. Assim, essencialmente o problema reduz-se a encontrar  $r(t)$ , o qual é solução da componente radial da equação de Lorentz.

No caso do sistema do monopolo com potencial harmônico independente do tempo, a variável radial pode ser encontrada diretamente das constantes de movimento de Noether, sem necessidade da resolução da componente radial da equação de Lorentz. De fato, obtém-se

$$r^2(t) = \frac{1}{\omega_0^2}(J_1 - J_2 \cos(2\omega_0 t) - J_3 \sin(2\omega_0 t)), \quad (5.100)$$

o que, inserido na solução (5.99), fornece

$$\phi(t) = \phi_0 + \arctan \left( \frac{-J_3 + (J_1 + J_2) \tan(2\omega_0 t)}{\omega_0 D} \right). \quad (5.101)$$

As fórmulas (5.97) e (5.100–5.101) constituem a solução exata do sistema monopolo-oscilador independente do tempo, envolvendo quatro constantes arbitrárias,  $J_1, J_2, J_3$  e  $c$ . Na verdade,  $D$  é funcionalmente dependente destas constantes, conforme o resultado (5.95). A solução exata encontrada não envolve as seis constantes de integração necessárias porque estipulou-se a anulação das duas primeiras componentes do vetor de Poincaré. A

incorporação destas constantes não é difícil, mas prejudica a apresentação do resultado final e será omitida. Ressalte-se que outras frequências para as quais a equação de Pinney (5.73) pode ser resolvida exatamente resultam em outros problemas do tipo monopolo com potencial harmônico solúveis exatamente.

Conclui-se a subseção enunciando seus resultados. Obteve-se o grupo de simetrias de Noether completo do sistema do monopolo com potencial harmônico dependente do tempo com adição de uma força centrífuga extra. Esta força, embora permita a existência de órbitas fechadas para  $c = \gamma$  na equação (5.70), não tem qualquer papel na análise das simetrias de Noether. Os geradores das simetrias são dados pelas fórmulas (5.28–5.30) e (5.78), onde  $\xi_1, \xi_2$  e  $\xi_3$  são soluções linearmente independentes da equação linear de terceira ordem (5.75). As constantes de movimento de Noether são o vetor de Poincaré e as funções (5.81), as quais são quadráticas na velocidade. Ao menos no caso estacionário, é possível resolver exatamente a equação (5.75), com o que se obtém explicitamente todas as simetrias de Noether e as leis de conservação correspondentes. Através destas leis de conservação, obtém-se as trajetórias dinâmicas sem necessidade de resolver a equação de Lorentz.

#### 5.4.2 Sistema de um monopolo magnético com um potencial gravitacional dependente do tempo

Serão analisadas as simetrias de Noether quando o campo elétrico é dado pela definição (5.71). Como a força elétrica é central, a simetria  $S0(3)$  é válida, com a conseqüente constância do vetor de Poincaré. Resta, então, saber se existem outras simetrias, ao menos para alguma função  $\mu(t)$  ou algum parâmetro  $c$  específicos no campo (5.71). Para responder a questão, basta inserir o campo elétrico na condição básica (5.15) para existência de simetrias de Noether. Verifica-se que esta condição é identicamente satisfeita se e somente se

$$\ddot{\rho} = k/\rho^3, \quad (5.102)$$

$$\mu(t) = \mu_0/\rho, \quad (5.103)$$

sendo  $k$  e  $\mu_0$  constantes. Conseqüentemente, a única forma permitida da função  $\rho(t)$  no gerador de simetrias de Noether é dada por

$$\rho^2(t) = c_1 + 2c_2t + c_3t^2, \quad (5.104)$$

onde  $c_1, c_2$  e  $c_3$  são constantes numéricas satisfazendo

$$c_1 c_3 - c_2^2 = k. \quad (5.105)$$

A simetria de Noether correspondente, com gerador

$$G = (c_1 + 2c_2 t + c_3 t^2)^{1/2} \frac{\partial}{\partial t} + (c_2 + c_3 t) \mathbf{q} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}}, \quad (5.106)$$

é admitida apenas se

$$\mu(t) = \mu_0 / (c_1 + 2c_2 t + c_3 t^2)^{1/2}. \quad (5.107)$$

A simetria (5.106) foi obtida por Katzin e Levine para o problema de Kepler dependente do tempo sem a presença de um monopolo magnético [172]. Observe-se que o valor da constante  $c$  novamente não tem relevância na obtenção das simetrias de Noether.

Existe uma diferença crucial entre as formas (5.104) e (5.37) da função  $\rho(t)$ . No caso da forma (5.37), as constantes  $c_i$  não aparecem na equação de Lorentz. Conseqüentemente, é possível escolher as constantes  $c_i$  de modo a obter três simetrias de Noether. No caso do sistema do monopolo com potencial Kepleriano,  $c_1, c_2$  e  $c_3$  estão presentes nas equações de movimento através de  $\mu(t)$ . Logo, não podem ser arbitrariamente fixadas, e existe apenas uma única simetria de Noether além do grupo  $SO(3)$ .

Sob a condição (5.107), o potencial escalar do sistema,

$$V = V(r, t) = -\frac{\mu_0}{\rho r} + \frac{c^2}{2r^2}, \quad (5.108)$$

pode ser posto na forma (5.58) tomando

$$U = U(\bar{r}) = \frac{k\bar{r}^2}{2} - \frac{\mu_0}{\bar{r}} + \frac{c^2}{2\bar{r}^2}, \quad \mathbf{\Omega} = 0, \quad \Lambda = 0. \quad (5.109)$$

A integral primeira de Noether correspondente, obtida das equações (5.16) e (5.109), é

$$J = \frac{1}{2} (\rho \dot{\mathbf{q}} - \dot{\rho} \mathbf{q})^2 + \frac{kr^2}{2\rho^2} - \frac{\mu_0 \rho}{r} + \frac{c^2 \rho^2}{2r^2}. \quad (5.110)$$

Como o campo elétrico é central, as equações (5.97–5.98) permanecem válidas. Usando estas equações, é possível eliminar a parte angular de  $J$ ,

$$J = \frac{1}{2} (\rho \dot{r} - \dot{\rho} r)^2 + \frac{kr^2}{2\rho^2} - \frac{\mu_0 \rho}{r} + \frac{\bar{D}^2 \rho^2}{2r^2}, \quad (5.111)$$

onde  $\bar{D}^2 = D^2 - \gamma^2 + c^2$ . A representação (5.111) envolve apenas a coordenada radial, e permite a redução do problema a quadratura. Utilizando as coordenadas canônicas para o grupo de transformações com gerador (5.106),

$$\bar{r} = r/\rho \quad , \quad \bar{t} = \int^t d\lambda/\rho^2(\lambda) \quad , \quad (5.112)$$

obtem-se  $G = \partial/\partial\bar{t}$  e

$$J = \frac{1}{2} \left( \frac{d\bar{r}}{d\bar{t}} \right)^2 + \bar{U}(\bar{r}) \quad , \quad (5.113)$$

onde

$$\bar{U}(\bar{r}) = \frac{k\bar{r}^2}{2} - \frac{\mu_0}{\bar{r}} + \frac{\bar{D}^2}{2\bar{r}^2} \quad . \quad (5.114)$$

Com as coordenadas canônicas do grupo, a constante de movimento de Noether adquire a forma de uma energia, com função potencial  $\bar{U}$ . Note-se a diferença entre as funções  $U$  e  $\bar{U}$ , definidas respectivamente, nas equações (5.80) e (5.109).

Não fosse a presença do termo harmônico proporcional a  $k$  no potencial  $\bar{U}$ , formalmente  $J$  seria a energia de um problema de Kepler autônomo. Para tornar a analogia estrita, bastaria substituir  $\bar{D}$  na equação (5.114) por  $L$ , o valor absoluto do momentum angular. Entretanto, as órbitas do problema de Kepler usual são planares, enquanto aqui o movimento se dá na superfície de um cone. De fato, isto justifica-se, pois o campo elétrico é central, dando validade à equação (5.97).

Seguindo um procedimento inteiramente análogo ao encontrado nos livros de mecânica sobre a integração do movimento unidimensional de uma partícula sujeita a um potencial estacionário, obtém-se da fórmula (5.113) a quadratura

$$\bar{t}(\bar{r}) = \bar{t}_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \int^{\bar{r}} \frac{d\lambda}{(J - \bar{U}(\lambda))^{1/2}} \quad , \quad (5.115)$$

sendo  $\bar{t}_0$  uma constante. Retornando às variáveis físicas  $(r, t)$ , a equação (5.115) é expressa conforme

$$\int^t \frac{d\lambda}{\rho^2(\lambda)} = \bar{t}_0 + \frac{1}{\sqrt{2}} \int^{r/\rho(t)} \frac{d\lambda}{(J - \bar{U}(\lambda))^{1/2}} \quad , \quad (5.116)$$

que fornece, implicitamente, a trajetória  $r(t)$ , envolvendo as constantes de integração  $\bar{t}_0$  e  $J$ .

