

A GEODETIKUS HIPOTÉZIS ALKALMAZHATÓSÁGÁNAK HATÁRA

Szondy, György
Home, Budapest, Hungary
E-mail: gyorgy.szondy@freemail.hu
Rev14(2006.12.30.)

Téma

Az Schwarzschild megoldást, egyszerűsége miatt, előszeretettel használják a teljes téridő geometriájának és a fellépő szingularitások természetének vizsgálatára. Az ilyen geometriai vizsgálatához rendszerint geodetikus vonalakat használnak.

Szakítva ezzel, egy egyszerű koordináta transzformáció segítségével éppen arra keresünk választ, hogy a szingularitások környékén a geodetikus hipotézis érvényben van-e, illetve használható-e azok vizsgálatára. A kapott eredmény arra utal, hogy ilyen extrém esetekben nem csak mértékében, de jellegében sem várhatunk helyes eredményt olyan megközelítésektől, melyek valamilyen formában a geodetikus hipotézisre épülnek.

1 Bevezető

Ebben az írásban szeretnénk ellenőrizni, hogy az Einsteini Ekvivalencia Elv (EEP), illetve a geodetikus hipotézis érvényes-e mindazokon a téridő tartományokon, ahol az általános relativitáselméletet alkalmazni szokták.

Ebből a célból nem csak matematikailag vizsgáljuk az általános relativitáselmélet Schwarzschild megoldását, de görcső alá vesszük a azon mérési alapelvek és feltételezések érvényességét, melyekre az elmélet épül. Az előkészítés során tisztázzuk a távolság és idő definícióját ezek mérési alapelveit, ezen keresztül ezek fizikai tartalmát.

A geodetikus hipotézis érvényességének vizsgálatához a Schwarzschild megoldás standard és izotróp formáját, illetve az ezek közötti konform transzformációt hívjuk segítségül. Az izotróp metrika használatát az indokolja, hogy nem torzítja a testek alakját, ezért szemléletesebb, így nagyban segíti a fizikai tartalom megértését, ezzel együtt megalapozott következtetések levonását.

A kapott eredmények értékeléséhez definiáljuk azt a laza kritériumot, mely alapján egyértelműen megállapítható, ha az ekvivalencia elv alapfeltevése nem érvényesül., és ezért az általános relativitáselmélet nem alkalmazható.

2 Téridő mérések

Téridő és kozmológiai vizsgálataink a kapcsolódó fizikai mennyiségek, jelen esetben elsősorban az idő és a távolság definíciói alapján történnek. Ezek a definíciók pedig általában azt adják meg, hogyan lehet az adott fizikai mennyiséget megmérni. Vagyis vizsgálatunkat célszerű az idő és a távolság alapegységének definíciójával kezdeni.

2.1 Idő mérése, a másodperc

Eredetileg a másodperc, mint az idő alapegysége az "a nap átlagos hosszának 1/86 400-ed része"-ként lett definiálva. Azonban úgy tapasztalták, hogy a Föld forgása nem teljesen egyenletes, ezért 1956-ban az eredeti definíciót megváltoztatták, szigorították. Az új definíció szerint "A másodperc az 1900 január 1.-én 0 órákor kezdődő tropikus év 1/31 556 925.9747-ed része." [4]

Ezzel a definícióval egy lényeges probléma adódott: ilyen etalont nem lehetett létrehozni, így nem felelt meg a mérés technikai igényeknek. A megoldást átmenetileg egy atomi frekvencia használatával oldották meg. A tapasztalatok azt mutatták, hogy ez az etalon elegendően stabil ahhoz, hogy a másodperc alapegységeként definiálják. Mindezek eredményeként 1967-ben elérkezettnek látták az időt arra, hogy a másodperc definícióját ehhez az atomi mértékhez kössék. E szerint "A másodperc az alapállapotú cézium 133 atom két hiperfinom energiaszintje közötti átmenetkor létrejövő sugárzás 9 192 631 770 periódusának időtartama." A meghatározást később még kiegészítették a megkötéssel, miszerint "ez a definíció nyugalomban lévő, 0

