Chapter 1

Modelos de valuación de opciones vainilla

1.1 Opciones Vainilla

1.1.1 Conceptos

Las opciones vainilla son instrumentos derivados que dependen del precio de otros instrumentos mas básicos o subyacentes tales como acciones, indices de mercados, tipos de cambio o bonos y que están diseñadas para cubrir riesgos generados por el instrumento subyacente. Las opciones exóticas son diseñadas para cubrir condiciones de riesgo mas complejas. En este trabajo las opciones vainilla seran estudiadas.

Basicamente, una opción de compra (o call en inglés) otorga el derecho mas no la obligación de comprar el subyacente en un tiempo futuro a un precio acordado. Una opción de venta (o put en inglés) otorga el derecho mas no la obligación de vender el subyacente en un tiempo futuro a un precio acordado.

Una opción que se permite ejercer hasta su vencimiento se conoce como Europea. Una opción que se permite ejercer en cualquier momento de su vida y hasta su vencimiento se conoce como Americana.

Una opción vainilla ya sea de compra o venta, ya sea europea o americana, está relacionada con los siguientes parámetros:

- El precio de mercado o spot del instrumento subyacente
- El precio de ejercicio (strike)
- La fecha de vencimiento
- Una tasa de interés sin riesgo
- La volatilidad de los rendimientos ofrecidos por el subyacente

Los primeros tres parámetros son hasta cierto punto intuitivos, los dos últimos son basados en el estudio teórico de las opciones.

El precio de la opción representa el premio que debe pagar el inversionista a quien escribe u ofrece la opción.

El que escribe u ofrece la opción necesita conocer el esquema de replicación de la misma para diseñar una estrategia que permita cumplir con el contrato en caso de que sea ejercido.

1.1.2 Valuación de opciones

El precio de una opción vainilla debe ser calculado para cualquier tiempo antes de su vencimiento.

Si el precio del instrumento subyacente se simboliza como S_t y el precio de ejercicio como K, al vencimiento (es decir en $t = T$) una opción vainilla (europea o americana) tiene el siguiente valor:

$C_T = max(0, S_T - K)$ para una opción de compra en $t = T$

$P_T = max(0, K - S_T)$ para una opción de venta en $t = T$

Ambas expresiones se conocen como la función de pago de una opción.

En el primer caso, el propietario de la opción tiene la posibilidad de comprar una accion a un precio K. Si el precio del mercado S_T es mayor que K ($S_T > K$) conviene ejercer el contrato y vender las acciones a un precio mayor, generando una ganancia. Si se da el caso contrario ($S_T <= K$) entonces no se necesita ejercer la opción.

En el segundo caso, el propietario de la opción tiene la posibilidad de vender una accion a un precio K. Si el precio del mercado S_T es menor que K ($S_T < K$) conviene ejercer el contrato y vender las acciones a un precio mayor, generando una ganancia. Si se da el caso contrario ($S_T >= K$) entonces no se necesita ejercer la opción.

Para un inversionista que tiene una posición corta en una opción, el razonamiento anterior se aplica a la inversa.

La siguiente pregunta es como obtener el precio de una opción en cualquier tiempo desde su emisión hasta antes de su vencimiento ($0 <= t < T$).

Para poder realizar dichos cálculos se debe hacer uso de la teoría matemática de procesos estocásticos. Existen dos enfoques, uno basado en un modelo discreto y otro en un modelo continuo.

En este capítulo se estudiarán ambos enfoques, partiendo de un modelo discreto a un solo periodo, y luego discreto a múltiples periodos para concluir con un modelo continuo.

1.2 Modelo discreto de un periodo

1.2.1 Especificación del modelo

Un modelo discreto de un periodo no es real para poder representar las variaciones aleatorias del subyacente. Pero es la primera aproximación para estudiar modelos más complejos.

Los elementos del modelo son [Pl97]:

- La fecha de inicio $t = 0$ y la fecha de vencimiento $t = T$, con posibilidad de vender y comprar entre ambas fechas.

- Un espacio muestral Ω con un numero de elementos $K < \infty$

  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_K\}$

  por cada $\omega \in \Omega$ se debe pensar en un estado posible del mundo, el valor que es desconocido en $t = 0$ pero que es descubierto en el tiempo $t = T$.

- Una medida de probabilidad P sobre Ω, con $P(\omega) > 0$ para $\forall \omega \in \Omega$

- Una inversión sin riesgo donde $B_0 = 1$ y $B_T = (1 + r)$ donde r es una tasa de interés libre de riesgo que se obtiene por invertir una unidad monetaria en el tiempo cero. La variable r puede ser aleatoria o determinística.

- Un proceso de precios

  $S = \{S_t \mid t = 0, T\}$ donde $S_t = \{S_1(t), S_2(t), \ldots, S_N(t)\}, N < \infty$

  y $S_n(t)$ es el precio del instrumento n en el tiempo t. En el tiempo $t = 0$ los valores de los instrumentos en $t = T$ no son conocidos y son representados como variables aleatorias.

1.2.2 Replicación de una opción via un portafolio

La replicación consiste en construir un portafolio en el tiempo 0 cuya característica es igual de manera exacta el precio final de la opción en el tiempo T.

Sea un estrategia $H = (H_0, H_1, ..., H_N)$ de negociación o compra/venta de instrumentos o la cantidad de instrumentos que debe componer a un portafolio del tiempo $t = 0$ a $t = T$. La cantidad H_0 es el numero de unidades monetarias que se invierte en el activo sin riesgo (la cuenta de ahorro) y para $n >= 1$ el valor H_n es el número de instrumentos (por ejemplo, acciones) que se tienen hasta el tiempo T. Se puede suponer que el numero de unidades H_n puede ser positivo o negativo, dando oportunidad de representar prestamos o ventas en corto.

Dado el modelo de un solo periodo, es posible formular el precio de una opción europea.

Sea V_t el valor de portafolio en $t = 0, T$. Queda definido por:

$V_t = H_0 B_t + \sum_{n=1}^{N} H_n S_n(t)$

Ejemplo simbólico

Se va a suponer que sólo se tienen dos instrumentos, la cuenta de ahorro y un instrumento S_1 que puede ser una acción. Los valores del portafolio quedan definidos como:

$V_0 = H_0 B_0 + H_1 S_1(0)$

$V_T = H_0 B_T + H_1 S_1(T)$

Si $B_0 = 1$ y $B_T = (1+r)$, se puede sustituir en las ecuaciones anteriores.

Se suponen dos posibles estados, es decir $K = 2$.

El valor de la opción europea en el tiempo $t = 0$ para ambos estados es C_0. El valor de la opción europea en el tiempo $t = T$ para el estado ω_1 es C_u y para el estado ω_2 es C_d.

Para el activo S_1 en el tiempo $t = T$, para el estado ω_1 su valor es S_u y para el estado ω_2 su valor es S_d.

Si la estrategia H es replicar a la opción europea, se debe proponer lo siguiente:

$V_0 = C_0 = H_0 + H_1 S_1(0)$

$V_T(\omega_1) = C_u = H_0(1+r) + H_1 S_u$

$V_T(\omega_2) = C_d = H_0(1+r) + H_1 S_d$

Tomando las dos ultimas ecuaciones, se puede resolver el sistema para poder conocer la estrategia de replicación. El resultado es:

$H = ((C_d S_u - C_u S_d)/((1+r)(S_u - S_d)), (C_u - C_d)/(S_u - S_d))$

y el valor de la opción europea en $t = 0$ ya se puede determinar.

Como se puede observar, el problema al ser resuelto arroja dos resultados, el precio de la opción y la estrategia de replicación.

Ejemplo numérico

El siguiente ejemplo fue tomado de [Ma97] El precio de una acción es de $280 y después de tres meses puede incrementar a $320 o decrementarse a $260. Se debe encontrar el precio de una opción europea con un precio de ejercicio de $280, conociendo que la tasa de interés es de 5%.

Los valores de la opción europea son $C_u = max(320 - 280, 0) = 40$ y $C_u = max(260 - 280, 0) = 0$.

Usando los resultados obtenidos, la estrategia queda definida por los siguientes valores $H = (-165.08, 0.66666)$ y el valor de la opción es $C_0 = 21.59$.

1.2.3 Valuación neutra al riesgo

Otro enfoque para valuar una opción es utilizazando el concepto de probabilidad, usando como herramienta la esperenza matemática. Si al vencimiento $t = T$ cada valor del subyacente se le asigna una probabilidad, el precio de la opción se obtiene calculando la esperanza de los posibles valores al vencimiento y descontandolo con la tasa de interés libre de riesgo.

$C_0 = (1+r)^{-1} E_{\mathcal{P}}[C_T]$

Pero el problema que surge es que el precio puede variar dependiendo de las probabilidades asignada a cada evento.

Al introducir el concepto de de una martingala, es posible proponer un esquema de valuación.

Se puede proponer una medida de probabilidad $\mathcal{P}^*$ en la cual el proceso que siguen el proceso del subyacente descontado a tasa de interés libre de riesgo es martingala. Los valores descontados se representan como: $\bar{S}_0 = S_0, \bar{S}_T = (1+r)^{-1}S_T$

Si el proceso del valor del subyacente a descuento es martingala, se puede escribir:

$\bar{S}_0 = S_0 = E_{\mathcal{P}^*}[\bar{S}_T] = (1+r)^{-1}E_{\mathcal{P}^*}[S_T]$

A los valores de probabilidad o medida de probabilidad $\mathcal{P}^*$ se le denomina medida martingala.

