Respuestas del examen de Taller de Economía Cuantitativa II.

1.- Una industria utiliza una cantidad de capital K y una cantidad de trabajo L como insumos de su producción Q de acuerdo a la función:

$$Q = f(K, L) = 20K^{0.6}L^{0.4}$$

a) Al fijar una meta de producción de 400, las cantidades K y L deben cumplir la condición 400= $K^{0.6}L^{0.4}$. Despejar la variable K de la ecuación anterior.
b) Si L = 44, determine la cantidad de capital K que debe utilizarse para lograr la producción de 400.

Solución:

Al despejar la función de producción obtenemos:

$$400 = 20K^{0.6}L^{0.4} \rightarrow K^{0.6} = \frac{20}{L^{0.4}} \rightarrow K^{\frac{3}{5}} = \frac{20}{L^{\frac{2}{5}}} \rightarrow K = \frac{20^{\frac{5}{3}}}{L^{\frac{2}{3}}} \text{ ó } K = \frac{147.361}{L^{0.666}}$$

si ahora fijamos el trabajo L en 44 unidades tenemos que:

$$K = \frac{147.361}{L^{0.666}} \text{ ó } K = \frac{147.361}{44^{0.666}} \rightarrow K = \frac{147.361}{12.463} = 11.823$$

2.- En el mercado de melones la cantidad demandada por los consumidores está dada por $Q_d = 1{,}800 - 5p$ y la cantidad ofrecida por los productores es $Q_s = -120 + 7p$ donde p es el precio (por tonelada). ¿ a qué precio se equilibrará el mercado de melones?

Solución:

Igualamos la función de demanda y de oferta

$$Q^* = Q_d = Q_s \rightarrow 1800 - 5p = -120 + 7p$$

Tenemos así

$12p = 1650$ que resulta en $p = 1920/12$ ó $p = 160$
que resulta se el precio de equilibrio pues

$$Q_d = 1{,}800 - 5p \text{ y } Q_s = -120 + 7p \rightarrow Q_d = 1{,}800 - 5(160) \text{ y } Q_s = -120 + 7(160)$$

$$Q_d = 1{,}800 - 800 \text{ y } Q_s = -120 + 1120 \text{ por lo tanto } Q_d = Q_s = 1000$$

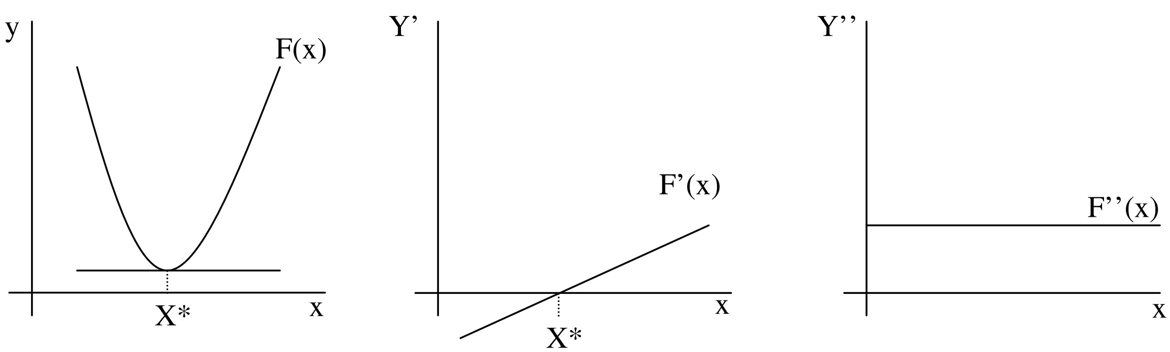
3.- Desarrolle los criterios del mínimo de una función algebraica, haga hincapié en la demostración económica, geométrica y analítica.

Dado que muchas de las relaciones que observamos en la economía no son ni necesariamente, ni estrictamente monótonas, debemos entender el sentido de tales relaciones a lo largo de un rango.
Desde el punto de vista económico, los conceptos de equilibrio y optimalidad se encuentran fundamentados en la existencia de un mínimo o un máximo según sea la naturaleza de la función, así, es común hallar el máximo de una función de ingreso, el mínimo de una función de costos, el máximo de una función de beneficios o el máximo de una función de producción.
La idea analítica del mínimo de una función parte desde las condiciones de calculo de una derivada y la representación de ésta como una razón de cambio instantánea y como la representación de la pendiente de una función en un determinado punto.
Las condiciones que se deben cumplir para la existencia del mínimo de una función son las siguientes:

Condición necesaria: $\frac{df}{dx} = 0$ que nos asegura que la función presenta al menos un punto crítico donde la pendiente llega a cero.