K-os cézium atomra vonatkozik."Meg kell jegyezni, hogy a váltás csillagászati időszámításról atomi időszámításra sokkal nagyobb hatású, mint elsőre gondolnánk. A csillagászati időszámítás használata szinkronizált, globálisan koordinátarendszert eredményez. Az atomi időszámítás ezzel szemben lokális, így önmagában nem biztosítja a globális jelenségek lerását.

A helyzet értékeléséhez fontos lenne tudnunk, miért is történt meg a csillagászati időszámítás helyett az atomi etalon bevezetése. Vajon valóban tényleg szellemében szeretnék volna megváltoztatni a másodperc definícióját, vagy a váltás csupán a megvalósíthatóság kedvéért történt?

A mindennapi gyakorlat (p. GPS [8]) azt mutatja, hogy ez utóbbi volt a cél; vagyis a jelenlegi definíció egy "elég jó etalon" elfogadását jelenti, melynek a csillagászati időszámításhoz viszonyított pontossága $1-2 \times 10^{-15}$ [3].

Ezzel szemben az elméleti fizika az új definíciót szellemében fogadja el, vagyis az időt a cézium órával – a saját idő fogalmával – azonosítja. Az eltérő megközelítések következményeit nem ecseletem.

2.2 Távolagsmérés, a méter

A távolags meghatározása eleinte egy méter prototípus alapján történt. 1960-ban váltotta ezt fel a radar elvű mérés. A méter definíciója mai formáját 1983-ban nyerte el, mely szerint "a méter az az úthossz, melyet a fény $1/299\,792\,458$ -ed másodperc alatt fut be." Figyeljük meg, hogy a távolagsmérés időmérésre, illetve a fény sebesség állandóságára, mint definícióra vezethető vissza.

2.3 A sajátidő mérése és a részecskék mérete

A sajátidő mérése atomi időskálával történik. Ez a mérés a SI másodperc definíciójának általánosítása, hiszen nem követeli meg, hogy a részecske "nyugalomban" legyen, akármit is jelentsen is ebben a definícióban "nyugalomban" szó. Ez azt jelenti, hogy a sajátidő lokális mennyiség, így nem köthető csillagászati időegységhez. Az ilyen mennyiségeket "lokális", vagy "saját" mennyiségekként fogjuk aposztrofálni továbbiakban.

A definíció következményeként megállapíthatjuk, hogy az atomi méretek helyi mértékkel mérve állandóak, vagyis helytől függetlenül arányban vannak az időmérésre kiválasztott atomi frekvenciák hullámhosszával. Ez azt is jelenti, hogy egy kiválasztott részecske, pl. a cézium 133 atom átérője (λ) használható lenne a távolagsmérés alapegységeként. Ezt a kitélt a későbbiekben még fel fogjuk használni.

3 A Schwarzschild megoldás

Schwarzschild metrika az általános relativitáselmélet statikus gömbszimmetrikus megoldása. A megoldást Karl Schwarzschild vezette le csupán néhány hónappal az elmélet első megjelenése után.

Majd fél évszázad múltán Kruskal [5] és Szekeres [6] mutatta meg, hogy a megoldásnál mutatkozó szingularitások eltérően viselkednek. Az $r=r_g$ gömbfelületen jelentkező szingularitás csupán a koordinátaválasztás következménye: ez megfelelő választás esetén megszüntethető, így a Schwarzschild megoldás kiterjeszthető egészen az $r=0$ pontig. Csak jóval később sikerült a megoldást kiterjeszteni – bizonyos feltételezések mellett – az $r=0$ helyen lévő valódi, topológiai szingularitáson túlra, egy másik, a miénkkel párhuzamos térrészre. [7]

Az évek során Einstein gravitációelméletének számos, a statikus gömbszimmetrikus esetről általánosabb megoldása született. Mégis éppen egyszerűsége indokolja, hogy az elmélet alapelveinek teljesülését ezen a modellen vizsgáljuk. Ezért a továbbiakban a Schwarzschild megoldás topológiáját, illetve a nyugalomban lévő részecske geometriai tulajdonságait vizsgáljuk.