Ejemplo simbólico

Suponiendo un modelo con dos posibles estados, se puede calcular la medida martingala.

$\bar{S}_0 = S_0 = E_{\mathcal{P}^*}[\bar{S}_T] = (1+r)^{-1}E_{\mathcal{P}^*}[S_T] = (1+r)^{-1}(p^*S^u + (1-p^*)S^d)$

donde $p_* = \mathcal{P}^*\{\omega_1\}$ y $1 - p^* = \mathcal{P}^*\{\omega_2\}$

Resolviendo esta ecuación, se obtiene el valor de p_*

$p^* = (S_0(1+r) - S_d)/(S_u - S_d)$

Y el valor de la opción europea es:

$\bar{C}_0 = C_0 = E_{\mathcal{P}^*}[\bar{C}_T] = (1+r)^{-1}E_{\mathcal{P}^*}[C_T] = (1+r)^{-1}(p^*C_u + (1-p^*)C_d)$

Reemplazando el valor de p^* se tiene el siguiente valor (agrupando todos los terminos en los que aparece S_0):

$C_0 = ((C_dS_u - C_uS_d)/((1+r)(S_u - S_d))) + (S_0(C_u - C_d)/(S_u - S_d))$

El resultado es similar al que se obtuvo con el esquema de replicación.

La medida martingala es conocida como una medida de probabilidad neutra al riesgo.

Ejemplo númerico

Usando el mismo ejemplo que en el caso de replicación, se obtienen el valor de probabilidad $p^* = 0.566666$.

Empleando ese valor, la opción tiene un precio de $21.59.

1.2.4 Relación entre enfoque martingala y replicación

En la sección anterior se mostró que la replicación y la medida martingala llevan al mismo resultado.

Este resultado se puede generalizar para cualquier número de instrumentos y estados. Para lograrlo se hace uso de una representación en matrices del problema.

Sean las siguientes definiciones:

Se tienen N instrumentos subyacentes con un proceso de precios aleatorio y un activo libre de riesgo.

Un conjunto de estados posibles e igual K

Un vector de precios de los instrumentos (incluyendo al activo libre de riesgo) en $t = 0$ de dimensión $(N + 1) \times 1$

$$\vec{S(0)} = \begin{pmatrix} S_1(0) \\ \vdots \\ S_N(0) \\ B(0) \end{pmatrix}$$

El precio de las opción en $t = 0$ es $C(0)$

Una matriz de precios a descuentos de los subyacentes y el activo de riesgo en $t = T$ que representa los posibles valores terminales en cada estado posible de cada opción de dimensión $N + 1 \times K$

$$\bar{S}\hat{(T)} = (1+r)^{-1} \begin{pmatrix} S_1(T)(\omega_1) & S_1(T)(\omega_2) & \cdots & S_1(T)(\omega_K) \\ S_2(T)(\omega_1) & S_2(T)(\omega_2) & \cdots & S_2(T)(\omega_K) \\ \vdots & \vdots & \ddots \vdots & \\ S_N(T)(\omega_1) & S_N(T)(\omega_2) & \cdots & S_N(T)(\omega_K) \\ B(T) = 1 + r & B(T) = 1 + r & \cdots & B(T) = 1 + r \end{pmatrix}$$

Una matriz de precios de la opción en $t = T$ que representa los posibles valores terminales en cada estado posible de cada opción de dimensión $1 \times K$

$$C\vec{(T)} = \begin{pmatrix} C_1(T)(\omega_1) & C_1(T)(\omega_2) & \cdots & C_1(T)(\omega_K) \end{pmatrix}$$

Un vector de estrategia que indica la cantidad de instrumentos a negociar para lograr la replicación de dimensión $1 \times N + 1$

$$\vec{H} = \begin{pmatrix} H_1 & \cdots & H_N & H_0 \end{pmatrix}$$

Un vector de probabilidad de ocurrencia de cada estado de dimensión $K \times 1$

$$\vec{\pi} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_K \end{pmatrix}$$

Usando estas definiciones, para la valuación con replicación se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales, donde la incógnita es la estrategia de valuación:

$$C\vec{(T)} = (1+r)\vec{H} \times \bar{S}\hat{(T)}$$

y el precio es:

$$C(0) = \vec{H} \cdot \vec{S(0)}$$

Para obtener la medida martingala se plantean las siguientes ecuaciones lineales:

$$\vec{S(0)} = \bar{S}(\hat{T}) \times \vec{\pi}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{\pi} = 1$$

y el precio de la opción es

$$C(0) = (1+r)^{-1} \vec{C(T)} \cdot \vec{\pi}$$

En ambos casos el problema consiste en obtener una solución al sistema de ecuaciones lineales. Pueden existir las siguientes posibilidades:

- El sistema tiene un conjunto de soluciones determinado, es decir una solución única
- El sistema tiene un conjunto de soluciones que quedan en función de incógnitas del sistema, a las cuales se les puede asignar cualquier valor. En este caso el sistema tiene un conjunto infinito de soluciones o es indeterminado.
- El sistema no tiene solución.

En ambos casos, los sistemas de ecuaciones son equivalentes.

Si se obtiene un solo precio, es decir una estrategia de replicación o una medida de probabilidad neutra al riesgo única, no existe confusión con respecto al precio de la opción en el tiempo $t = 0$, esto se conoce como la ley de unicidad del precio.

En caso contrario, si se obtiene un conjunto infinito de soluciones entonces no es posible hablar de un precio único y esto puede llevar a una oportunidad de arbitraje.

En conclusión, si existe una estrategia de replicación única o una medida de probabilidad neutra al riesgo no existe arbitraje.

1.2.5 Arbitraje

La definición informal del concepto de arbitraje es que se obtiene un beneficio sin riesgo o ganar dinero sin tener que invertir.

Pueden existir dos condiciones por las que sucede arbitraje

- El portafolio replicado garantiza un retorno positivo en todos los estados aunque los costos de compra sean nada o negativos.

$$\vec{S(t)} \cdot \vec{H} \leq 0$$

y

$$\hat{D(t)}^T \cdot \vec{H} > 0$$

- El portafolio garantiza un retorno no negativo (con posibilidad de no tener ganancia) a costos de compra negativos

$$\vec{S(t)} \cdot \vec{H} < 0$$

y

$$\hat{D(t)}^T \cdot \vec{H} \geq 0$$

Desde el punto de vista económico, la presencia de arbitraje implica que no se ha alcanzado una condición de equilibrio y por ende, las fuerzas de la ley de oferta y demanda llevaran a un estado de no arbitraje.

Por eso es que los modelos de valuación son establecidos bajo condiciones de no arbitraje.

1.2.6 Teorema fundamental de valuación de activos

Surge la pregunta, como se relaciona de manera formal el concepto de ausencia de arbitraje (o no arbitraje) con la obtención de un portafolio replica o medida de probabilidad neutra al riesgo o de manera general una medida del precio.

El teorema fundamental de valuación de activos establece dicha relación, y en su modelo discreto a un sólo periodo queda enunciado como.

Si no existe arbitraje entonces una medida del precio existe. De manera inversa, si existe una medida de precio entonces no hay oportunidades de arbitraje.

Este teorema se deja sin demostrar, pero se puede consultar [Pl97] para una explicación formal sobre como demostarlo, basado en conceptos de algebra lineal.

Un mercado se conoce como viable si no existe oportunidad de arbitraje. Al tener un mercado viable existe una medida de probabilidad $\mathcal{P}^*$ en la cual los precios a descuento de los instrumentos o activos son martingala.

Si en un mercado cada instrumento derivado que exista puede ser generado por una estrategia de replicación se conoce como completo.

Un mercado viable es completo si y solo si existe una medida de probabilidad $\mathcal{P}^*$ única en la cual los precios a descuento de los instrumentos o activos son martingala.

La conclusión es que al resolver el modelo matemático de un periodo y se obtiene una solución unica, entonces no existen condiciones de arbitraje. Y al no existir condiciones de arbitraje es posible valuar y generar la estrategia de replicación del instrumento derivado.

1.2.7 Paridad Compra Venta

Cuando se construye un portafolio con una opcion europea de compra con posición larga y una opción europea de venta con posición corta se encuentra una relación conocida como la paridad de compra-venta.

Para entender la relación, se puede observar que al vencimiento $t = T$ se cumple que la diferncia entre la opción de compra y venta es:

$$C(T) - P(T) = (S(T) - K)^+ - (K - S(T))^+ = S(T) - K$$

Si se calcula el valor de portafolio para $t = 0$, utilizando la tasa libre de riesgo para descontar el valor de ejercicio K :

$$C(0) - P(0) = S(0) - (K/(1 + r))$$

esta expresión es la paridad de compra venta.

1.3 Modelo discreto de múltiples periodos

1.3.1 Especificación del modelo

Un modelo de múltiples periodos es mucho mas real que el de un solo periodo. De hecho es usado en el mundo financiero.