Formalmente, obteve-se a redução do problema às quadraturas (5.116), fornecendo implicitamente  $r(t)$ , e (5.98) (que é válida, pois que o campo elétrico é central) fornecendo  $\phi(t)$ . Entretanto, a integral no lado direito da equação (5.116) não é factível analiticamente para valores genéricos da constante  $k$  que comparece no potencial  $\bar{U}$  na fórmula

(5.114). No que segue, o tratamento se restringe ao caso

$$k = 0, \quad (5.117)$$

para o qual a integral na equação (5.116) e alguns cálculos subseqüentes podem ser feitos exatamente. Supondo que  $c_1 \neq 0$  (o que não implica em conseqüências drásticas), a forma da equação (5.107) mostra que não se perde generalidade ao tomar  $c_1 = 1$ . Com isto, a definição  $k = 0$  implica, de acordo com a expressão (5.105),

$$c_1 = 1 \quad , \quad c_2 = \Omega \quad , \quad c_3 = \Omega^2 \quad , \quad (5.118)$$

para alguma constante  $\Omega$ . O caso  $\Omega = 0$  está associado ao problema autônomo, de modo que será tomado  $\Omega > 0$  por definição. O caso  $\Omega < 0$  pode ser analisado similarmente.

Usando as equações (5.112), (5.104) e (5.118), vem que

$$\rho = 1 + \Omega t \quad , \quad \bar{t} = t/(1 + \Omega t) \quad , \quad \bar{r} = r/(1 + \Omega t) \quad . \quad (5.119)$$

De acordo com a terminologia de Munier et al. [170], a mudança de parâmetro temporal  $t \rightarrow \bar{t}$  na transformação (5.119) é uma renormalização do tempo. A denominação corresponde à diminuição do domínio de variação do novo tempo. De fato, se  $t \in [0, \infty)$ , então  $\bar{t} \in [0, 1/\Omega)$ .

Além de se tomar  $k = 0$ , serão consideradas condições iniciais para as quais

$$J < 0, \quad (5.120)$$

associadas a movimentos confinados da nova variável radial  $\bar{r}$ . O confinamento quando  $J < 0$  pode ser entendido dada a analogia entre  $J$  e a energia no problema de dois corpos autônomo, válida quando  $k = 0$ . Os casos  $J = 0$  ou  $J > 0$  são tratáveis analogamente e serão omitidos.

Para  $k = 0, J < 0$ , a expressão geral (5.116) ou, equivalentemente, a relação (5.115) leva a

$$\begin{aligned} \bar{t}(\bar{r}) &= \frac{t}{(1 + \Omega t)} = \\ &= \bar{t}_0 + \frac{1}{2J} (2J\bar{r}^2 + 2\mu_0\bar{r} - \bar{D}^2)^{1/2} - \frac{\mu_0}{(-2J)^{3/2}} \arcsin \left( \frac{2J\bar{r} + \mu_0}{(\mu_0^2 + 2J\bar{D}^2)^{1/2}} \right) \end{aligned} \quad (5.121)$$

onde  $\bar{r} = r/(1 + \Omega t)$  conforme a equação (5.119). Está-se excluindo, por ora, o caso degenerado no qual  $\mu_0^2 + 2J\bar{D}^2 = 0$ .

A equação (5.121) é uma equação transcendental para a trajetória  $r(t)$ , a qual, portanto, somente pode ser conhecida implicitamente. Uma dificuldade estritamente similar ocorre no tratamento do problema de dois corpos autônomo. Tal como neste problema, entretanto, é possível encontrar  $r(\phi)$ , isto é, a órbita parametrizada pelo ângulo azimutal  $\phi$ . Para isto, é preciso utilizar a fórmula

$$\frac{d\bar{r}}{d\bar{t}} = \frac{D}{\bar{r}^2} \frac{d\bar{r}}{d\phi}, \quad (5.122)$$

obtida através das equações (5.98) e (5.112), de modo a expressar a constante de movimento exata  $J$  como

$$J = \frac{D^2}{2\bar{r}^4} \left( \frac{d\bar{r}}{d\phi} \right)^2 + \bar{U}(\bar{r}). \quad (5.123)$$

Obtém-se a quadratura

$$\phi = \phi_0 + \frac{D}{\sqrt{2}} \int^{\bar{r}} \frac{d\lambda}{\lambda^2(J - \bar{U}(\lambda))^{1/2}}, \quad (5.124)$$

que pode ser feita de modo exato, sendo  $\phi_0$  um ângulo de referência. Resulta que

$$\bar{r}(\phi) = \frac{p}{1 - \epsilon \cos((\bar{D}/D)(\phi - \phi_0))}, \quad (5.125)$$

onde

$$p = \bar{D}^2/\mu_0 \quad , \quad \epsilon = (1 + 2J\bar{D}^2/\mu_0^2)^{1/2}. \quad (5.126)$$

Sejam  $\bar{x} = \bar{r} \cos \phi \sin \theta$ ,  $\bar{y} = \bar{r} \sin \phi \sin \theta$  e  $\bar{z} = \bar{r} \cos \theta$  as componentes cartesianas de  $\bar{\mathbf{q}}$ . As órbitas encontradas a partir daí e da equação (5.125) são de diferentes tipos, de acordo essencialmente com a razão  $\bar{D}/D$ . Se esta razão for um número racional, as trajetórias obtidas a partir da fórmula (5.125) são periódicas. Por outro lado, quando  $\bar{D}/D$  for um número irracional as trajetórias são quasi-periódicas, preenchendo densamente uma área finita no espaço de coordenadas  $(\bar{r})$ . Ressalte-se que os resultados encontrados referem-se à variável  $\bar{r}$ , e não à variável radial física  $r$ . Além disso, não é necessário que  $\bar{D}/D = 1$ , ou, de modo equivalente, que  $c = \gamma$ , para que haja movimento periódico.

É interessante analisar a projeção do movimento no eixo  $\bar{z} = 0$ . Em particular, quando  $\bar{D}/D = 1$ , obtém-se uma elipse de excentricidade  $\epsilon$ . De outro modo, figuras geométricas de diferentes tipos são obtidas, preenchendo ou não uma área finita, conforme seja  $\bar{D}/D$  irracional ou não. Na verdade, pode-se provar que estas órbitas são casos particulares numa classe de órbitas planares obtidas por Gorringe e Leach [173]. Presentemente, entretanto, o movimento é tridimensional.

As órbitas no espaço das variáveis físicas  $(r, \phi)$  são encontráveis através de

$$r(\phi) = \rho(t(\bar{r}(\phi))) \bar{r}(\phi), \quad (5.127)$$

onde  $\bar{r}(\phi)$  é obtida da fórmula (5.125) e  $t(\bar{r})$  da fórmula (5.121). Utilizando-se a transformação (5.119), é possível reescrever a equação das órbitas segundo

$$r(\phi) = \frac{\bar{r}(\phi)}{1 - \Omega \bar{t}(\bar{r}(\phi))}. \quad (5.128)$$

Esta é a forma exata das órbitas no espaço das variáveis físicas, resultando numa expressão extremamente complicada quando se substitui  $\bar{t}(\bar{r}(\phi))$  das equações (5.121) e (5.125). A expressão será omitida.

Enquanto a variável  $\bar{r}$  executa trajetórias confinadas, genericamente  $r$  cresce indefinidamente. Esta conclusão pode ser obtida mesmo sendo (5.121) uma equação transcendental. De fato, lançando mão apenas do resultado (5.125) deduz-se que

$$a \leq \bar{r} \leq b, \quad (5.129)$$

onde

$$a = p/(1 + \epsilon) \quad , \quad b = p/(1 - \epsilon) \quad . \quad (5.130)$$

A equação (5.129) mostra, uma vez mais, que a coordenada  $\bar{r}$  é limitada. Mostra, também, como inferir a forma assintótica do movimento quando  $t \rightarrow \infty$ . Assintoticamente, a expressão (5.119) acarreta  $r = \bar{r}\Omega t$  quando  $t \rightarrow \infty$ . Com isto, a relação (5.129) implica

$$a\Omega t \leq r \leq b\Omega t \quad , \quad t \rightarrow \infty \quad . \quad (5.131)$$

Conclui-se da desigualdade (5.131) que a função  $r(t)$  cresce indefinidamente, a uma taxa linear. A dedução deste resultado qualitativo não necessita da forma exata da solução, que só seria possível encontrar resolvendo a equação transcendental (5.121).

O caso  $a = b$  é particularmente interessante, pois permite o cálculo exato das trajetórias em função do tempo. Quando  $a = b$ , a “excentricidade”  $\epsilon$  é nula. Com isto, a equação transcendental (5.121) não é mais aplicável devido ao surgimento de um denominador singular. Entretanto, a expressão (5.125) permanece válida, acarretando  $\bar{r} = p$ . Em outros termos, o movimento no espaço de configuração re-escalonado se dá num círculo que é a intersecção entre um cone e uma esfera, especificados, respectivamente, por  $\cos \theta = -\gamma/D$  e  $\bar{r} = p$ . No espaço de configuração físico,  $r = (1 + \Omega t)\bar{r}$  e a equação (5.98) levam a

$$r = (1 + \Omega t)p \quad , \quad \phi = \phi_0 + Dt/p^2 \quad . \quad (5.132)$$

A trajetória é planar, na forma de uma espiral que se afasta da origem a uma taxa linear no tempo. Para  $\Omega = 0$ , isto é, no caso autônomo, a partícula permanece executando movimento circular.