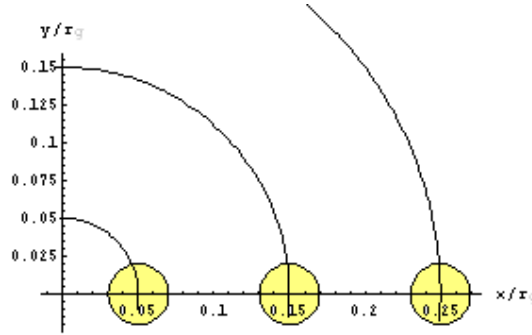
4 Koordinátarendszerek

4.1 Standard, vagy Schwarzschild koordináták

Az általános relativitáselmélet legjobban ismert sztatikus szimmetrikus – Schwarzschild – megoldásához standard koordinátákat használunk. Ez azt jelenti, hogy a metrika formája:

$$ds^2 = A[r] dt^2 + B[r] dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (1)$$

A standard koordináták sajátossága - definíció szerint -, hogy az origó körüli r sugarú gömb kerülete $r^2\pi$. Ez azt is jelenti, hogy az ilyen koordinátarendszer a sugárra merőleges irányban nem torzítja a távolságokat (lásd: az alábbi sematikus ábrán.), így az kifejezhető akár a kerület mentén elhelyezhető részecskék számával is. Ez a szám akkor sem változik, ha a megoldást konform transzformációnak vetjük alá. A részecskék méretének vizsgálatához mindezeket ki fogjuk használni.



1. ábra: A részecskék koordináta-mérete Schwarzschild rendszerben

Természetesen a részecskék koordináta vetülete nem gömbszerű, hiszen $g_{11} \neq 1$. (A standard koordinátarendszer nem alaktartó.)

4.2 Izotróp koordináták

In Izotróp metrika sajátossága, hogy a koordinátarendszer adott pontjában a távolságokat minden irányban egyformán torzítja. Ez egyben azt is jelenti, hogy az ilyen koordinátarendszer adott idősíkhöz tartozó a szögeket, ezen keresztül a térbeli formákat torzítás nélkül reprezentálja. A metrika alakját a (2) egyenlet mutatja.

$$ds^2 = A'[\rho] dt^2 + B'[\rho] (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (2)$$

Mindezek következményeként építhetünk arra, hogy az atomok alakja az ilyen koordináta-rendszerben gömbszimmetrikusnak tekinthető. Sok esetben persze elég lenne kikötni, hogy a részecske nem vesz fel elfajuló formát, vagyis ha mérete az egyik irányban véges, akkor minden irányban annak kell lennie, és viszont.

5 Koordináta transzformáció

Tekintsük át a standard és izotróp koordináták közötti transzformáció tulajdonságait. A transzformáció a

$$r = \rho \left(1 - \frac{r_g}{4\rho} \right)^2 \quad (3)$$

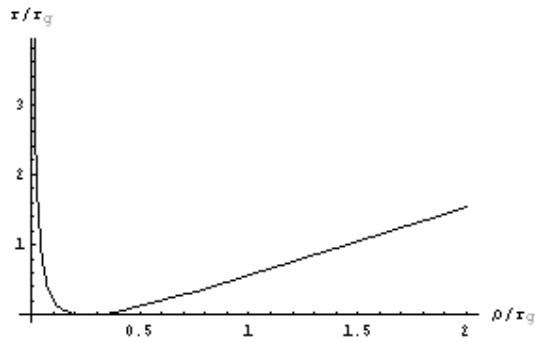
parametrizálással végezhető el [1][2], amiből az izotróp metrikára

$$ds^2 = \left(\frac{1 - \frac{r_g}{4\rho}}{1 + \frac{r_g}{4\rho}} \right)^2 c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{r_g}{4\rho} \right)^4 (d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 + \rho^2 \sin^2 \theta d\phi^2) \quad (4)$$

adódik. A következőkben azt vizsgáljuk, mi a transzformáció és a kapott metrika fizikai jelentése.