Los elementos del modelo son [Pl97]:

- $T+1$ fechas de negociación divididos en periodos $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, n\Delta t = T$, donde Δt representa el intervalo de tiempo que pasa entre cada fecha de negociación.

- Un espacio muestral Ω con un numero de elementos $K < \infty$

  $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_K\}$

  por cada $\omega \in \Omega$ se debe pensar en un estado posible del mundo

- Una medida de probabilidad P sobre Ω, con $P(\omega) > 0$ para $\forall\omega \in \Omega$

- Una filtración $F = \{\mathcal{F}_t; t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, n\Delta t = T\}$, que indica como la información acerca de los instrumentos se va revelando a los inversionistas.

- Un proceso de la inversion sin riesgo

  $B = \{B_t; t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, n\Delta t = T\}$,

  donde B es un proceso estocástico con $B_0 = 1$ y con $B_t(\omega) > 0$. La tasa de interés del intervalo $(t-1, t)$ se define como $r_t = (B_t - B_(t-1))/B_t$ y se cumple que $r_t \geq 0$.

- Un proceso de N instrumentos con riesgo

  $S_n = \{S_n(t); t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, n\Delta t = T\}$,

  donde $S_n \geq 0$ y se interpreta como el precio t del precio del instrumento n con riesgo.

La diferencia con el modelo de un periodo es la filtracion F y el proceso de instrumentos con riesgo.

La filtracion F se relaciona con el concepto de sigma algebra, con la cual se puede particionar el espacio de eventos Ω, $\mathcal{F}_t$ representa el algebra al tiempo t. Se cumple que $\mathcal{F}_0 = \{\oslash, \Omega\}$ y $\mathcal{F}_T$ se compone de todos los subconjuntos de Ω y $\mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_{t+1}$ es decir que la filtración es una secuencia anidada de sigma algebras.

El proceso estocástico de los precios de instrumentos con riesgo es una función de $S_n(t,\omega)$.

Su dominio es $\{0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, n\Delta t = T\} \times \Omega$. Por cada $\omega \epsilon \Omega$ fijo, la funcion $t \to S_n(t,\omega)$ es llamada la trayectoria de eventos. Por cada t fijo, la función $\omega \to S_n(t,\omega)$ es una variable aleatoria.

El proceso estocástico de los precios es consistente con la estructura de informació o filtración F, debido a que $S_n(t,\omega)$ es medible con respecto a la sigma algebra $\mathcal{F}_t$. Es decir, el proceso S_n está adaptado a la filtración F.

Con este proceso, el inversionista tiene un conocimiento completo de los precios pasados y presentes pero nunca del futuro.

1.3.2 Replicación de una opción via un portafolio

Una estrategia de negociación $H = (H_0, H_1, \cdots, H_N)$ es un vector de procesos estocásticos $H_n = \{H_n(t); t = \{0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, n\Delta t = T\}$ donde $n = 0, 1, \cdots, N$. Se debe interpretar $H_n(t)$ como el numero de unidades de un instrumento con riesgo que un inversionista tiene del tiempo $t-1$ al tiempo t.

El valor de un portafolio en el tiempo t queda definido como:

$$V(t) = \vec{H}(t) \cdot \vec{S}(t)$$

Un estrategia de negociación se conoco como autofinanciable si satisface

$$\vec{H}(t-1) \cdot \vec{S}(t) = \vec{H}(t) \cdot \vec{S}(t)$$

para $\forall t \leq T$

Lo que indica esta definición es que al tener un portafolio autofinanciable, el inversionista puede ajustar o rebalancear el número de posiciones de $t-1$ a t pero el valor del portafolio permanece identico.

La ganancia de una estrategia queda expresada como:

$$G(t) = \sum_{i=0}^{t-1} \vec{H}(i) \cdot (\vec{S}(i+1) - \vec{S}(i))$$

y el valor de un portafolio con una estrategia que es autofinanciable queda representada como:

$$V(t) = \vec{H}(0) \cdot \vec{S}(0) + \sum_{i=0}^{t-1} (\vec{H}(i+1) \cdot \vec{S}(i+1) - \vec{H}(i) \cdot \vec{S}(i)$$

$$V(t) = \vec{H}(0) \cdot \vec{S}(0) + \sum_{i=0}^{t-1} (\vec{H}(i) \cdot \vec{S}(i+1) - \vec{H}(i) \cdot \vec{S}(i)$$

$$V(t) = \vec{H}(0) \cdot \vec{S}(0) + \sum_{i=0}^{t-1} (\vec{H}(i) \cdot (\vec{S}(i+1) - \vec{S}(i))$$

$$V(t) = V(0) + G(t)$$

Esto implica que cualquier ganancia o perdida en el portafolio se atribuye a cambios en los instrumentos de los que se compone.

La estrategia de replicación se puede obtener a partir de la siguiente ecuación:

$$C(t, \omega_k) = \vec{H}(t) \cdot \vec{S}(t, \omega_k)$$

donde $C(t, \omega_k)$ representa el valor de la opción en el tiempo t y en el estado ω_k.

Para calcular la estrategia de replicación se supone que se conoce el valor de la opción en $t = T$.

$V(T)(\omega_k) = H_0(T)(\omega_k)B(T)(\omega_k) + \sum_{i=1}^{N} H_i(T)(\omega_k)S_i(T)(\omega_k)$

con $\omega_k = \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$

Y dado que la estrategia de replicación es predecible, se pueden reducir el número de incógnitas.

Debido a que la estrategia es autofinanciable se puede escribir:

$V(T-1)(\omega_k) = H_0(T)(\omega_k)B(T-1)(\omega_k) + \sum_{i=1}^{N} H_i(T)(\omega_k)S_i(T-1)(\omega_k)$

y se puede obtener el valor $V(T-1)$.

Despues se resuelve

$V(T-1)(\omega_k) = H_0(T-1)(\omega_k)B(T-1)(\omega_k) + \sum_{i=1}^{N} H_i(T-1)(\omega_k)S_i(T-1)(\omega_k)$

Y se puede obtener $V(T-2)$ y asi sucesivamente hasta obtener $V(0)$.

Ejemplo simbólico

Se supone que existen dos instrumentos, la cuenta bancaria libre de riesgo y un instrumento S_1 que puede ser una acción. Es decir $N = 1$.

Los intervalos de tiempo son $t = 0, \Delta t, 2\Delta t$

Los posibles estados son $K = 4$.

En la siguiente tabla se presenta el valor del instrumento con riesgo:

ω_k	$t = 0$	$t = \Delta t$	$t = 2\Delta t$
ω_1	S_0	S_u	S_{uu}
ω_2	S_0	S_u	S_{ud}
ω_3	S_0	S_d	S_{du}
ω_4	S_0	S_d	S_{dd}

Y los valores de la opción en $t = T = 2\Delta t$:

ω_k	$t = 2\Delta t$
ω_1	C_{uu}
ω_2	C_{ud}
ω_3	C_{du}
ω_4	C_{dd}

Y los valores del instrumento sin riesgo , $B(t)$, son:

ω_k	$t = 0$	$t = \Delta t$	$t = 2\Delta t$
ω_1	1	$(1+r)$	$(1+r)^2$
ω_2	1	$(1+r)$	$(1+r)^2$
ω_3	1	$(1+r)$	$(1+r)^2$
ω_4	1	$(1+r)$	$(1+r)^2$

Aplicando la replicación para $T = 2\Delta t$:
$V(T)(\omega_k) = H_0(T)(\omega_k)B(T) + H_1(T)(\omega_k)S_1(T)$
con $\omega_k = \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$
Esto lleva al siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{pmatrix} C_{uu} \\ C_{ud} \\ C_{du} \\ C_{dd} \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} H_0(\omega_1)(T) & H_1(\omega_1)(T) \\ H_0(\omega_2)(T) & H_1(\omega_2)(T) \\ H_0(\omega_3)(T) & H_1(\omega_3)(T) \\ H_0(\omega_4)(T) & H_1(\omega_4)(T) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (1+r)^2 & (1+r)^2 & (1+r)^2 & (1+r)^2 \\ S_{uu} & S_{ud} & S_{du} & S_{dd} \end{pmatrix}$$

Se obtiene un sistema de 4 ecuaciones con 8 incógnitas. Sin embargo existe una propiedad que tiene $H_k(\omega_k)$ y es que es predecible a una filtración de eventos debido a que es medible con respecto a una filtración anterior. Por esta propiedad es posible decir que $H_k(\omega_1) = H_k(\omega_2)$ y $H_k(\omega_3) = H_k(\omega_4)$ quedando cuatro incógnitas. Resolviendo:

$$\hat{H}(T) = \begin{pmatrix} H_0(\omega_1)(T) & H_1(\omega_1)(T) \\ H_0(\omega_2)(T) & H_1(\omega_2)(T) \\ H_0(\omega_3)(T) & H_1(\omega_3)(T) \\ H_0(\omega_4)(T) & H_1(\omega_4)(T) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (C_{ud}S_{uu} - C_{uu}S_{ud})/((S_{uu} - S_{ud})(1+r)^2) & (C_{uu} - C_{ud})/(S_{uu} - S_{ud}) \\ (C_{ud}S_{uu} - C_{uu}S_{ud})/((S_{uu} - S_{ud})(1+r)^2) & (C_{uu} - C_{ud})/(S_{uu} - S_{ud}) \\ (C_{dd}S_{du} - C_{du}S_{dd})/((S_{du} - S_{dd})(1+r)^2) & (C_{du} - C_{dd})/(S_{du} - S_{dd}) \\ (C_{dd}S_{du} - C_{du}S_{dd})/((S_{du} - S_{dd})(1+r)^2) & (C_{du} - C_{dd})/(S_{du} - S_{dd}) \end{pmatrix}$$