Abaixo, segue um apanhado dos resultados encontrados neste capítulo. Foi determinado o grupo de simetrias de Noether do sistema de uma partícula carregada executando movimento não relativístico sujeita ao campo de um monopolo magnético e a um campo elétrico geral. O resultado foi obtido resolvendo o sistema de equações (5.14–5.15) quando  $\mathbf{B}$  é o campo de um monopolo magnético. Foi encontrada uma vasta classe de campos elétricos tais que o funcional da ação possui simetrias de Noether. As constantes de movimento exatas associadas, de formas quadrática ou linear na velocidade, foram utilizadas na solução exata de dois sistemas de interesse. Estes sistemas são obtidos quando o campo elétrico produz forças harmônica ou Kepleriana dependentes do tempo, com a possível adição de uma força repulsiva extra.

Uma extensão imediata deste trabalho seria a obtenção de outras soluções do sistema (5.14–5.15). Este sistema, válido para um campo eletromagnético genérico, é de grande interesse na detecção de movimentos integráveis de partículas carregadas. Estão em curso trabalhos nesta direção. Outra extensão seria a aplicação das técnicas de simetrias de Lie geométricas para o movimento de partículas carregadas sob ação de um monopolo magnético e de um campo elétrico. A favor desta abordagem, estão o fato de que o grupo de simetrias de Lie inclui o grupo de Noether como caso particular, e a dispensa de uma formulação variacional. Entretanto, as simetrias de Lie não levam tão diretamente a leis de conservação. Além disso, provavelmente não se chega a um resultado tão compacto quanto o obtido mediante simetrias de Noether. No presente trabalho, por exemplo, pode-se dizer que todo o tratamento se reduz à solução das equações (5.14–5.15). Por outro lado, a obtenção do grupo completo de simetrias de Lie geométricas da equação de Lorentz não relativística com campos eletromagnéticos gerais requer a solução de um sistema de trinta e seis equações acopladas [174]. Certamente, muitas destas equações são trivialmente solúveis, mas a redução do sistema todo a um conjunto compacto de equações é uma questão aberta. Finalmente, pode-se considerar também o uso de simetrias de Noether ou de Lie dinâmicas, envolvendo a velocidade no gerador de simetrias.

## *Capítulo 6*

### CONCLUSÃO

Neste trabalho, foram analisadas as propriedades fundamentais dos sistemas de Ermakov generalizados. Sem dúvida, isto contribuiu para preencher várias lacunas existentes na literatura, que se direciona basicamente aos sistemas de Ermakov com frequência dependente apenas do tempo. A presente análise dos sistemas de Ermakov generalizados centrou-se em dois de seus aspectos: a estrutura de seu grupo de simetrias e o seu possível caráter Hamiltoniano. Outro tema abordado aqui foi a busca de simetrias de Noether para o movimento não-relativístico de uma partícula carregada sob ação de campos eletromagnéticos gerais.

O estudo dos sistemas de Ermakov generalizados do ponto de vista da teoria das simetrias de Lie geométricas rendeu bons resultados. Obteve-se uma nova classe de sistemas de Ermakov generalizados, com a propriedade de admitir simetrias de Lie geométricas. Esta classe de sistemas dinâmicos, definida pelas equações (3.81–3.82), engloba os sistemas de ELRR como caso especial. Em particular, o sistema (3.81–3.82) pode depender das componentes da velocidade, o que é proibido no caso dos sistemas de ELRR. Esta extensão advém da possível dependência da frequência nas variáveis dinâmicas, no caso dos sistemas de Ermakov generalizados.

Por outro lado, a existência de formalismos Hamiltonianos para sistemas de Ermakov é de interesse em vários contextos na física, em particular no tocante à mecânica quântica. Neste sentido, os sistemas de Ermakov Hamiltonianos derivados no capítulo 4 podem vir a desempenhar um papel relevante em várias aplicações. Estes sistemas generalizam a classe de sistemas de Ermakov Hamiltonianos obtida por Cerveró e Lejarreta, concernente aos sistemas de ELRR, por conter frequências dependentes das variáveis dinâmicas. Foram exibidas aplicações iniciais da nova categoria de sistemas de Ermakov Hamiltonianos, nos casos de um sistema de três corpos interagindo via um potencial de Calogero e de um sistema com simetria dinâmica. Além disso, a existência de uma descrição variacional

abre a perspectiva de se utilizar o teorema de Noether, na busca de sistemas completamente integráveis. Esta possibilidade é fundamental, dado que os sistemas de Ermakov generalizados Hamiltonianos apresentam dependência explícita no tempo. O caráter não autônomo faz com que a Hamiltoniana do sistema não se conserve. É necessária, portanto, uma segunda constante de movimento exata que, em conjunto com o invariante de Ermakov, garantiria a integrabilidade completa. Na busca do segundo invariante exato, a aplicação do teorema de Noether é uma estratégia profícua, resultando na identificação do potencial (4.82). Este potencial, contendo duas funções arbitrárias, é completamente integrável, graças aos invariantes de Ermakov e Noether associados. Foram construídas explicitamente as soluções exatas, clássica e quântica.

A formulação do teorema de Noether fornecida no capítulo 4 pode ser facilmente utilizada no tratamento de sistemas físicos diversos não representados por sistemas de Ermakov Hamiltonianos. Mostrou-se, no capítulo 5, que a busca de simetrias de Noether para o movimento não relativístico de uma partícula carregada leva a duas equações diferenciais parciais lineares para os campos eletromagnéticos. Estas equações, dadas pelo sistema (5.14–5.15), envolvem o gerador de simetrias de Noether, podendo ser exploradas de várias maneiras. Uma das abordagens possíveis é, dado um campo eletromagnético específico, procurar identificar as simetrias de Noether admissíveis. Outra abordagem, adotada aqui, consiste em fixar a forma de um dos campos eletromagnéticos e buscar o outro e as simetrias de Noether correspondentes. No presente trabalho, optou-se por fixar o campo magnético como sendo o campo devido a uma carga magnética puntual situada na origem. A partir daí, foram identificados os campos elétricos e simetrias de Noether compatíveis. Como resultado desta estratégia, em particular, obteve-se a constância do vetor de Poincaré como resultado da existência de simetrias de Noether subjacentes. Além disso, encontrou-se uma ampla classe de campos elétricos compatíveis, que podem ser livremente superpostos ao campo de um monopolo magnético, sem prejuízo da existência de simetrias de Noether. Como casos particulares nesta classe de campos elétricos, foram tratados os casos de forças harmônicas e Coulombianas, dependentes do tempo, com a possível presença de uma força centrífuga. A solução exata da equação de Lorentz para estes problemas foi obtida com o auxílio dos invariantes de Noether associados à simetria subjacente. Finalmente, deve-se ressaltar a economia proporcionada pelo uso do teorema de Noether. Com a abordagem via teorema de Noether, reduziu-se toda a questão da existência de simetrias e leis de conservação à apenas duas equações, o sistema (5.14–5.15). Naturalmente, não estão sendo excluídas outras abordagens, baseadas, por

exemplo, no uso de simetrias de Noether dinâmicas (não geométricas).

Além de apresentar resultados novos, este trabalho contém também uma revisão crítica de propriedades já conhecidas dos sistemas de Ermakov. Em particular, mostrou-se que a linearização dos sistemas de Ermakov proposta na literatura não tem caráter universal, sendo válida apenas para os sistemas de ELRR e uma classe especial de sistemas de Ermakov generalizados. Esta classe, especificada pelas equações (2.77–2.78), está com sua potencialidade ainda por ser assessada. Como aplicação inicial da nova abordagem, foi possível entender a linearização dos sistemas de Kepler-Ermakov sob uma nova luz. Na verdade, os sistemas de Kepler-Ermakov são sistemas de Ermakov generalizados, passíveis de linearização segundo o mesmo esquema proposto para os sistemas de ELRR. Esta linearização, para ser implementada, requer uma solução particular da equação do OHDT. Na prática, isto pode esbarrar em sérios problemas.

Na análise do grupo de simetrias dos sistemas de ELRR feita na literatura, também se requer uma solução particular da equação do OHDT. De fato, a solução particular é necessária para a introdução de coordenadas que tornam autônomas as equações de movimento. No presente trabalho, entretanto, são focalizados os sistemas de Ermakov generalizados nas suas coordenadas originais, sem a exigência do conhecimento prévio de uma solução particular da equação do OHDT. É bom enfatizar, mais uma vez, que o sistema do OHDT não possui solução exata para uma frequência arbitrária. Daí segue a maior conveniência de trabalhar com as coordenadas originais.

Outros tópicos que mereceram atenção neste trabalho foram a teoria de Lewis e Riesenfeld e a obtenção de estados coerentes e de fases geométricas de Berry para sistemas quânticos com dependência temporal explícita. Ressalte-se que foi enfatizada a importância de uma clara interpretação dos conceitos das fases de Lewis e Riesenfeld e de Berry. Estes conceitos, como foi visto na seção 2.4, freqüentemente estão intimamente relacionados no limite adiabático no qual o sistema sob análise é lentamente variável. Entretanto, a relação precisa entre as fases de Lewis e Riesenfeld e de Berry depende da forma específica do sistema sob estudo. Com certeza, a obtenção de novos sistemas quânticos exatamente solúveis com dependência temporal explícita contribuirá para a construção de uma teoria geral relacionando as fases de Lewis e Riesenfeld e de Berry.