5.1 A helyvektor transzformációja

Az (3). egyenlet alapján az izotróp koordinátákra való áttérés helyvektorra gyakorolt hatását, vagyis a standard sugár (r) izotróp sugártól (ρ) való függését ($r_g=1$ jelöléssel) az alábbi ábra mutatja.

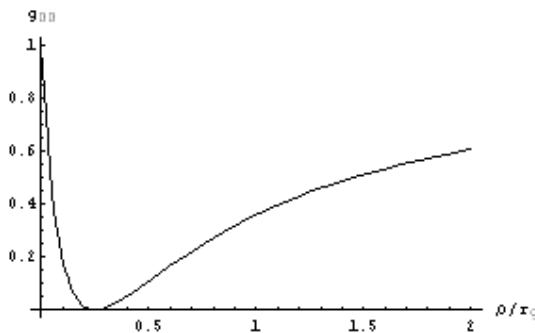


2. ábra: A standard sugár függése az izotróp sugártól

Szembetűnő, hogy a függvénynek $\rho=r_g/4$ értéknél minimuma van, melynek értéke zérus ($r=0$). Ez azt is jelenti, hogy a függvény a minimum két oldalán adott standard sugár értéket két izotróp sugár értéknél veszi fel, melyek közül az egyik az $0 \rightarrow r_g/4$, a másik a $r_g/4 \rightarrow \infty$ tartományban lép fel.

Nyilvánvalóan a $\rho=r_g/4$ izotróp sugárnál a standard koordinátarendszer origójánál lévő szingularitás vetülete jelenik meg. Az azon kívüli tartomány a Schwarzschild megoldás Kruskal és Szekeres által kiterjesztett teret, míg az azon belüli az orion keresztül csatlakozó másik térrészt fedi le. Külön érdekesség, hogy a Schwarzschild szingularitás (standard koordinátarendszer origója) izotróp koordinátarendszerben egy gömbfelületnek, míg a $\rho=0$ a belső térrész végtelenjének felel meg.

Nem meglepő, hogy ugyanezek olvashatók ki a metrikus tenzor g_{00} komponensének izotróp sugártól való függéséből, vagyis $\rho=r_g/4$ esetén $g_{00}=0$, míg $\rho=0$ értéknél ugyanígy a végtelennek megfelelő értéket veszi fel.