Para $t = \Delta t$ se puede calcular el valor de C_u y C_d se calcula por la propiedad de un portafolio autofinanciable:
$V(T-1) = \hat{H}(T) \times \vec{S}(T-1)$

$$\begin{pmatrix} C_u \\ C_d \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} (C_{ud}S_{uu} - C_{uu}S_{ud})/((S_{uu} - S_{ud})(1+r)) + S_u(C_{uu} - C_{ud})/(S_{uu} - S_{ud}) \\ (C_{dd}S_{du} - C_{du}S_{dd})/((S_{du} - S_{dd})(1+r)) + S_d(C_{du} - C_{dd})/(S_{du} - S_{dd}) \end{pmatrix}$$

Y partir de los resultados de C_u y C_d se puede plantear el siguiente sistema de ecuaciones lineales para poder obtener la estrategia de replicación en $t = T - 1$:
$V(T-1) = \hat{H}(T-1) \times \vec{S}(T-1)$

$$\begin{pmatrix} C_u \\ C_d \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} H_0(\omega_1)(T-1) & H_1(\omega_1)(T-1) \\ H_0(\omega_2)(T-1) & H_1(\omega_2)(T-1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} (1+r) & (1+r) \\ S_u & S_d \end{pmatrix}$$

Dado que la estrategia es predecible se tiene que $H_0(\omega_1)(T-1) = H_0(\omega_2)(T-1)$ y $H_1(\omega_1)(T-1) = H_1(\omega_2)(T-1)$.

Se obtiene el siguiente resultado:

$$\begin{pmatrix} H_0(\omega_1)(T-1) & H_1(\omega_1)(T-1) \\ H_0(\omega_2)(T-1) & H_1(\omega_2)(T-1) \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} (C_dS_u - C_uS_d/((1+r)(S_u - Sd)) & (C_u - C_d)/(S_u - Sd) \\ (C_dS_u - C_uS_d/((1+r)(S_u - Sd)) & (C_u - C_d)/(S_u - Sd) \end{pmatrix}$$

Y el valor de la opción en $t = 0$ es:

$V(0) = H_0 + H_1 S_1(0)$

Ejemplo numérico

Una opción europea vence en 2 meses, teniendo un precio de ejercicio de \$5 con una tasa libre de riesgo $r = 0.1$. Los posibles estados a 1 mes y 2 meses son:

ω_k	$t=0$	$t=1mes$	$t=2meses$
ω_1	5	8	9
ω_2	5	8	6
ω_3	5	4	6
ω_4	5	4	3

Los valores de la opción europea en $T = 2meses$

ω_k	$t=2meses$
ω_1	4
ω_2	1
ω_3	1
ω_4	0

Y los valores de la cuenta bancaria en todos los posibles estados son:

$t=0$	$t=1mes$	$t=2meses$
1	1.1	1.21

Usando los resultados obtenidos en el ejemplo simbólico, se obtiene:

$$\hat{H}(T) = \begin{pmatrix} H_0(\omega_1)(T) & H_1(\omega_1)(T) \\ H_0(\omega_2)(T) & H_1(\omega_2)(T) \\ H_0(\omega_3)(T) & H_1(\omega_3)(T) \\ H_0(\omega_4)(T) & H_1(\omega_4)(T) \end{pmatrix}$$

$$\hat{H}(T) = \begin{pmatrix} -4.132231 & 1 \\ -4.132231 & 1 \\ -0.826446 & 0.333333 \\ -0.826446 & 0.333333 \end{pmatrix}$$

Con la estrategia se puede calcular el valor de la opción europea en $t = 1$

$$\begin{pmatrix} C_u \\ C_d \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} 3.454546 \\ .424230 \end{pmatrix}$$

Conociendo los valores de la opción europea en $t = 1$, se puede calcular la estrategia de replicación.

$$\begin{pmatrix} 3.454546 \\ 0.424230 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} H_0(\omega_1)(T-1) & H_1(\omega_1)(T-1) \\ H_0(\omega_2)(T-1) & H_1(\omega_2)(T-1) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1.1 & 1.1 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

Dado que la estrategia es predecible se tiene que $H_0(\omega_1)(T-1) = H_0(\omega_2)(T-1)$ y $H_1(\omega_1)(T-1) = H_1(\omega_2)(T-1)$.

El resultado es:

$$\begin{pmatrix} H_0(\omega_1)(T-1) & H_1(\omega_1)(T-1) \\ H_0(\omega_2)(T-1) & H_1(\omega_2)(T-1) \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -2.369169 & 0.757579 \\ -2.369169 & 0.757579 \end{pmatrix}$$

Estrategia que se aplica para obtener el valor de la opción en $t = 0$ dando $V(0) = 1.418726$

1.3.3 Valuación neutra al riesgo

El segundo esquema de valuación se basa en calcular la probabilidad neutra al riesgo. Dicho concepto esta ligado con esperanza condicional y martingala.

Una medida de probabilidad neutra al riesgo (también denominada medida martingala) es una probabilidad $\mathcal{P}^*$ tal que

- $\mathcal{P}^*(\omega) > 0$ para todo $\omega \epsilon \Omega$
- Para el proceso de instrumentos con riesgo a descuento $\bar{S}_n$ son martingalas bajo $\mathcal{P}^*$ para cada $n = 1, 2, \cdots, N$

Expresado en terminos de esperanza condicional

$E_{\mathcal{P}^*}[\bar{S}(t+s)|\mathcal{F}_t] = \bar{S}(t)$

para $s > 0$

Con esta relación, conociendo la filtración, los valores del proceso $\bar{S}(t)$ y los valores de la opción al vencimiento $t = T$, es posible calcular la probabilidad neutra al riesgo y con eso obtener el valor de la opción en $t = 0$.

El valor del portafolio que replica es martingala y cumple entonces:

$E_{\mathcal{P}^*}[\bar{V}(t+s)|\mathcal{F}_t] = \bar{V}(t)$

Ejemplo simbólico

Tomando los mismos datos que en el ejemplo de replicación, se calcula la medida de probabilidad neutra al riesgo, con las siguientes ecuaciones:

$E_{\mathcal{P}^*}[\bar{S}(1)|\mathcal{F}_0] = \bar{S}(0)$

$E_{\mathcal{P}^*}[\bar{S}(2)|\mathcal{F}_0] = \bar{S}(0)$

$E_{\mathcal{P}^*}[\bar{S}(2)|\mathcal{F}_1] = \bar{S}(1)$

donde la ultima expresion debe considerarse $\bar{V}(1)$ para los dos posibles estados en $t = 1$.

Aplicando las relaciones anteriores:

$S_0 = (1+r)^{-1}(S_u(P^*(\omega_1) + P^*(\omega_2)) + S_d(P^*(\omega_3) + P^*(\omega_4))$
$S_0 = (1+r)^{-2}(S_{uu}P^*(\omega_1) + S_{ud}P^*(\omega_2) + S_{du}P^*(\omega_3) + S_{dd}P^*(\omega_4))$
$S_u = (1+r)^{-1}(S_{uu}P^*(\omega_1) + S_{ud}P^*(\omega_2))/(P^*(\omega_1) + P^*(\omega_2))$
$S_d = (1+r)^{-1}(S_{du}P^*(\omega_3) + S_{dd}P^*(\omega_4))/(P^*(\omega_3) + P^*(\omega_4))$
y ademas se debe cumplir que:
$P^*(\omega_1) + P^*(\omega_2) + P^*(\omega_3) + P^*(\omega_4) = 1$
tomando tres ecuaciones con la última ecuación, es posible resolver y obtener:

$$\begin{pmatrix} P^*(\omega_1) \\ P^*(\omega_2) \\ P^*(\omega_3) \\ P^*(\omega_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\frac{S_u - S_0(1+r)}{S_{uu} - S_{ud}})(\frac{S_0(1+r) - S_d}{S_u - S_d}) \\ (\frac{S_{uu} - S_u(1+r)}{S_{uu} - S_{ud}})(\frac{S_0(1+r) - S_d}{S_u - S_d}) \\ (\frac{S_d(1+r) - S_{dd}}{S_{du} - S_{dd}})(\frac{S_u - S_0(1+r)}{S_u - S_d}) \\ (\frac{S_{du} - S_d(1+r)}{S_{du} - S_{dd}})(\frac{S_u - S_0(1+r)}{S_u - S_d}) \end{pmatrix}$$

Ejemplo numérico

Tomando los mismos datos que en el ejemplo numérico de la replicación.