É possível ampliar este trabalho de diversas maneiras. No concernente à análise dos sistemas de Ermakov generalizados através da teoria dos grupos de Lie, uma alternativa seria a utilização de simetrias de Lie dinâmicas. Esta proposta generalizaria os resultados obtidos aqui com o emprego de simetrias de Lie geométricas, que não contém as

componentes da velocidade na definição do gerador de simetrias. A obtenção de novos sistemas de Ermakov generalizados com simetria é importante em particular porque não está excluída a ocorrência de caos nos sistemas de Ermakov generalizados. De fato, o invariante de Ermakov, por si só, não garante integrabilidade, e a detecção de novos casos completamente integráveis pode ser facilitada pelo uso de simetrias de Lie dinâmicas.

A estrutura do grupo de simetrias de Lie dos sistemas de Ermakov generalizados de baixa dimensionalidade pode ser utilizada para a obtenção de sistemas de Ermakov generalizados de dimensionalidade infinita. Como ponto de partida desta abordagem, poder-se-ia postular o  $SL(2, R)$ , que é o grupo de simetrias dos sistemas de ELRR, como o grupo de simetrias subjacente a um sistema de equações parciais. A forma dos sistemas contínuos assim obtidos e sua relevância são, no momento, desconhecidos.

Na busca de sistemas de Ermakov Hamiltonianos, foi usado um *ansatz* para a função Hamiltoniana, na forma de uma soma de um termo quadrático nos momenta e de um termo potencial. Pode-se investigar a efetividade de outras propostas para a função Hamiltoniana. Esta questão do caráter Hamiltoniano dos sistemas de Ermakov Hamiltonianos é de especial interesse no contexto da mecânica quântica. Além disso, a existência de uma formulação variacional permite a aplicação do teorema de Noether e a conseqüente obtenção de novas constantes de movimento exatas. Graças a isto, em particular, foi obtida na seção 4.3 uma classe de sistemas de Ermakov Hamiltonianos possuindo solução exata, nas formulações clássica e quântica. Portanto, é de interesse obter formulações Hamiltonianas para os sistemas de Ermakov generalizados que ampliem os resultados aqui encontrados.

Sem dúvida, a investigação completa das simetrias de Noether para o movimento não relativístico de uma partícula carregada sob ação de campos eletromagnéticos gerais está apenas no seu início. De fato, não se conhece a estrutura da totalidade das soluções do sistema fundamental (5.14–5.15) para os campos eletromagnéticos. Seria de grande interesse obter outras classes de solução, distintas das aqui obtidas. Em particular, outras soluções seriam relevantes no problema da fusão termonuclear controlada, no qual o sistema de Vlasov–Maxwell desempenha papel central. Neste sistema, que é um modelo auto consistente para um plasma não colisional, a função distribuição é função dos invariantes exatos do problema. Assim, é importante obter invariantes exatos para o movimento de partículas carregadas sob ação de classes de campos eletromagnéticos, como, por exemplo, as classes derivadas via teorema de Noether. Estão em andamento trabalhos no sentido de encontrar novas soluções para (5.14–5.15) com aplicação em física de plasmas.

Ao longo deste trabalho, constatou-se o interesse dos pesquisadores pelos sistemas in-

---

tegráveis com um número finito de graus de liberdade. Foram destacados os sistemas de Ermakov em suas várias formulações e alguns sistemas descrevendo o movimento não relativístico de partículas carregadas. Aparentemente, este interesse por sistemas integráveis está indo na contramão da direção apontada pela pesquisa recente em sistemas dinâmicos, voltada para os sistemas estocásticos. Entretanto, há que se levar em conta que, paralelamente à caracterização do caos, existe toda uma área de pesquisa recente devotada aos sistemas completamente integráveis com um número infinito de graus de liberdade. Estes sistemas, possuindo soluções do tipo sóliton e tratamento exato pelo método do espalhamento inverso, encontram aplicação nas mais diversas áreas [175]. Num certo sentido, a análise dos sistemas dinâmicos integráveis de dimensão finita fornece o contraponto à teoria dos sólitons, construída no contexto dos sistemas contínuos. Entretanto, a relação entre os problemas integráveis com dimensionalidade finita e infinita ainda é obscura. Para concluir, o estudo dos problemas integráveis é um ramo tradicional da mecânica clássica, que certamente continuará atraindo atenção ainda por um longo tempo.

## Apêndice A

### SOLUÇÃO PARA O GERADOR DE SIMETRIAS DE NOETHER

No capítulo 5, mostrou-se que o vetor  $\mathbf{n}(\mathbf{q}, t)$  no gerador de simetrias de Noether (4.62) para a partícula carregada executando movimento não relativístico sob campos eletromagnéticos gerais satisfaz

$$\frac{\partial n_i}{\partial q_j} + \frac{\partial n_j}{\partial q_i} = 2\delta_{ij}\rho\dot{\rho}. \quad (\text{A.1})$$

Sem demonstrar, foi apresentada a solução

$$\mathbf{n} = \rho\dot{\rho}\mathbf{q} + \mathbf{q} \times \boldsymbol{\Omega}(t) + \mathbf{a}(t). \quad (\text{A.2})$$

Neste apêndice, mostra-se o procedimento para encontrar (A.2).

Tomando o *ansatz*

$$n_i = \rho\dot{\rho} r_i + \zeta_i(\mathbf{q}, t) \quad (\text{A.3})$$

para a solução da equação (A.1), obtém-se

$$\frac{\partial \zeta_i}{\partial q_j} + \frac{\partial \zeta_j}{\partial q_i} = 0, \quad (\text{A.4})$$

que independe de  $\rho(t)$ . Considerando agora índices iguais em (A.4), isto é, tomando  $i = j$ , vem que

$$\zeta_1 = \zeta_1(y, z, t) \quad , \quad \zeta_2 = \zeta_2(z, x, t) \quad , \quad \zeta_3 = \zeta_3(x, y, t) \quad , \quad (\text{A.5})$$

ou seja, cada uma das funções  $\zeta_i$  independe da coordenada  $q_i$ .

Levando em conta agora (A.4) para  $i \neq j$ , conclui-se que

$$\frac{\partial \zeta_1}{\partial y} + \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} = \frac{\partial \zeta_2}{\partial z} + \frac{\partial \zeta_3}{\partial y} = \frac{\partial \zeta_3}{\partial x} + \frac{\partial \zeta_1}{\partial z} = 0. \quad (\text{A.6})$$

Integração das duas últimas equações acima leva a

$$\zeta_1 = -\frac{\partial \zeta_3}{\partial x}(x, y, t) z + f_1(y, t), \quad (\text{A.7})$$

$$\zeta_2 = -\frac{\partial \zeta_3}{\partial y}(x, y, t) z + f_2(x, t), \quad (\text{A.8})$$

onde  $f_1(y, t)$  e  $f_2(x, t)$  são funções arbitrárias. Como  $\zeta_1$  independe de  $x$  e  $\zeta_2$  independe de  $y$ , decorre, por inspeção das equações (A.7–A.8),

$$\frac{\partial \zeta_3}{\partial x} = -f_3(y, t), \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{\partial \zeta_3}{\partial y} = -f_4(x, t), \quad (\text{A.10})$$

para funções  $f_3$  e  $f_4$  de argumento adequado. A condição de Cauchy  $\partial^2 \zeta_3 / \partial x \partial y = \partial^2 \zeta_3 / \partial y \partial x$  e as equações (A.9–A.10) levam a

$$\frac{\partial f_3(y, t)}{\partial y} = \frac{\partial f_4(x, t)}{\partial x} = F(t), \quad (\text{A.11})$$

onde  $F$  é função só do tempo, sendo que a última igualdade vem do fato de  $f_3$  não depender de  $x$  e de  $f_4$  não depender de  $y$ . A integração do resultado (A.11) mostra que

$$f_3 = F(t)y - \Omega_2(t) \quad , \quad f_4 = F(t)x + \Omega_1(t) \quad , \quad (\text{A.12})$$

onde  $\Omega_1$  e  $\Omega_2$  são funções arbitrárias do tempo.