3. ábra: A g_{00} függése az izotróp sugártól

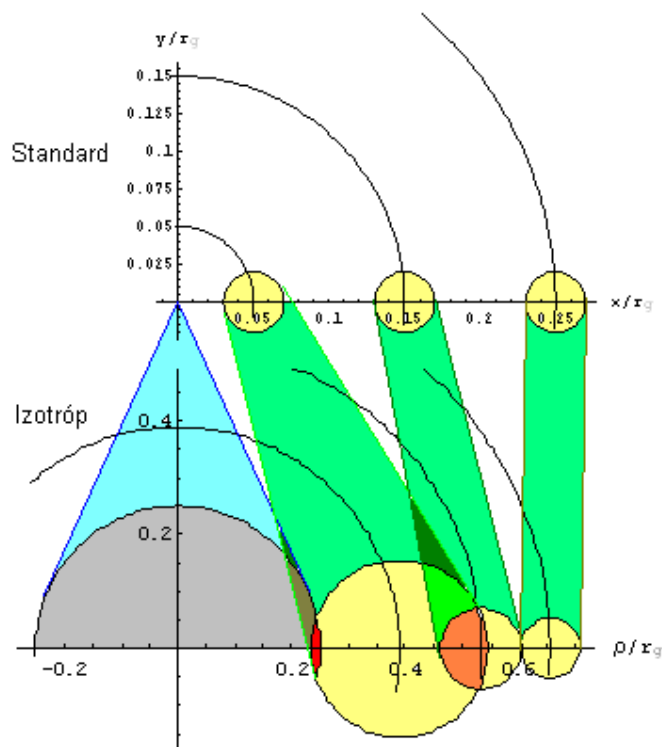
5.2 A részecskék transzformációja

Meg szeretnénk vizsgálni a részecske méretét izotróp koordináták esetén. Ehhez vissza kell utalnunk egy korábbi fejezetre, ahol a részecske méret és a standard sugár kapcsolatát, illetve a transzformáció hatását elemeztük.

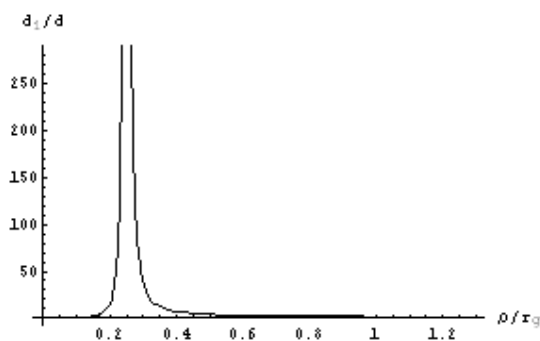
A részecskék mérete szempontjából a standard és izotróp rendszerek között két fő különbséget kell felemlítenünk: az egyik az alakhűség, mely az izotróp koordináta sajátja; másik pedig, hogy a standard koordináták esetén a helyvektorra merőleges

irányban a részecskék koordinátákban megadott mérete (dx) állandó. Minden más esetben csak a $g_{11}^{1/2}dx$ érték változatlan.

Mivel egy adott gömbfelületen a részecske szám nem függ a koordinátázástól, így belátható, hogy a transzformáció során a helyvektorra merőleges irányban a részecskék mérete a helyvektor hosszával arányosan változik. A részecske méretének a transzformáció során történő relatív megváltozását az alábbi ábra és diagram mutatja:



4. ábra: A részecske méret transzformációja (standard $\rightarrow$ izotróp)



5. ábra: A részecske relatív mérete izotróp koordinátarendszerben

Láthatóan az izotróp rendszer $r_g/4$ gömbfelülete érdekes, mely a standard koordináta rendszer origójának vetülete. Ez esetben a transzformáció nagyítása, ezzel a részecskék mérete végtelenre adódik. Mivel ezen a helyen $g_{11}^{1/2}$ véges és szigorúan monoton csökkenő tendenciát mutat (az izotróp koordinátarendszerben), nyilván az $r_g/4$ gömbfelülethez közeledő részecske koordináta-mérete végtelen felé tart: elvileg a részecske egyszerűen „szétfolyik” a teljes térben.

6 Következmények

Amint azt az izotróp koordinátarendszerben megállapítottuk, a Schwarzschild megoldás origójához közeledő részecskék nem tekinthetők pontszerűnek, sőt a szingularitást elérve kitöltenék a teljes teret. Ez természetesen azt jelzi, hogy elértük az elmélet alkalmazhatóságának határát.

Ez a határ ott húzható meg, ahol a részecske mérete és a téridő görbülete között még nagyságrendi különbség van, hiszen – visszatérve az általános relativitáselmélet alapelveihez – az einsteinin ekvivalencia elv csak olyan kis térrészben alkalmazható, ahol a gravitációs tér még homogénnek tekinthető.