Las probabilidades neutras al riesgo son:

$$\begin{pmatrix} P^*(\omega_1) \\ P^*(\omega_2) \\ P^*(\omega_3) \\ P^*(\omega_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.349999999 \\ 0.024999999 \\ 0.291666666 \\ 0.333333333 \end{pmatrix}$$

Para calcular el precio de la opción :
$C_0 = E[C(2)(1+r)^-2|\mathcal{F}_0]$
Resultando :
$C_0 = (1.1)^{-2}((4)(0.349999999)+(1)(0.024999999)+(1)(0.291666666)+(0)(0.333333333))$
El valor de la opción en $t = 0$ es 1.4187327.
Para calcular los valores de la opción en $t = \Delta t$
$C(1)(1+r)^{-1} = E[C(2)(1+r)^{-2}|\mathcal{F}_1]$
Lo cual lleva a que $C_u = 3.454545459$ y $C_d = 0.424242423$
Y la replicación delta en $t = 0$ es:
$H_1(0) = \frac{3.454545459 - 0.42424242}{8-4} = 0.757575759$

1.3.4 Consideraciones sobre el arbitraje

Como en el modelo de un periodo, se encuentra que valuar via replicación o medida neutra al riesgo son equivalentes.

Se puede enunciar de la siguiente manera: Si $\mathcal{P}^*$ es una medida martingala y H es una estrategia de replicación autofinancialbe entonces el proceso del valor a descuento que corresponde a H es una martingala bajo $\mathcal{P}^*$.

Esto implica que si se conoce la estrategia de financiamiento, se puede obtener la medida de probabilidad neutra al riesgo; y lo inverso es cierto.

En ambos casos, se deben resolver un sistema de ecuaciones simultaneas. En el caso de que exista una solució única se deriva que no hay oportunidades de arbitraje. A partir de este hecho se pueden extender los resultados del modelo de un solo perido al modelo multiperiodo.

1.3.5 Modelo de Cox-Ross-Rubinstein

1.4 Modelo continuo

1.4.1 Especificación del modelo

El modelo continuo permite analizar el precio de una opción considerando que el tiempo y el valor del subyacente toman valores continuos. Los elementos del modelo son:

- Un tiempo de negociación continuo en un intervalo finito $t\epsilon[0,T]$.
- Un espacio muestral continuo Ω que representa los posibles estados del mundo.
- Una medida de probabilidad P, con $P(\omega) > 0$ para $\forall\omega\epsilon\Omega$.
- Una filtracion F y una familia $(\mathcal{F}_t)$ de algebras σ sobre F, la cual es una especificación completa de la información a lo largo del tiempo. $\mathcal{F}_t$ incluye cada evento basado en la historia del mercado. Debido a que los eventos no se "olvidan", la filtración se incrementa.
- Un proceso de la inversion sin riesgo S_t^0 que tiene la siguiente dinámica:

  $dS_0(t) = rS_0(t)dt$

  donde $r > 0$ y es una constante que tiene el valor de la tasa continua libre de riesgo. Como condición inicial $S_0(0) = 1$.
- Un proceso estocástico de N instrumentos con riesgo y que tiene la siguiente dinámica:

  $dS_i(t) = \mu_i S_i(t)dt + \sigma_i S_i(t)dW_i(t)$

  para $\forall i\epsilon[1,N]$ y donde $W_i(t)$ es un movimiento Browniano con esperanza 0 y desviación estándar dt:

  $E_t(dW_i(t)) = 0, E_t(dW_i^2(t)) = dt$

  Para el caso de $S_i(t)$, μ_i se puede pensar como la tasa de retorno (o crecimiento) instantaneo del instrumento y σ_i como la desviación estándar instantanea de la tasa de retorno:

  $E_t(\frac{dS_i(t)}{S_i(t)}) = \mu_i, Var_t(\frac{dS_i(t)}{S_i(t)}) = \sigma_i$

1.4.2 Replicación de una opción via un portafolio

Una estrategia de negociación $H(t) = \{H_0(t), H_1(t), \cdots, H_N(t)\}$ es definida como un proceso estocástico e indica para cada instrumento, el número de unidades que se tienen en posición en el tiempo $(t, t + dt)$.

El valor del portafolio en un tiempo t está dado por:
$V(t) = H_0(t)S_0(t) + H_1(t)S_1(t) + \cdots + H_N(t)S_N(t)$
Una estrategia de negociación es autofinanciable cuando cumple:

$V(t) = V(0) + \sum_{i=0}^{N}(\int_0^t H_i(t)dS_i(t))$
para $\forall t \leq T$.

Lo que indica la defininción es que un portafolio autofinanciable puede ser ajustado o rebalanceado en posiciones en t a $t + dt$ pero su valor permanece idéntico.

Para obtener una estrategia de replicación y el precio de una opción europea usando la inversión libre de riesgo y un instrumento con riesgo.

El portafolio que replica a la opción tiene un valor:
$V(t) = H_0(t)S_0(t) + H_1(t)S_1(t)$
dado que $S_0(t)$ queda definido como $S_0(t) = e^{rt}$.
se puede escribir el valor del portafolio:
$V(t) = e^{rt}H_0(t) + H_1(t)S_1(t)$
y por ser autofinanciable cumple que, considerando que la dinámica de S_0 es $dS_0(t) = rS_0(t)dt$
$V(t) = V(0) + \int_0^t rH_0(t)S_0(t)dt + \int_0^t H_1(t)dS_1(t)$

El precio de una opción europea se plantea como una función del tiempo y el instrumento subyacente, $C(S_1(t), t)$.

Para aplicar la replicación, se debe suponer que el valor del portafolio y de la opción son iguales, esto es $C = V$.

El valor de la opción se puede expresar usando la formula de Ito, de la siguiente manera:
$C(S_1(t), t) = C_(S_1(0), 0) +$
$\int_0^t \frac{\partial C(S_1(t),t)}{\partial t}dt + \int_0^t \frac{\partial C(S_1(t),t)}{\partial S_1(t)}dS_1(t) + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 C(S_1(t),t)}{\partial S_1^2(t)}(dS_1(t))^2$
Dado que el subyacente $S_1(t)$ tiene la siguiente dinámica:
$dS_1(t) = S_1(t)(\mu_1 dt + \sigma_1 dW_1(t))$
Se obtiene que $(dS_1(t))^2$ es igual a $\sigma_1^2 S_1^2(t)$.
Esto permite expresar a $C(S_1(t), t)$ como:
$C(S_1(t), t) = C_(S_1(0), 0) +$
$\int_0^t \frac{\partial C(S_1(t),t)}{\partial t}dt + \int_0^t \mu_1 S_1(t)\frac{\partial C(S_1(t),t)}{\partial S_1(t)}$
$+\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_1^2 S_1^2(t)\frac{\partial^2 C(S_1(t),t)}{\partial S_1^2(t)} + \int_0^t \sigma_1 S_1(t)\frac{\partial C(S_1(t),t)}{\partial S_1(t)}dW_1(t)$
Y el valor de portafolio que replica como:
$V(t) = V(0) + e^{rt}H_0(t) + \int_0^t H_1(t)S_1(t)(\mu_1 dt + \sigma_1 dW_1(t))$

Dado que el portafolio replicado y la opción europea son iguales, se puede obtener que $H_1(S_1(t), t) = \frac{\partial C(S_1(t),t)}{\partial S_1(t)}$
Y por tanto el valor de H_0 es:
$H_0(S_1(t), t) = e^{-rt}(C(S_1(t), t) - S_1(t)\frac{\partial C(S_1(t),t)}{\partial S_1(t)})$

Queda por determinar el valor de $C(S_1(t), t$, el cual se obtiene sustituyendo los valores de H_0 y H_1 en el valor de portafolio que replica y la formula de Ito para la opción.
$\int_0^t r(C(S_1(t), t) - S_1(t)\frac{\partial C(S_1(t),t)}{\partial S_1(t)})dt =$
$\int_0^t \frac{\partial C(S_1(t),t)}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_1^2 S_1^2(t)\frac{\partial^2 C(S_1(t),t)}{\partial S_1^2(t)}dt$
Esta ultima ecuación se puede escribir en forma diferencial, resultando
$r(C(S_1(t), t) = rS_1(t)\frac{\partial C(S_1(t),t)}{\partial S_1(t)} + \frac{\partial C(S_1(t),t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2(t)\frac{\partial^2 C(S_1(t),t)}{\partial S_1^2(t)}$

ecuación en derivadas parciales que se puede resolver aplicando una serie de condiciones iniciales y de frontera con las cuales se puede obtener una valor de la opción .

1.4.3 Valuación neutra al riesgo

El segundo esquema de valuación se basa en calcular una medida de probabilidad neutra al riesgo, utilizando el concepto de esperanza condicional y martingala.

La valuación neutra al riesgo consiste en aplicar la siguiente relación:
$\frac{C(t)}{S_0(t)} = E_{\mathcal{P}^*}[\frac{C(T)}{S_0(T)}|\mathcal{F}_t]$
donde $E_{\mathcal{P}^*}[\cdots]$ es la esperanza condicional bajo una medida de probabilidad neutra al riesgo, $\mathcal{P}^*$.

Con el fin de simplificar los cálculos, se pueden recurrir a los siguiente supuestos:

- El valor de la opción en el tiempo $t = T$ es una función del subyacente, de tal manera que $C(T) = h(S_1(T))$.
- Se puede expresar $S_0(T) = e^{rT}$ y $S_0(t) = e^{rt}$
- Utilizando la propiedad de Markov. Un proceso de Markov es aquel en el cual los incrementos de la variable aleatoria, $x_{t+dt} - x_t$, son una variable independiente de x_t. Para tales procesos se cumple que $x_t = E_t[x_T]$.