Considerando agora as equações (A.7–A.8), (A.12) e (A.9–A.10), obtém-se

$$\zeta_1 = (F(t)y - \Omega_2(t))z + f_1(y, t), \quad (\text{A.13})$$

$$\zeta_2 = (F(t)x + \Omega_1(t))z + f_2(x, t), \quad (\text{A.14})$$

$$\zeta_3 = -F(t)xy + \Omega_2(t)x - \Omega_1(t)y + a_3(t), \quad (\text{A.15})$$

onde  $a_3$  é uma nova função do tempo, advinda da integração de (A.9–A.10). A primeira das equações em (A.6) e o par de equações (A.13–A.14) levam a

$$2F(t)z + \frac{\partial f_1}{\partial y}(y, t) + \frac{\partial f_2}{\partial x}(x, t) = 0. \quad (\text{A.16})$$

Esta igualdade se aplica para todo valor de  $z$ . Como nem  $f_1$  nem  $f_2$  dependem de  $z$ , necessariamente

$$F(t) = 0. \quad (\text{A.17})$$

Inserindo isto novamente no resultado (A.16), vem que

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}(y, t) = -\frac{\partial f_2}{\partial x}(x, t) = \Omega_3(t), \quad (\text{A.18})$$

onde  $\Omega_3$  é uma nova função do tempo e foi levada em conta a dependência admissível de  $f_1$  e  $f_2$ . A solução do par de equações (A.18) é

$$f_1 = \Omega_3(t)y + a_1(t) \quad , \quad f_2 = -\Omega_3(t)x + a_2(t), \quad (\text{A.19})$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  dependem arbitrariamente do tempo. Finalmente, considerando (A.13–A.15) com  $F = 0$  e (A.19), obtém-se a solução

$$\zeta_1 = \Omega_3(t)y - \Omega_2(t)z + a_1(t), \quad (\text{A.20})$$

$$\zeta_2 = \Omega_1(t)z - \Omega_3(t)x + a_2(t), \quad (\text{A.21})$$

$$\zeta_3 = \Omega_2(t)x - \Omega_1(t)y + a_3(t) \quad (\text{A.22})$$

para o sistema de equações dado em (A.4). O procedimento exposto acima mostra que esta é a solução geral deste sistema de equações.

Definindo um vetor  $\mathbf{\Omega}(t) = (\Omega_1(t), \Omega_2(t), \Omega_3(t))$  e um vetor  $\mathbf{a}(t) = (a_1(t), a_2(t), a_3(t))$  e usando (A.3), pode-se representar compactamente a solução final para (A.1). O resultado é, de fato, dado por (A.2), como se queria demonstrar.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] LEWIS Jr., H. R., SYMON, K. R. Exact time-dependent solutions of the Vlasov-Poisson equations. **Phys. Fluids**, Woodbury, v. 27, n.1, p. 192-196, Jan., 1984.
- [2] ABRAHAM-SCHRAUNER, B. Exact, time-dependent solutions of the one-dimensional Vlasov-Maxwell equations. **Phys. Fluids**, Woodbury, v. 27, n. 1, p. 197-202, Jan., 1984.
- [3] LEACH, P. G. L. Classes of potentials of time-dependent central force fields which possess first integrals quadratic in the momenta. **J. Math. Phys.**, Woodbury, v. 26, n. 7, 1613-1620, July 1985.
- [4] DORIZZI, B., GRAMMATICOS, B., RAMANI, A., WINTERNITZ, P. Integrable Hamiltonian systems with velocity-dependent potentials. **J. Math. Phys.**, Woodbury, v. 26, n. 12, p. 3070-3059, Dec., 1985.
- [5] LEWIS Jr., H. R. Representation of magnetic fields with toroidal topology in terms of field-line invariants. **Phys. Fluids B**, Woodbury, v. 2, n. 11, p. 2551-2562, Nov., 1990.
- [6] JOSHI, A., LAWANDE, S. V. Squeezing and some other characteristics of time-dependent harmonic oscillator with variable mass. **Modern Phys. Lett. B**, Singapore, v. 8, n. 15, p. 917-927, June 1994.
- [7] KHANDEKAR, D. C., LAWANDE, S. V. Feynman path integrals: some exact results and applications. **Phys. Rep.**, Amsterdam, v. 137, n. 2, p. 115-229, May 1986.
- [8] MAAMACHE, M. Ermakov systems, exact solution, and geometrical angles and phases. **Phys. Rev. A**, Woodbury, v. 52, n. 2, p. 936-940, Aug., 1995.
- [9] HAAS, F. **Formulações de Poisson para sistemas dinâmicos tridimensionais**. Porto Alegre: Curso de Pós-Graduação em Física - UFRGS, 1994. Diss. mest. Física.

- 
- [10] HAAS, F., GOEDERT, J. On the generalized Hamiltonian structure of 3D dynamical systems. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 199, n. 4, p. 173-179, Mar., 1995.
- [11] GOEDERT, J., HAAS, F., HUA, D., FEIX, M. R., CAIRÓ, L. Generalized Hamiltonian structures for systems in three dimensions with a rescalable constant of motion. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 27, n. 19, p. 6495-6507, Oct., 1994.
- [12] HERNÁNDEZ-BERMEJO, B., FAIRÉN, V. A constant of motion in 3D implies a local generalized Hamiltonian structure. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 234, n. 1, p. 35-40, Sept., 1997.
- [13] LEWIS Jr., H. R. Classical and quantum systems with time-dependent harmonic-oscillator-type Hamiltonians. **Phys. Rev. Lett.**, New York, v. 18, n. 13, p. 510-512, Mar., 1967.
- [14] LEWIS Jr., H. R. Class of exact invariants for classical and quantum time-dependent harmonic oscillators. **J. Math. Phys.**, New York, v. 9, n. 11, p. 1976-1986, Nov., 1968.
- [15] ERMAKOV, V. P. **Univ. Isv. Kiev**, v. 20, p. 1, 1880.
- [16] ELIEZER, C. J., GRAY, A. A note on the time-dependent harmonic oscillator. **SIAM J. Appl. Math.**, Philadelphia, v. 30, n. 3, p. 463-468, May 1976.
- [17] GOLDSTEIN, H. **Classical mechanics**. Reading: Addison-Wesley, 1980.
- [18] GAMBIER, B. **Acta Math.**, v. 33, p.45, 1910.
- [19] MILNE, W. E. The numerical determination of characteristic numbers. **Phys. Rev.**, New York, v. 35, p. 863-867, Apr., 1930.
- [20] KORSCH, H. J., LAURENT, H. Milne's differential equation and numerical solutions of the Schrödinger equation I. Bound-state energies for single and double minimum potentials. **J. Phys. B: At. Mol. Phys.**, Bristol, v. 14, n. 22, p. 4213-4230, Nov., 1981.
- [21] KORSCH, H. J., LAURENT, H., MÖHLENKAMP, R. Milne's differential equation and numerical solutions of the Schrödinger equation II. Complex energy resonance states. **J. Phys. B: At. Mol. Phys.**, Bristol, v. 15, n. 1, p. 1-15, Jan., 1982.

- 
- [22] PINNEY, E. The nonlinear differential equation  $y'' + p(x)y + cy^{-3} = 0$ . **Proc. Amer. Math. Soc.**, Menasha, v. 1, n. 5, p. 681, Oct. 1950.
- [23] COURANT, E. D., SNYDER, H. D. Theory of the alternating-gradient synchrotron. **Ann. Phys.**, New York, v. 3, p. 1-48, Jan., 1958.
- [24] LEWIS Jr., H. R., RIESENFELD, W. B. An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field. **J. Math. Phys.**, New York, v. 10, n. 8, p. 1458-1473, Aug., 1969.
- [25] RAY, J. R., REID, J. L. More exact invariants for the time-dependent harmonic oscillator. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 71, n. 4, p. 317-318, May 1979.
- [26] HAAS, F., GOEDERT, J. On the Hamiltonian structure of Ermakov systems. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 29, n. 14, p.4083-4092, July 1996.
- [27] TAKAYAMA, K. Dynamical invariant for forced time-dependent harmonic oscillator. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 88, n. 2, p. 57-59, Feb., 1982.
- [28] QIAN, Q., DAVIDSON, R. C., CHEN, C. Chaotic particle dynamics in a periodic focusing quadrupole magnetic field. **Plasma Phys.**, Woodbury, v. 1, n. 5, p. 1328-1337, May 1994.
- [29] HARTLEY, J. G., RAY, J. R. Ermakov systems and quantum-mechanical superposition laws. **Phys. Rev. A**, New York, v. 25, n. 6, p. 2873-2876, Dec., 1982.
- [30] HARTLEY, J. G., RAY, J. R. Solutions to the time-dependent Schrödinger equation. **Phys. Rev. A**, New York, v. 25, n. 4, p. 2388-2390, Apr., 1982.
- [31] MAAMACHE, M. Invariant-angle coherent states for the singular oscillator and geometrical phases and angles. **Ann. Phys.**, Brugges, v. 254, n. 1, p. 1-10, Feb., 1997.
- [32] GIULIANO, C. R., MARBURGER, J. H., YARIV, A. Enhancement of self-focusing threshold in sapphire with elliptical beams. **Appl. Phys. Lett.**, New York, v. 21, n. 2, p. 58-60, July 1972.
- [33] LEE, R. A. Improved ray representation for planar optical waveguides. **Appl. Phys. A**, New York, v. 29, n. 2, p. 81-82, Oct., 1982.
- [34] LEE, R. A. Quantum ray equations. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 15, n. 9, p. 2761-2774, Sept., 1982.