Ez természetesen a vizsgált extrém körülmények között nem áll fenn, így ilyen tartományokban magától értetődően megkérdőjeleződik a geodetikus hipotézis és az arra épülő általános relativitáselmélet alkalmazhatósága.

7 Összefoglalás

A távolság és időmérések elméletének figyelembevételével megvizsgáltuk az általános relativitáselmélet Schwarzschild megoldását; konkrétan izotróp koordináták segítségével részecskék és a téridő geometriájának viszonyát. Azt találtuk, hogy a szingularitáshoz közeledve a részecskék mérete végtelenhez tart olyan mértékben, hogy a részecskék a teljes térben szétfolynak.

Ez arra hívta fel a figyelmet, hogy a einsteini ekvivalencia elv és a geodetikus hipotézis érvényességének alapfeltétele a valódi szinguláris helyek közelében alapvetően sérül, így maga az általános relativitáselmélet sem alkalmazható a téridő ilyen extrém tartományaiban. Ez persze azt is jelenti, hogy ezen tartományon Einstein vákuumegyenletére kapott matematikai megoldások nem tükrözik hűen a fizikai valóságot, így azokból nem szabad mélyebb következtetéseket levonni.

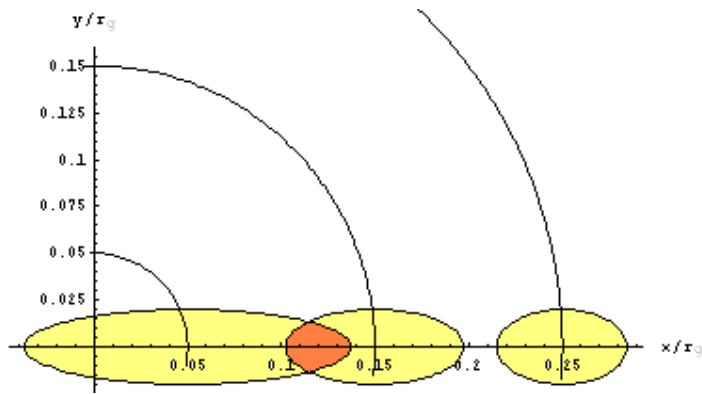
8 Hivatkozások

- [1] Landau and Lifsz, Theoretical Physics II, 1972
- [2] Hraskó, Relativitáselmélet, Typotex 2002
- [3] B. Guinot, Time and Standards – An Overview, Proceedings of IAU Colloquium 180 (2000)
- [4] SI brochure (8th edition), 2006, http://www.bipm.fr/en/si/si_brochure/
- [5] M. D. Kruskal, Maximal Extension of Schwarzschild Metric, Phys. Rev. 119, 1743–1745 (1960)
- [6] G. Szekeres, Publ. Mat. Debrecen 7 (1960), 285
- [7] Peeters, K.; Schweigert, C.; van Holten, J. W., Extended Geometry of Black Holes, Class.Quant.Grav. 12 (1995) 173-180
<http://adsabs.harvard.edu/abs/1990MNRAS.247..651L>
- [8] Neil Ashby,
"Relativity in the Global Positioning System",
Living Rev. Relativity 6, (2003), 1. URL (cited on 2005.12.22):
<http://www.livingreviews.org/lrr-2003-1>

9 Függelék

9.1 A részecskék valós vetülete standard koordináták mellett

A részecskék standard koordinátarendszerben való megjelenítése során azokat gömbszerűnek ábrázoltuk. Ennek oka, hogy – bár a standard koordinátarendszer nem alaktartó - nem akartuk ezzel elvonni a figyelmet a lényegről. A részecskék valós koordináta vetületét az alábbi ábra mutatja.



6. ábra: A részecskék koordináta-vetülete Schwarzschild rendszerben

Nyilván az izotróp rendszerben tapasztalt hatások itt is megjelennek, hiszen a koordináta transzformáció nem változtatja meg a fizikai valóságot.