  Un proceso estocástico martingala de la forma $f_t = f(x_t, t)$ puede ser especificado por medio de una esperanza condicional de una función ϕ de un proceso estocástico subyacente. En particual, considerese un proceso suyacente x_t comenzando en el tiempo t_0 con un valor x_0, la esperanza condicional es:

  $f_t = f(x_t, t) = E_t[\phi(x_T, T)]$

  para cualquier $t_0 \leq s \leq t \leq T$, entonces f_t satisface la propiedad martingala. Aplicando la propiedad de Markov

  $E[\phi(x_T, T)|\mathcal{F}_t] = E_t[\phi(x_T, T)] = f(x_t, t)$

  luego entonces

  $E[f(x_t, t)|\mathcal{F}_s] = E[E[\phi(x_T, T)|\mathcal{F}_t]|\mathcal{F}_s] =$

  $E[\phi(x_T, T)|\mathcal{F}_s] = E_s[\phi(x_T, T)] = f(x_s, s)$

- La solución a la ecuación diferencial estocástica del instrumento S_1 es:

  $S_1(t) = S_1(0)e^{[(\mu_1 - \frac{\sigma_1^2}{2})t + \sigma_1 W_1(t)]}$

Usando los supuestos anteriores, se puede valuar una opción.

Como en el modelo discreto, el instrumento con riesgo puede ser calculado a descuento, tomando a S_0 como el factor de descuento, de tal manera :
$\bar{S_1}(t) = \frac{S_1(t)}{S_0(t)} = e^{-rt}S_1(t)$
La dinámica del valor a descuento queda definida como (aplicando Ito)

$d\bar{S}_1(t) = \bar{S}_1(t)[(\mu_1 - r)dt + \sigma_1 dW_1(t)]$

Similar al modelo discreto, se debe encontrar un proceso estocástico martingala para el valor descontado de S_1. Para esto se debe utilizar el teorema de Girsanov que indica que si un proceso L_t queda definido como

$L_t = e^{(-\int_0^t \theta(s)dW^*(s) - \frac{1}{2}\int_0^t \theta^2(s)ds)}$

donde θ_t es un proceso estocástico, entonces L_t es martingala y $W^*(t) = W(t) + \int_0^t \theta(s)ds$ o el movimienot browniano en una medida de probabilidad neutra al riesgo.

En el caso del proceso $\bar{S}_1(t)$, el valor de $\theta(t)$ es $\frac{\mu_1 - r}{\sigma_1}$, lo cual lleva a que $W^*(t) = W(t) + \frac{\mu_1 - r}{\sigma_1}t$, sustituyendo $W(t)$ en la dinámica del valor a descuento

$d\bar{S}_1(t) = \bar{S}_1(t)\sigma_1 dW_1^*(t)$

o

$\bar{S}_1(t) = e^{\frac{\sigma_1^2}{2}t + \sigma_1 W_1^*(t)}$

siendo una martingala.

El portafolio que replica a la opción queda definido como:

$V(t) = H_0(t)S_0(t) + H_1(t)S_1(t)$

y como el portafolio es autofinanciable

$dV(t) = H_0(t)dS_0(t) + H_1(t)dS_1(t)$

Calculando el valor a descuento del portafolio replicado $\bar{V}(t) = e^{-rt}V(t)$ se obtiene que:

$d\bar{V}(t) = H_1(t)[(\mu_1 - r)\bar{S}_1(t)dt + \sigma_1 \bar{S}_1(t)dW_1(t)]$

y expresandolo con el movimiento browniano neutro al riesgo $W_1^*(t)$

$d\bar{V}(t) = H_1(t)d\bar{S}_1(t)$

con lo que se concluye que el valor a descuento del portafolio que replica es martingala bajo una medida de probabilidad neutra al riesgo, que es lo mismo que:

$\bar{V}(t) = E_{\mathcal{P}^*}[\bar{V}(T)|\mathcal{F}_t]$

o el valor de una opción se puede escribir como:

$C(t) = E_{\mathcal{P}^*}[e^{-r(T-t)}C(T)|\mathcal{F}_t]$

y toda opción tiene una función de pago que es igual al valor de $C(T)$ y que es una función del subyacente

$C(T) = h(S(T))$

Usando la propiedad de Markov

$C(t) = E_{\mathcal{P}^*}[e^{-r(T-t)}C(T)|\mathcal{F}_t] = E_{\mathcal{P}^*}[e^{-r(T-t)}h(S(T))]$

$C(t) = E_{\mathcal{P}^*}(e^{-r(T-t)}h(S_1(t)e^{r(T-t)}e^{\frac{\sigma_1^2}{2}(T-t)+\sigma_1(W_1^*(T)-W_1^*(t))})]$

con esta expresión es posible calcular el valor de la opción, que se puede expresar como una integral

$C(S_1(t), t) = e^{-r(T-t)}\int_0^t h(S_1(t)e^{\frac{r-\sigma_1^2}{2}(T-t)+\sigma_1 y\sqrt{T-t}})\frac{e^{\frac{-y^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}dy$

, donde $y = W_1^*(T) - W_1^*(t)$ es una variable aleatoria normal con media 0 y varianza $T - t$.

1.4.4 Consideraciones sobre el arbitraje

Dado un instrumento derivado que se puede replicar por medio de una estrategia, se puede obtener un precio de arbitraje, el cual se obtiene bajo una medida de probabilidad neutra al riesgo.

La replicación se puede obtener usando un argumento de no arbitraje, donde se supone que el portafolio tiene la siguiente dinámica:

$dV = rVdt$

lo cual indica que el portafolio tiene un crecimiento igual al de la cuenta libre de riesgo y por tanto el inversionista es neutro a invertir en la opción o la inversión libre de riesgo.

El portafolio que replica en este caso se compone de una opción y un instrumento con riesgo, compuesto de la siguiente manera

$V = C - \Delta S_1$

Y el cambio del portafolio se expresa como:

$dV = dC - \Delta dS_1$

Usando el lema de Ito, se puede escribir dC como:

$dC = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2}dt$

Con lo cual se puede expresar dV como:

$dV = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{\partial C}{\partial S}dS + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2}dt - \Delta dS_1$

Para eliminar la parte estocástica, dS, se toma que $\Delta = \frac{\partial C}{\partial S_1}$.

Tomando la consideración de no arbitraje se tiene que:

$rVdt = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2}dt$

Sustituyendo el valor de V y eliminando dt:

$rC - rS_1 \frac{\partial C}{\partial S_1} = \frac{\partial C}{\partial t}dt + \frac{1}{2}\sigma_1^2 S_1^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S_1^2}$

Lo cual lleva a la ecuación que se obtuvo con el método de replicación.

Bajo este contexto, es posible proponer un esquema de valuación para derivados, basados en no arbitraje.

Se supone que existe un mercado con N activos, cada uno e ellos con la siguiente dinámica:

$\frac{dS_i}{S_i} = \mu_i(t)dt + \sum_{j=1}^{N} \sigma_j(t)dW_j(t)$

y una inversión libre de riesgo.

Para valuar se usa el teorema fundamental de la valuación de activos para el caso continuo :

- Existe una familia de procesos adaptados $\lambda_i(t)$, $\imath = 1, \cdots, N$, tal que, para cualquier activo i, su media esta ligado con las correspondientes volatilidades por una ecuación de la forma:

  $\mu_i(t) = r(t) + \sum_{\jmath=1}^{N} \lambda_j(t)\sigma_j(t)$

  donde λ_i es el precio del riesgo para el factor i.

- Si $g(t)$ es un proceso definido positivo para un activo negociable, entonces hay una medida de probabilidad $Q(g)$ para la cual el precio $A(t)$ en el tiempo t de cualquier instrumento A sin flujo de efectivo es:

  $\frac{A(t)}{g(t)} = E_{Q(g)}[\frac{A_\tau}{g_\tau}]$

donde τ es el tiempo en el cual vence el instrumento (o cuando se ejerce).

El activo $g(t)$ se conoce como el activo numerador.

- Si el instrumento libre de riesgo se selecciona como el activo numerado, entonces $g(t) = B(t)$ y la media $\mu_i(t)$ de cualquier activo i en el tiempo t es igual a $r(t)$. El proceso del precio para cualquier instrumento sin flujo de efectivo hasta su tiempo de ejercicio $\tau \geq t$ está dado por la esperanza

  $S_i(t) = E_{Q(g)}[e^{-\int_t^\tau r(u)du} S_i(\tau)]$

- Cualquier proceso del precio de $A(t)$ puede ser replicado por medio de una estrategia autofinanciable en la cual se toma el activo base $A_\alpha(t)$ y la cuenta de ahorro del mercado que cumplan

  $dS_i(t) = H_0(t)r(t)B(t)dt + \sum_{\mathrm{j}=1}^{N} H_j(t)dS_j(t)$

  donde se cumple la condición de un portafolio autofinanciable

  $B(t)dH_0(t) + \sum_{j=1}^{N} dH_j(t)(S_j(t) + dS_j(t)) = 0$

1.4.5 Modelo de Black-Scholes

Para el caso continuo, lo que se ha presentado se basa en la propuesta de Black-Scholes para valuar instrumentos derivados.