- 
- [35] LEE, R. A. Quantum mechanics as a multidimensional Ermakov theory: I. Time independent equations. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 17, n. 3, p. 535-546, Feb., 1984.
- [36] GONCHARENKO, A. M., LOGVIN, Y. A., SAMSON, A. M., SHAPOVALOV, P. S. Rotating elliptical gaussian beams in nonlinear media. **Optics Comm.**, Amsterdam, v. 81, n. 3, p. 225-230, Feb., 1991.
- [37] CORNOLTI, F., LUCCHESI, M., ZAMBON, B. Elliptic gaussian beam self-focusing in nonlinear media. **Optics. Comm.**, Amsterdam, v. 75, n. 2, p. 129-135, Feb., 1990.
- [38] RAY, J. R. Cosmological particle creation. **Phys. Rev. D**, New York, v. 20, n. 10, p. 2632-2633, Nov., 1979.
- [39] SHAHINPOOR, M., NOWINSKI, J. L. Exact solution to the problem of a forced large amplitude radial oscillations of a thin hyperelastaic tube. **Int. J. Nonlin. Mech.**, Norwich, v. 6, p. 193-207, May 1971.
- [40] ROGERS, C., RAMGULAM, U. A non-linear superposition principle and Lie group invariance: application in rotating shallow water wave theory. **Int. J. Non-Linear Mech.**, Norwich, v. 24, n. 3, p. 229-236, July 1989.
- [41] ATHORNE, C., ROGERS, C., RAMGULAM, U., OSBALDESTIN, A. On linearization of the Ermakov system. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 143, n. 4, p. 207-212, Jan., 1990.
- [42] ATHORNE, C. Stability and periodicity in coupled Pinney equations. **J. Diff. Eq.**, Brugges, v. 100, n. 1, p. 82-94, Sept., 1992.
- [43] RAY, J. R., REID, J. L. Noether's theorem, time-dependent invariants and nonlinear equations of motion. **J. Math. Phys.**, New York, v. 20, n. 10, p. 2054-2057, Oct., 1979.
- [44] RAY, J. R. Invariants for nonlinear equations of motion. **Prog. Theor. Phys.**, Kyoto, v. 65, n. 3, p. 877-882, Mar., 1981.
- [45] REID, J. L., RAY, J. R. Lie symmetries, nonlinear equations of motion and new Ermakov systems. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 15, n. 9, p. 2751-2760, Sept., 1982.

- 
- [46] KRUSKAL, M. Asymptotic theory of Hamiltonian and other systems with all solutions nearly periodic. **J. Math. Phys.**, New York, v. 3, n. 4, p. 806-828, July 1962.
- [47] SARLET, W. Exact invariants for time-dependent Hamiltonian systems with one degree-of-freedom. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 11, n. 5, p. 843-854, May 1978.
- [48] NOETHER, E. **Nachrichten Gesell. Wissenschaft. Göttingen (math-phys. Klasse)**, v. 2, p. 235, 1918.
- [49] HILL, E. L. Hamilton's principle and the conservation theorems of mathematical physics. **Reviews of Modern Phys.**, Lancaster, v. 23, p. 253-260, July 1951.
- [50] KATZIN, G. H., LEVINE, J. Time-dependent dynamical symmetries and constants of motion. III. Time-dependent harmonic oscillator. **J. Math. Phys.**, New York, v. 18, n. 6, p. 1267-1274, June 1977.
- [51] LUTZKY, M. Noether's theorem and the time-dependent harmonic oscillator. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 68, n. 1, p. 3-4, Sept., 1978.
- [52] REID, J. L., RAY, J. R. Ermakov systems, nonlinear superposition, and solutions of nonlinear equations of motion. **J. Math. Phys.**, New York, v. 21, n. 7, p. 1583-1587, July 1980.
- [53] RAY, J. R. Noether's theorem and exact invariants for time-dependent systems. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 13, n. 6, p. 1969-1975, June 1980.
- [54] RAY, J. R., REID, J. L. Noether's theorem and Ermakov systems for nonlinear equations of motion. **Il Nuovo Cimento A**, Bologna, v. 59, n. 2, p. 134-139, Sept., 1980.
- [55] RAY, J. R., REID, J. L. Ermakov systems, Noether's theorem and the Sarlet-Bahar method. **Lett. Math. Phys.**, Dordrecht, v. 4, n. 3, p. 235-240, May 1980.
- [56] RAY, J. R., REID, J. L. Ermakov systems, velocity dependent potentials, and nonlinear superposition. **J. Math. Phys.**, New York, v. 22, n. 1, p. 91-95, Jan., 1981.
- [57] RAY, J. R., REID, J. L., LUTZKY, M. New nonlinear dynamical systems possessing invariants. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 84, n. 2, p. 42-44, July 1981.

- 
- [58] SARLET, W., CANTRIJN, F. Generalizations of Noether's theorem in classical mechanics. **SIAM Rev.**, Philadelphia, v. 23, n. 4, p. 467-494, Oct., 1981.
- [59] RAY, J. R., REID, J. L. Invariants for forced time-dependent oscillators and generalizations. **Phys. Rev. A**, New York, v. 26, n. 2, p. 1042-1047, Aug., 1982.
- [60] MOREIRA, I. C. Novos invariantes para sistemas de Ermakov. **Rev. Bras. Física**, São Paulo, v. 13, n. 3, p. 534-550, set., 1983.
- [61] CERVERO, J. M., VILARROEL, J. On the quantum theory of the damped harmonic oscillator. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 17, n. 15, p. 2963-2971, Oct., 1984.
- [62] PROFILO, G., SOLIANA, G. Noether invariants and complete Lie-point symmetries for equations of the Hill type. **Prog. Theor. Phys**, Kyoto, v. 84, n. 5, p. 974-992, Nov., 1990.
- [63] PROFILO, G., SOLIANA, G. Group-theoretical approach to the classical and quantum oscillator with time-dependent mass and frequency. **Phys. Rev. A**, Woodbury, v. 44, n. 3, p. 2057-2065, Aug., 1991.
- [64] LEACH, P. G. L. Comment on an aspect of a letter of Shivamoggi and Muilenburg. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 168, n. 5/6, p. 460-462, Sept., 1992.
- [65] BRAZIER, T. I., LEACH, P. G. L. Invariants for dissipative systems and Noether's theorem. **Rev. Mex. Phys.**, México, v. 40, n. 3, p. 378-385, jun., 1994.
- [66] KANASUGI, H. Symmetry of general time-dependent harmonic oscillator. **Prog. Theor. Phys.**, Kyoto, v. 97, n. 4, p. 617-633, Apr., 1997.
- [67] BLUMAN, G. W., COLE, J. D. **Similarity methods for differential equations**. New York: Springer-Verlag, 1974.
- [68] WULFMAN, C. E., WYBOURNE, B. G. The Lie group of Newton's and Lagrange's equations for the harmonic oscillator. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 9, n. 4, p. 507-518, Apr., 1976.
- [69] ELIEZER, C. J. The symmetries and first integrals of some differential equations of dynamics. **Hadronic J.**, Palm Harbor, v. 2, n. 5, p. 1067-1109, Oct., 1979.
- [70] PRINCE, G. E., ELIEZER, C. J. Symmetries of the time-dependent N-dimensional oscillator. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 13, p. 815-823, Mar., 1980.

- 
- [71] RAY, J. R., REID, J. L. New Ermakov systems from Lie symmetry theory. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 89, n. 2, p. 66-67, Apr., 1982.
- [72] GAUTHIER, S. An exact invariant for the time dependent double well anharmonic oscillators: Lie theory and quasi-invariance groups. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 17, n. 13, p. 2633-2639, Sept., 1984.
- [73] OLVER, P. J. **Applications of Lie groups to differential equations**. Berlin: Springer-Verlag, 1986.
- [74] LEACH, P. G. L. Generalized Ermakov systems. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 158, n. 3, p. 102-106, Aug., 1991.
- [75] DEWISME, A., BOUQUET, S. First integrals and symmetries of time-dependent Hamiltonian systems. **J. Math. Phys.**, Woodbury, v. 34, n. 3, p. 997-1006, Mar., 1993.
- [76] LEWIS Jr., H. R., LEACH, P. G. L. A direct approach to finding exact invariants for one-dimensional time-dependent classical Hamiltonians. **J. Math. Phys.**, New York, v. 23, n. 12, p. 2371-2374, Dec., 1982.
- [77] GASCÓN, F. G., RAMOS, F. B., AGUIRRE-DABAN, E. On the polynomial first integrals of certain second-order differential equations. **J. Math. Phys.**, New York, v. 23, n. 12, p. 2281-2285, Dec., 1982.
- [78] RAY, J. R. Quantum invariants. **Phys. Rev. A**, New York, v. 28, n. 5, p. 2603-2605, Nov., 1983.
- [79] GRAMMATICOS, B., DORIZZI, B. Two-dimensional time-dependent Hamiltonian systems with an exact invariant. **J. Math. Phys.**, New York, v. 25, n. 7, p. 2194-2199, July 1984.
- [80] LEWIS Jr., H. R. Exact invariants quadratic in the momentum for a particle in a three-dimensional electromagnetic field. **J. Math. Phys.**, Woodbury, v. 25, n. 4, p. 1139-1143, Apr., 1984.
- [81] MOREIRA, I. C. A note on the invariants for the time-dependent oscillator. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 18, n. 5, p. 899-907, Apr., 1985.
- [82] DHARA, A. K., LAWANDE, S. V. Time-dependent invariants and quantum mechanics in two dimensions. **J. Math. Phys.**, Woodbury, v. 27, n. 5, p. 1331-1339, May 1986.