Condición suficiente: $\frac{d^2 f}{dx} > 0$ la cual nos va a indicar que el conjunto de pendientes de la función van desde un valor negativo hasta uno positivo, por lo cual el valor en la segunda derivada será mayor que cero.

Gráficamente podemos ver que:



4.- Encuentre el precio y la cantidad de equilibrio en el mercado si

Demanda = $Q^d = 500 + \frac{100}{p}$

Oferta = $Q^s = 150 + 4p$

Solución:

Igualamos la función de demanda y la función de oferta

$$Q^d = Q^s \rightarrow 500 + \frac{100}{p} = 150 + 4p \rightarrow 350 + \frac{100}{p} = 4p \text{ multiplicando por } p \text{ tenemos } 450p + 100 = 4p^2$$

Igualamos a cero y tenemos una ecuación de segundo grado

$4p^2 - 350p - 100 = 0$ y utilizamos la formula general $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

lo cual nos da

$$p = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{ó} \quad x = \frac{-(-350) \pm \sqrt{-350^2 - 4(4)(-100)}}{2(4)}$$

como es una ecuación de segundo grado tiene dos soluciones

$p_1 = -0.2847$ y $p_2 = 87.784$

Descartamos el p < 0 y tomaremos p > 0. Sustituimos en las funciones que fueron igualadas para comprobar el equilibrio

$$Q^* = Q_d = Q_s \rightarrow 500 + \frac{100}{p} = 150 + 4p \rightarrow 500 + \frac{100}{87.784} = 150 + 4(87.784) \rightarrow 501.139 \approx 501.136$$

5.- Encuentre el límite de las siguientes funciones:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2 - x - 2}$$

Solución:

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2 - x - 2} \rightarrow \lim_{x \to -1} \frac{x+1}{(x+1)(x-2)} \rightarrow \lim_{x \to -1} \frac{1}{x-2} = -\frac{1}{3}$$

$$\lim \frac{\dfrac{1}{\sqrt{9+x}} - \dfrac{1}{3}}{x} = -\frac{1}{54}$$

solución:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sqrt{9+x}}-\frac{1}{3}}{x}\to\frac{\frac{3-\sqrt{9+x}}{3\sqrt{9+x}}}{x}\to\frac{\frac{3-\sqrt{9+x}(3+\sqrt{9+x})}{3\sqrt{9+x}(3+\sqrt{9+x})}}{x}\to\frac{\frac{-x}{9\sqrt{9+x}+3(9+x)}}{x}$$

aplicando ley de sándwich podemos escribir

$$\frac{\frac{-x}{9\sqrt{9+x}+3(9+x)}}{\frac{x}{1}}\to\frac{-x}{9x\sqrt{9+x}+3x(9+x)}\to-\frac{x}{x(9\sqrt{9+x}+3(9+x))}\to-\frac{1}{9\sqrt{9+x}+3(9+x)}$$

Ahora podemos calcular

$$\lim_{x\to 0}-\frac{1}{9\sqrt{9+x}+3(9+x)}\to\frac{\lim_{x\to 0}1}{\lim_{x\to 0}9\sqrt{9+x}+3(9+x)}\to-\frac{1}{9\sqrt{9+0}+3(9+0)}=-\frac{1}{9\cdot 3+3\cdot 9}=-\frac{1}{54}$$

6.- Una fábrica de gelatinas elabora en promedio 260 unidades por hora. Por fallas del equipo y humanas, sólo se trabaja en forma efectiva 6.5 horas diarias de lunes a viernes y 4 horas el sábado. De la producción diaria se desecha alrededor de un 8% de las unidades por defecto de producción. ¿Cuál será la producción semanal efectiva de gelatinas?

Solución.

La producción semanal es 5 días de lunes a viernes y 1 día de fin de semana, el sábado, entonces lo escribimos como:
5(6.5hrs) + 1(4hrs)= 36.5 hrs semanales de trabajo.,

La función de producción nos dice que

Q = 260t donde t serán las horas de trabajo, así llegamos a

Q= 260(36.5) = 9490 sin embargo olvidamos que existe un desperdicio de 8% de la producción por lo que rescribimos como

Q = 0.92(260t) ó   Q = 239.2t que será Q = 239.2(36.5) = 8730.8 gelatinas semanales.