Su modelo tiene como base los siguientes supuestos:

- El subyacente tiene una dinámica estocástica que es una movimiento geométrico browniano.
- La tasa libre de riesgo es una función conocida del tiempo
- No hay dividendos en el subyacente.
- La replicación del subyacente implica que se hace de manera continua.
- No existen costos asociados a las transaccciones sobre el subyacente.
- No hay oportunidades de arbitraje.

Dados estos supuestos, se obtiene que el valor de una opción europea de compra es:

$C(S,t) = SN(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$

donde

$d_1 = \frac{Ln(\frac{S}{E}) + (r+0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

y $N()$ es la función de probabilidad acumulada de una distribución normal con media 0 y varianza 1.

1.5 Tipos de opciones europeas vainilla

Se han descrito las herramientas matemáticas para una opción europea sobre un subyacente que es una acción. Sin embargo pueden existir otro tipo de opciones, dependiendo del subyacente.

1.5.1 Opciones de acciones con dividendos

Una acción puede pagar un dividendo a una tasa constante continua D. El valor de una opción europea de compra es:

$C(S,t) = Se^{-D(T-t)}N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$

donde

$d_1 = \frac{Ln(\frac{S}{E})+(r-D+0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

Existe otra manera de indicar dividendos de una acción, en la cual se indican los flujos y fechas de los dividendos.

1.5.2 Opciones sobre indices accionarios

Un indice permite rastrear el movimiento o desempeño de un mercado o sector.

Se pueden construir opciones sobre indices, los cuales son utilizados por aquellos inversionistas que tengan un portafolio de acciones bien diversificado y en consecuencia cercano al comportamiento del indice.

Para calcular el valor de una opción europea sobre un indice accionario, basta con aplicar la fórmula de Black y Scholes, tomando como subyacente el valor del indice.

1.5.3 Opciones sobre bienes físicos

Un bien físico puede ser un metal precioso, alimentos, combustibles, obras de arte.

El efecto a tomar en cuenta es lo que se conoce como el costo de acarre o el gasto que se hace al almacenar el bien, transportarlo, cuidarlo. Si se expresa como una tasa c sobre el valor del bien, se puede valuar utilizando Black y Scholes.

Sin embargo, en algunos casos, por ejemplo el petroleo, no es correcto suponer que tiene un comportamiento geométrico browniano; por lo que se debe tener especial cuidado en decidir cuando valuar una opción sobre un bien físicio usando los supuestos de Black y Scholes.

1.5.4 Opciones sobre tipo de cambio extranjero

Con el fin de cubrir o especular sobre un tipo de cambio extranjero, se pueden utilizar opciones sobre tipos de cambio.

Conociendo el valor de la tasa libre de riesgo extranjera r_f y usando el valor del tipo de cambio como subyacente, se puede valuar de la siguiente manera:

$C(S,t) = Se^{-r_f(T-t)}N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$
donde
$d_1 = \frac{Ln(\frac{S}{E})+(r-r_f+0.5\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$
$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

1.5.5 Opciones de contratos futuros

Un contrato futuro es un acuerdo entre dos partes, donde una de ellas se compromete a comprar o vender un bien físico o instrumento financiero a un periodo de tiempo T a un precio prefijado. Dichos contratos se negocian en mercados de futuros, tienen un contrato bien definido y las perdidas o ganancias de las posiciones futuras son calculadas día a día y los cambios son pagados entre las contrapartes.

Los futuros se pueden utilizar para cobertura y especulación.

Las opciones sobre futuros se valuan suponiendo que los propios instrumentos futuros tienen una dinámica de proceso geométrico browniano, donde el futuro tiene un precio F.

Se calcula usando el modelo de Black, usando la siguiente formula:
$C(S,t) = e^{-r(T-t)}[FN(d_1) - KN(d_2)]$
donde
$d_1 = \frac{Ln(\frac{F}{E})+0.5\sigma^2(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$
$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

1.5.6 Paridad compra venta

En el caso continuo, se cumple la paridad entre opciones de compra y venta (call put parity), la cual queda establecida con la siguiente relación:
$C(S(t),t) - P(S(t),t) = S(t) - Ke^{-r(T-t)}$

Con esta relacion es posible deducir el valor de una opción europea de venta conociendo el valor de una opción europea de compra.

Por ejemplo, el valor de una opción europea de venta (put) sobre una acción es :
$P(S,t) = Ke^{-r(T-t)}N(-d_2) - SN(-d_1)$

Se puede aplicar esta relación para las opciones sobre acciones con dividendos, indices, bienes físicos, tipo de cambio para obtener el valor de una opción de venta.

Para el caso de opciones sobre futuros, la relación de paridad de compra venta es:
$C(F(t),t) - P(F(t),t) = F(t)e^{-r(T-t)} - Ke^{-r(T-t)}$

1.5.7 Opciones europeas binarias o digitales

Un ejemplo de una opción europea que tiene un pago final distinto al maximo, es la opción binaria.

Consiste en un pago de 1 en el tiempo de vencimiento T si el valor del subyacente es mayor que el precio de ejercicio. Queda modelado como

$C(S(T), T) = \mathcal{H}(S - K)$

donde $\mathcal{H}()$ es la funcion de Heaviside, que toma valor de 1 si su argumento es positivo y cero en caso contrario.

La valuación de la opción binaria europea de compra sobre una acción es dada por:

$C(S(t), t) = e^{-r(T-t)}N(d_2)$

y la relacion de paridad compra venta es:

$C(S(t), t) + P((S(t), t) = e^{-r(T-t)}$

1.6 Medidas de sensibilidad

Las opciones, como cualquier instrumento financiero, tienen un riesgo inherente.

Los factores que intervienen en la valuación de una opción, el subyacente, la tasa libre de riesgo, la volatilidad y el plazo de vencimiento al sufrir un cambio puden provocar un movimiento en el precio de la opción.

Las medidas de sensibilidad permiten medir dicho cambio.

1.6.1 Delta

Es la sensibilidad de la opción al subyacente. Es la tasa de cambio del valor de la opción con respecto al subyacente.

$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$

La medida delta puede utilizarse para coberturas, con el fin de mantener una posición en el subyacente y eliminar riesgos. Con la cobertura se tiene una opción y una posición corta al subyacente, usando Δ unidades.

La delta de una opción europea de compra sobre una acción es:

$\Delta = N(d_1)$

1.6.2 Gamma

Es la sensiblidad que tiene Δ a los cambios del subyacente.

$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$

La medida delta permite saber cuantas unidades del subyacente se necesitan tener en posición, pero no es suficiente para identificar cada cuando es necesario reajustar la posición. La regla es que si gamma es pequeño, delta cambia lentamente y la frecuencia de ajuste de delta es poco frecuente, pero en el caso contrario se debe vigilar constantemente el ajuste de delta.

Gamme queda definidio para una opción europea de compra sobre una acción como:

$\Gamma = \frac{N'(d_1)}{\sigma S\sqrt{T-t}}$

1.6.3 Theta

Es la tasa de cambio del precio de la opción con el tiempo

$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t}$

Como regla, si el subyacente no sufre cambios, la opción si, conforme avance al vencimiento y a una tasa dada por:

$\Theta = \frac{-SN'(d_1)\sigma}{2\sqrt{T}} - rKe^{-r(T-t)}N(d_2)$

Theta puede ser vista como el decaimiento temporal de la opción.

en el caso de una opción de compra europea sobre una acción.

1.6.4 Vega

Es la sensibilidad de la opción a la volatilidad.

$\mathcal{V} = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$

Para una opción de compra europea sobre una acción se define como

$\mathcal{V} = S\sqrt{T-t}N'(d_1)$

Vega se puede utilizar cuando la volatilidad no es conocida precisamente.

1.6.5 Rho

Es la sensibilidad de la opción a la tasa libre de riesgo.

$\rho = \frac{\partial C}{\partial r}$

Para una opción de compra europea sobre una acción se define como

$\rho = K(T-t)e^{-r(T-t)}N(d_2)$

1.7 Volatilidad

De las variables y parámetros para poder valuar una opción todas son directamente observables excepto una, la volatilidad.

La volatilidad, que se define como la desviación estandar de los rendimientos del subyacente. Por tanto, se debe obtener una historia de los precios del subyacente y aplicar medidas estadísticas, observadas en un intervalo fijo de tiempo (cada día, semana o mes).

Para calcular la volatilidad, considerando que el subyacente tiene un modelo de movimiento geométrico browniano

- Calcular los rendimientos logarítmicos: $u_i = Ln(\frac{S(i)}{S(i-1)})$ para $i = 1, 2, \cdots, n$.
- Calcular la media de los rendimientos $\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$
- Calcula la estimación de la desviación estándar con $\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2}$

Sin embargo, el criterio de cuanto debe ser el tamaño de la historia o inclusive suponer que la volatilidad es constante en ese historia es una decisión dificil.

Lo que se hace de manera común es observar al mercado, tomando los precios de mercado de algunas opciones y usando Black y Scholes para obtener la volatilidad. Se conoce la volatilidad obtenida como implicita y a partir de ellas se puede obtener una curva de volatilidades a distintos plazos, la cual se puede usar para valuación.