- 
- [83] KAUSHAL, R. S., PARASHAR, D. Second order invariants for two dimensional classical dynamical systems. **Fortschr. Phys.**, Berlin, v. 42, n. 8, p. 689-705, Nov., 1994.
- [84] LEWIS Jr., H. R., LEACH, P. G. L. A resonance formulation for invariants of particle motion in an one-dimensional time-dependent potential. **Ann. Phys.**, Brugges, v. 164, n. 1, p. 47-76, Oct., 1985.
- [85] GOEDERT, J., LEWIS Jr., H. R. Rational functions of momentum as invariants for one-dimensional, time-dependent potentials: basic theory. **J. Math. Phys.**, Woodbury, v. 28, n. 3, p. 728-735, Mar., 1987.
- [86] LEWIS Jr., H. R., GOEDERT, J. Rational functions of momentum as invariants for one-dimensional, time-dependent potentials: two- and three-resonance cases. **J. Math. Phys.**, Woodbury, v. 28, n. 3, p. 736-743, Mar., 1987.
- [87] HIETARINTA, J. Direct methods for the search of the second invariant. **Phys. Rep.**, Amsterdam, v. 147, n. 2, p. 87-154, Mar., 1987.
- [88] GIACOMINI, H. J. Integrable Hamiltonians with higher transcendental invariants. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 23, n. 12, p. L587-L590, June 1990.
- [89] PEREIRA, L. G., GOEDERT, J. One-dimensional nonautonomous dynamical systems with exact transcendental invariants. **J. Math. Phys.**, Woodbury, v. 33, n. 8, p. 2682-2687, Aug., 1992.
- [90] LEWIS Jr., H. R., LEACH, P. G. L., BOUQUET, S., FEIX, M. R. Representation of one-dimensional Hamiltonians in terms of their invariants. **J. Math. Phys.**, Woodbury, v. 33, n. 2, p. 591-598, Feb., 1992.
- [91] BOUQUET, S., LEWIS Jr., H. R. Extension of Giacomini's result concerning invariants for one-dimensional time-dependent potentials. **J. Math. Phys.**, Woodbury, v. 37, n. 11, p. 5496-5508, Nov., 1996.
- [92] GÜNTHER, N. J., LEACH, P. G. L. Generalized invariants for the time-dependent harmonic oscillator. **J. Math. Phys.**, New York, v. 18, n. 4, p. 572-576, Apr., 1977.
- [93] LEACH, P. G. L. On a generalization of the Lewis invariant for the time-dependent harmonic oscillator. **SIAM J. Appl. Math.**, Philadelphia, v. 34, n. 3, p. 496-503, May 1978.

- 
- [94] MUNIER, A., BURGAN, J. R., FEIX, M. R., FIJALKOW, E. Schrödinger equation with time-dependent boundary conditions. **J. Math. Phys.**, New York, v. 22, n. 6, p. 1219-1223, June 1981.
- [95] LEACH, P. G. L., LEWIS Jr., H. R., SARLET, W. First integrals for some nonlinear time-dependent Hamiltonian systems. **J. Math. Phys.**, Woodbury, v. 25, n. 3, p. 486-490, Mar., 1984.
- [96] PEDROSA, I. A. Canonical transformations and exact invariants for dissipative systems. **J. Math. Phys.**, Woodbury, v. 28, n. 11, p. 2662-2664, Nov., 1987.
- [97] CHETOUANI, L., GUECHI, L., HAMMANN, T. F. Generalized canonical transformations and path integrals. **Phys. Rev. A**, Woodbury, v. 40, n. 3, p. 1157-1164, Aug., 1989.
- [98] XU, J., BAO, J., GAO, X. Path integral approach to the time-dependent quadratic Hamiltonian and coherent states. **Can. J. Phys.**, Toronto, v. 70, n. 8, p. 637-639, Aug., 1992.
- [99] KANASUGI, H., OKADA, H. Systematic treatment of general time-dependent harmonic oscillator in classical and quantum mechanics. **Prog. Theor. Phys.**, Kyoto, v. 93, n. 5, p. 949-960, May 1995.
- [100] BURGAN, J. R., FEIX, M. R., FIJALKOW, E., MUNIER, A. M. Solution of the multidimensional quantum harmonic oscillator with time-dependent frequencies through Fourier, Hermite and Wigner transforms. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 74, n. 1, p. 11-14, Oct., 1979.
- [101] RAY, J. R. Exact solution to the time-dependent Schrödinger equation. **Phys. Rev. A**, New York, v. 26, n. 2, p. 729-733, Aug., 1982.
- [102] FEIX, M. R., LEWIS Jr., H. R. Invariants for dissipative nonlinear systems by using rescaling. **J. Math. Phys.**, Woodbury, v. 26, n. 1, p. 68-73, Jan., 1985.
- [103] KORSCH, H. J. Dynamical invariants and time-dependent harmonic systems. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 74, n. 5, p. 294-296, Nov., 1979.
- [104] WOLLENBERG, L. S. Characterisation of homogeneous quadratic invariants for one-dimensional homogeneous quadratic Hamiltonians. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 79, n. 4, p. 269-272, Oct., 1980.

- 
- [105] KAUSHAL, R. S., KORSCH, H. J. Dynamical Noether invariants for time-dependent nonlinear systems. **J. Math. Phys.**, New York, v. 22, n. 9, p. 1904-1908, Sept., 1981.
- [106] KAUSHAL, R. S., MISHRA, S. C. Dynamical algebraic approach and invariants for time-dependent Hamiltonian systems in two dimensions. **J. Math. Phys.**, Woodbury, v. 34, n. 12, p. 5843-5850, Dec., 1993.
- [107] KAUSHAL, R. S., PARASHAR, D., GUPTA, S., MISHRA, S. C. Construction of exact invariants for classical dynamical systems in three dimensions. **Ann. Phys.**, Brugges, v. 259, n. 2, p. 233-252, Sept., 1997.
- [108] RAMANI, A., GRAMMATICOS, B., BOUNTIS, T. The Painlevé property and singularity analysis of integrable and non-integrable systems. **Phys. Rep.**, Amsterdam, v. 180, n. 3, p. 159-245, Aug., 1989.
- [109] STRELCYN, J. M., WOJCIECHOWSKI, S. A method of finding integrals for three-dimensional dynamical systems. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 133, n. 4, p. 207-212, Nov., 1988.
- [110] ARNOLD, V. I. **Mathematical methods of classical mechanics**. New York: Springer-Verlag, 1978.
- [111] SHAPER, A., WILCZEK, F. (Eds.) **Geometric phases in physics**. Singapore: World Scientific, 1989.
- [112] GOVINDER, K. S., ATHORNE, C., LEACH, P. G. L. The algebraic structure of generalized Ermakov systems in three dimensions. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 26, n. 16, p. 4035-4046, Aug., 1993.
- [113] GOVINDER, K. S., LEACH, P. G. L. Ermakov systems: a group theoretical approach. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 186, n. 6, p. 391-395, Mar., 1994.
- [114] GOVINDER, K. S., LEACH, P. G. L. Integrability of generalized Ermakov systems. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 27, n. 12, p. 4153-4156, June 1994.
- [115] RAY, J. R. Nonlinear superposition law for generalized Ermakov systems. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 78, n. 1, p. 4-6, July 1980.
- [116] REID, J. L., RAY, J. R. Nonlinear superposition, higher-order nonlinear equations, and classical linear invariants. **J. Math. Phys.**, New York, v. 23, n. 4, p. 503-509, Apr., 1982.

- 
- [117] GOEDERT, J. Second constant of motion for generalized Ermakov systems. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 136, n. 7, p. 391-394, Apr., 1989.
- [118] SARLET, W. Further generalization of Ray-Reid systems. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 82, n. 4, p. 161-164, Mar., 1981.
- [119] SARLET, W., RAY, J. R. Classification scheme for two-dimensional Ermakov-type systems and generalizations. **J. Math. Phys.**, New York, v. 22, n. 11, p. 2504-2511, Nov., 1981.
- [120] LUTZKY, M. An application of Ray-Reid invariants. **J. Math. Phys.**, New York, v. 21, n. 6, p. 1370-1371, June 1980.
- [121] SARLET, W., CANTRIJN, F. A generalization of the nonlinear superposition idea for Ermakov systems. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 88, n. 8, p. 383-387, Apr., 1982.
- [122] NASSAR, A. B., BASSALO, J. M. F., ALENCAR, P. T. S. Nonlinear superposition law and Feynman propagator. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 113, n. 7, p. 365-369, Jan., 1986.
- [123] GOEDERT, J., HAAS, F. On the Lie symmetries of a class of generalized Ermakov systems. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 239, n. 3, p. 348-352, Feb., 1998.
- [124] ATHORNE, C. Kepler-Ermakov problems. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 24, n. 24, p. L1385-L1389, Dec., 1991.
- [125] ATHORNE, C. Polyhedral Ermakov systems. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 151, n. 8, p. 407-411, Dec., 1991.
- [126] ATHORNE, C. Rational Ermakov systems of Fuchsian type. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 24, n. 5, p. 945-961, Mar., 1991.
- [127] ROGERS, C., SCHIEF, W. K. Multi-component Ermakov systems: structure and linearization. **J. Math. Anal. Appl.**, San Diego, v. 198, n. 1, p. 194-220, Feb., 1996.
- [128] SCHIFF, L. **Quantum mechanics**. New York: McGraw Hill, 1955.
- [129] HUSIMI, K. Miscellanea in elementary quantum mechanics, II. **Prog. Theor. Phys.**, Kyoto, v. 9, n. 4, p. 381-402, Apr., 1953.

- 
- [130] RAY, J. R., HARTLEY, J. G. Solutions to  $N$ -dimensional time-dependent Schrödinger equations. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 88, n. 3, p. 125-127, Mar., 1982.
- [131] SCHRÖDINGER, E. **Naturwissenschaften**, v. 14, p. 664, 1926.
- [132] KLAUDER, J. R. (Ed.) **Coherent states: applications in physics and mathematical physics**. Singapore: World Scientific, 1985.
- [133] HARTLEY, J. G., RAY, J. R. Coherent states for the time-dependent harmonic oscillator. **Phys. Rev. D**, New York, v. 25, n. 2, p. 382-386, Jan., 1982.
- [134] XU, J-B., ZHANG, X-S., LI, S-B. Path integral approach to the general driven time-dependent harmonic oscillator and squeezed state. **Physica Scripta**, London, v. 56, n. 3, p. 225-229, Sept., 1997.
- [135] RAY, J. R. Minimum-uncertainty coherent states for certain time-dependent systems. **Phys. Rev. D**, New York, v. 25, n. 12, p. 3417-3419, June 1982.
- [136] BERRY, M. V. Quantal phase factors accompanying adiabatic changes. **Proc. R. Soc. A**, London, v. 392, n. 1802, p. 45-57, Mar., 1984.
- [137] HANNAY, J. H. Angle variable holonomy in adiabatic excursion of an integrable Hamiltonian. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 18, n. 2, p. 221-230, Feb., 1985.
- [138] JACKIW, R. Three elaborations on Berry's connection, curvature and phase. **Int. J. Mod. Phys.**, Singapore, v. 3, n. 2, p. 285-297, Feb., 1988.
- [139] GAO, X., XU, J-B., QIAN, T. The exact solution for the general time-dependent harmonic oscillator and its adiabatic limit. **Ann. Phys.**, Brugges, v. 204, n. 1, p. 235-243, Nov., 1990.
- [140] CERVERÓ, J. M., LEJARRETA, J. D.  $SO(2,1)$  - invariant systems and the Berry phase. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 22, n. 14, p. L663-L666, July 1989.
- [141] LEACH, P. G. L. Berry's phase and wavefunction for time-dependent Hamiltonian systems. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 23, n. 12, p. 2695-2699, June 1990.
- [142] MAAMACHE, M. Unitary transformation approach to the exact solution for the singular oscillator. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 29, n. 11, p. 2833-2837, June 1996.

- 
- [143] LUTZKY, M. Symmetry groups and conserved quantities for the harmonic oscillator. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 11, n. 2, p. 249-258, Feb., 1978.
- [144] ANCO, S. C., BLUMAN, G. Direct construction of conservation laws from field equations. **Phys. Rev. Lett.**, Woodbury, v. 78, n. 15, p. 2869-2873, Apr., 1997.
- [145] RAY, J. R., REID, J. L. Exact time-dependent invariants for  $N$ - dimensional systems. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 74, n. 1, p. 23-25, Oct., 1979.
- [146] LUTZKY, M. Generalized Ray-Reid systems. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 78, n. 4, p. 301-303, Aug., 1980.
- [147] RAY, J. R. Solitary waves in a generalized time-dependent sine-Gordon equation. **Lett. Nuovo Cimento**, Bologna, v. 30, n. 12, p. 372-374, Mar., 1981.
- [148] SAERMARK, K. Kink-product solutions to a generalized time-dependent sine-Gordon equation. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 90, n. 1, p. 5-6, June 1982.
- [149] ROGERS, C., HOENSELAERS, C., RAY, J. R. On  $(2+1)$ - dimensional Ermakov systems. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 26, n. 11, p. 2625-2633, June 1993.
- [150] KAUSHAL, R. S., PARASHAR, D. Can quantum mechanics and supersymmetric quantum mechanics be the multidimensional Ermakov theories? **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 29, n. 4, p. 889-893, Feb., 1996.
- [151] SCHIEF, W. K., ROGERS, C. BASSOM, A. P. Ermakov systems of arbitrary order and dimension: structure and linearization. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 29, n. 4, p. 903-911, Feb., 1996.
- [152] GARDNER, M. Korteweg–de Vries equation and generalizations. IV. The Korteweg–de Vries equation as a Hamiltonian system. **J. Math. Phys.**, New York, v. 12, n. 8, p. 1548-1551, Aug., 1971.
- [153] HOLM, D. D., MARSDEN, J. E., RATIU, T., WEINSTEIN, A. Nonlinear stability of fluid and plasma equilibria. **Phys. Rep.**, Amsterdam, v. 123, n. 1, p. 1-116, July 1985.
- [154] NUTKU, Y. Hamiltonian structure of the Lotka-Volterra equations. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 145, n. 1, p. 27-28, Mar., 1990.
- [155] NUTKU, Y. Bi-Hamiltonian structure of the Kermack–McKendrick model for

- epidemics. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 23, n. 21, p. L1145-L1146, Nov., 1990.
- [156] HOLM, D. D., WOLF, K. B. Lie–Poisson description of Hamiltonian ray optics. **Physica D**, Amsterdam, v. 51, n. 1, p. 189-199, Aug., 1991.
- [157] CERVERÓ, J. M., LEJARRETA, J. D. Ermakov Hamiltonians. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 156, n. 5, p. 201-205, June 1991.
- [158] GONCHARENKO, A. M., LOGVIN, Y. A., SAMSON, A. M., SHAPOVALOV, P. S., TUROVETS, S. I. Ermakov Hamiltonian systems in nonlinear optics of elliptic Gaussian beams. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 160, n. 2, p. 138-142, Nov., 1991.
- [159] CALOGERO, F. Solution of a three-body problem in one dimension. **J. Math. Phys.**, New York, v. 10, n. 12, p. 2191-2196, Dec., 1969.
- [160] WINTERNITZ, P., SMORODINSKII, Y. A., UHLIR, M., FRIS, I. Symmetry groups in classical and quantum mechanics. **Sov. J. Nucl. Phys.**, New York, v. 4, p. 444-450, Mar., 1967.
- [161] EVANS, N. W. Superintegrability in classical mechanics. **Phys. Rev. A**, Woodbury, v. 41, p. 5666-5676, May 1990.
- [162] BOSCHI-FILHO, H., VAYDIA, A. N. Algebraic solutions of an anisotropic non-quadratic potential. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 149, p. 336-340, Oct., 1990.
- [163] KHANDEKAR, D. C., LAWANDE, S. V. Solution of an one-dimensional three-body problem in classical mechanics. **Am. J. Phys.**, New York, v. 40, n. 3, p. 458-462, Mar., 1972.
- [164] POINCARÉ, H. . **C. R. Acad. Sci.**, Paris, v. 123, p. 530, 1896.
- [165] MCINTOSH, H. V., CISNEROS, A. Degeneracy in the presence of a magnetic monopole. **J. Math. Phys.**, New York, v. 11, n. 3, p. 896-916, Mar., 1970.
- [166] THOMPSON, G. Second-order systems with Runge-Lenz type vectors. **Lett. Math. Phys.**, Dordrecht, v. 14, n. 1, p. 69-75, July 1987.
- [167] LABELLE, S., MAYRAND, M., VINET, L. Symmetries and degeneracies of a charged oscillator in the field of a magnetic monopole. **J. Math. Phys.**, Woodbury, v. 32, n. 6, p. 1516-1521, June 1991.

- 
- [168] JACKIW, R. Dynamical symmetry of the magnetic monopole. **Ann. Phys.**, Brugges, v. 129, n. 1, p. 183-200, Oct., 1980.
- [169] MOREIRA, I. C., RITTER, O. M., SANTOS, F. C. Lie symmetries for the charged-monopole problem. **J. Phys. A: Math. Gen.**, Bristol, v. 18, n. 8, p. L427-L430, June 1985.
- [170] MUNIER, A., BURGAN, J. R., FEIX, M., FIJALKOW, E. Asymptotic solutions for a variable mass two-body problem. **Astron. Astrophys.**, Heidelberg, v. 94, n. 6, p. 373-376, June 1981.
- [171] COMMON, A. K., MUSETTE, M. Two discretisations of the Ermakov-Pinney equation. **Phys. Lett. A**, Amsterdam, v. 235, n. 7, p. 574-580, Nov., 1997.
- [172] KATZIN, G. H., LEVINE, J. Time-dependent quadratic constants of motion, symmetries, and orbit equations for classical particle dynamical systems with time-dependent Kepler potentials. **J. Math. Phys.**, New York, v. 23, n. 4, p. 552-563, Apr., 1982.
- [173] GORRINGE, V. M., LEACH, P. G. L. Conserved vectors for the autonomous system  $\ddot{\mathbf{r}} + g(r, \theta)\hat{\mathbf{r}} + h(r, \theta)\hat{\boldsymbol{\theta}} = 0$ . **Physica D**, Amsterdam, v. 27, n. 1, p. 243-248, July 1987.
- [174] RITTER, O. M. **Simetrias de Lie para a partícula carregada na presença de campo eletromagnético geral**. Rio de Janeiro: Curso de Pós-Graduação em Física - UFRJ, 1992. Diss. mestr. Física.
- [175] ABLOWITZ, M. J., SEGUR, H. **Solitons and the inverse scattering transform**. Philadelphia: SIAM, 1981.