1.8 Opciones Americanas

Una opción americana es un contrato que se puede ejercer antes de que expire, a diferencia de una opción europea que se permite ejercer solo en el tiempo que expire.

1.8.1 Modelo discreto de múltiples periodos

Tomando en cuenta los mismos elementos del modelo que se describieron para opciones europeas, se debe tener en cuenta que una opción americana se puede ejercer en cualquier fecha de negociación $t = 0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, N\Delta t = T$.

Se define una secuencia adaptada a la filtración $\mathcal{F}_t$, denominada $Z(t)$. Dicha secuencia representa el beneficio hecho al ejercitar la opción en el tiempo t.

Para una opción americana de compra $Z(t) = Max(S(t) - K, 0)$.

Para una opción americana de venta $Z(t) = Max(K - S(t), 0)$.

Sea $U(t)$ el precio de la opción americana, asociada al proceso $Z(t)$.

Se puede definir para $t = N\Delta t = T$ como

$U(T) = Z(T) = max(S(T) - K, 0)$ para una opción de compra.

$U(T) = Z(T) = max(K - S(T), 0)$ para una opción de venta.

Para $t = (N-1)\Delta t$, se debe calcular el precio de la opción. Si el inversionista decide ejercer la opción, su valor es $Z((N-1)\Delta t)$, si no su valor en $t = T$ es $Z(N\Delta t)$. Entonces, en $t = (N-1)\Delta t$ el inversionista tiene que ganar el máximo entre $Z((N-1)\Delta t)$ y la cantidad necesaria para generar $Z(N\Delta t)$, la cual queda definida como:

$Y((N-1)\Delta t) = S_0((N-1)\Delta t) E^*_{\mathcal{P}}[\frac{U(N\Delta t)}{S_0(N\Delta t)} | \mathcal{F}_{(N-1)\Delta t}]$

donde $E^*_{\mathcal{P}}[]$ es la esperanza condicional en una medida de probabilidad neutra al riesgo.

Y entonces el precio de la opción es:

$U((N-1)\Delta t) = max(Z((N-1)\Delta t), Y((N-1)\Delta t))$

Generalizando la expresión, se tiene que:

$U((k-1)\Delta t) = max(Z((k-1)\Delta t), S_0((k-1)\Delta t) E^*_{\mathcal{P}}[\frac{U(k\Delta t)}{S_0(k\Delta t)} | \mathcal{F}_{(k-1)\Delta t}])$

Si $S_0(k\Delta t) = (1+r)^{k\Delta t}$, se puede expresar como:

$U((k-1)\Delta t) = max(Z((k-1)\Delta t), \frac{1}{(1+r)^{\Delta t}} E^*_{\mathcal{P}}[U(k\Delta t) | \mathcal{F}_{(k-1)\Delta t}])$

Sea $\tilde{U}(k\Delta t) = \frac{U(k\Delta t)}{S_0(k\Delta t)}$ el valor a descuento del precio de la opción, se puede representar la relación como:

$\tilde{U}(k\Delta t) = max(\tilde{Z}(k\Delta t), E^*_{\mathcal{P}}[\tilde{U}((k+1)\Delta t) | \mathcal{F}_{k\Delta t}])$

La secuencia $\tilde{U}(k\Delta t)$ tiene la propiedad de ser una supermartingala bajo la medida de probabilidad neutra al riesgo, esto es $E^*_{\mathcal{P}}[\tilde{U}((k+1)\Delta t) | \mathcal{F}_k] \leq \tilde{U}(k\Delta t)$.

La secuencia $\tilde{U}(k\Delta t)$ se conoce como la envolvente de Snell y tiene la característica de ser la supermartingala más pequeña que domina a la secuencia $\tilde{Z}(k\Delta t)$.

Se cumple siempre que $\tilde{U}(k\Delta t) > \tilde{Z}(k\Delta t)$.

Se conoce como tiempo de paro al valor que toma t cuando se decide ejercer la opción.

Es una variable aleatoria τ que puede tomar valores $\{0, \Delta t, 2\Delta t, \cdots, N\Delta t = T\}$.

El conjunto $\mathcal{T}$ es el de todos los tiempos de paro posibles.

Si se piensa $\tilde{Z}$ como el total de ganancias de un apostador despues de k juegos, el tiempo de paro τ_0 es el que hace maxima a la ganancia esperada.

Luego entonces, el tiempo de paro es el tiempo en el cual la opción americana toma su valor máximo.

$U_0 = E[Z_{\tau_0}|\mathcal{F}_0] = sup_{\tau \epsilon \mathcal{T}} E[Z_\tau|\mathcal{F}_0]$

1.8.2 Modelo continuo

En el caso continuo se pueden verificar los resultados al tiempo discreto, sin embargo su tratamiento es complejo.

El problema queda formulado con el planteamiento de establecer una estrategia de inversión sobre un activo libre de riesgo y activos con riesgo mas una estrategia de consumo, llevando a un problema de optimización.

El estudio de opciones americanas se puede tratar como un problema libre de frontera, el cual implica uso de la teoría de ecuaciones en derivadas parciales.

Tanto para el caso discreto y continuo no existen una expresión matemática que permita calcular el precio de una opción americana.

1.8.3 Opciones europeas y americanas vainilla

Sea v_k el valor en tiempo k de una opción americana y sea V_k el valor en tiempo k de la opción europea, se debe cumplir que $v_k \geq V_k$.

Para el caso de una opción americana de compra se tiene que es óptimo ejercerla en el tiempo de vencimiento. Esto se deriva de que el valor de una opción europea cumple que $C(S(t), t) \geq S(t) - Ke^{-r(T-t)}$, es decir siempre excede o igual al valor intrinseco de la opción.

Para el caso de una opción americana de venta, se puede ejercer en el tiempo de paro óptimo que resulte, dado que el valor de una opción europea cumple que $P(S(t), t) \geq max(K - S(t), 0)$.

Existe una relación entre una opción americana de compra y venta, con precios c(S(t),t) y p(S(t),t) respectivamente:

$c(S(t), t) - p(S(t), t) \leq S(t) - Ke^{-r(T-t)}$

1.9 Métodos numéricos para valuación de opciones

1.9.1 Función de distribución acumulada N()

Una variable aleatoria X se dice que tiene una distribución nomral con media μ y varianza σ^2 si su funcion de densidad es $\frac{e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

La distribución estandar normal es aquella que tiene $\mu = 0$ y una varianza unitaria y su función de probabilidad acumulada es:

$N(X \leq z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{\frac{-x^2}{2}} dx$

La función de probabilidad acumulada se puede aproximar con la siguiente expresión

$N(X \leq z) \approx 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2}} (a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5)$

para $z \geq 0$ donde $x = \frac{1}{1+0.2316419z}$ y

$$(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) =$$

$$(0.319381530, -0.35653782, 1.781477937, -1.821255978, 1.330274429)$$

El siguiente código Java implanta el algoritmo

```
public class DistribucionNormalEstandar {

public static double densidad(double X) {
return Math.exp( -X*X/2) / Math.sqrt(2*Math.PI);
}
//calcula probabilidad que x > X
public static double acumulada(double X) {
double result = 0.0;
double gamma = 0.2316419;
double k ;
boolean negativo = false;
double a[] =
{ 0.319381530,
-0.35653782,
1.781477937,
-1.821255978,
1.330274429 };
if ( X <= 0 ) {
X = -X;
negativo = true;
}

k = 1 / ( 1 + gamma * X);
```

```
double acum = 0;
for (int i =0 ; i< a.length; i++) {
acum += a[i]*Math.pow(k,i+1);
}//for
result =  1 - densidad(X)*acum ;

if (negativo) {
result = 1 - result;
}
return result;

}
}
```

1.9.2 Formula de Black-Scholes

1.9.3 Sensibilidades de opciones europeas

1.9.4 Volatilidad Implicita

1.9.5 Aproximaciones numéricas

Debido a que una expresión analítica no siempre se puede obtener, un problema importante es el estudio de los métodos numéricos que permiten obtener una aproximación del precio y las estrategias de replicación. De hecho, para opciones americanas se tiene que no existe una expresión analítica exacta para valuar.

Dentro del modelo discreto se puede utilizar árboles binomiales para valuar opciones europeas y americanas, usando la teoría establecida para el modelo discreto multiperiodo.

Para el modelo continuo y valuación de opciones europeas se utiliza la simulación de Monte Carlo, basandose en las relaciones de esperanza matemática y soluciones numéricas de ecuaciones diferenciales estocásticas.

Para opciones europeas y americanas en el modelo continuo se utiliza el método de diferencias finitas que permiten resolver la ecuación en derivadas parciales de Black-Scholes.

Los capítulos siguientes están orientados al estudio de los métodos numéricos aquí esbozados.

Chapter 2

Arboles Binomiales

Chapter 3

Simulación de Monte Carlo

Chapter 4

Diferencias finitas

Bibliography

[Ma97] Marek, Musiela. Martingale Methods in Financial Modelling. Springer

[Pl97] Pliska, Stanley. Introduction to Mathematical Finance. Discrete Time Models. Blackwell Publishers, Oxford