

## MODELO PRESA-PREDADOR

### Introducción

El modelo presa-predador es usado para estudiar la interacción entre dos o más poblaciones biológicas que ocupan el mismo ambiente.

Por ejemplo, supongamos que existen dos especies. Una, los **depredadores** (predadores), se alimenta de la otra especie, la **presa**, que a su vez se nutre de un tercer alimento ampliamente disponible en ese ambiente. Un ejemplo estándar es una población de zorros y conejos en un bosque; los zorros (depredadores) devoran a los conejos (la presa), en tanto que los conejos comen cierta vegetación del bosque. Otros ejemplos son: los tiburones (depredadores) y los peces (la presa); los escarabajos (predadores) y el pulgón (la presa); etc.

### Modelo Físico

El modelo matemático clásico para una situación de predador-presa fue ideado en los años 20 por el matemático italiano Vito Volterra (1860-1940) para analizar las variaciones cíclicas observadas en las poblaciones de tiburones y sus peces alimento en el Mar Adriático. Para construir tal modelo, denotemos el número de presas como  $x(t)$  y el número de depredadores como  $y(t)$  en el tiempo  $t$  y hagamos las siguientes conjeturas simplificadoras:

1. En ausencia de depredadores, la población de las presas crecería a una tasa natural con  $dx/dt = at$ ,  $a > 0$  (Modelo de Población Sin Límite)
2. En ausencia de presas, la población predadora declinaría a una tasa natural, con  $dy/dt = -cy$ ,  $c > 0$ .
3. Cuando tanto los predadores como las presas están presentes, ocurre una combinación de esas tasas naturales de crecimiento y declinación, en la que la población de las presas disminuye y la de los depredadores aumenta, cada una en proporción a la frecuencia de los encuentros entre individuos de las dos especies. Supongamos además que la frecuencia de los encuentros es proporcional al producto  $xy$ , razonando que al duplicarse cualquiera de las dos poblaciones se duplica la frecuencia de los encuentros. En consecuencia, el efecto de que los predadores devoren a las presas es una tasa de interacción decreciente  $-bxy$  en la población  $x$  de las presas y una tasa de interacción creciente en la población  $y$  de los depredadores  $dxy$ , siendo  $b$  y  $d$  constantes positivas.

### Modelo Matemático

Cuando sumamos las tasas natural y de interacción descritas antes, obtenemos las **ecuaciones de presa-predador** :

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= ax - bxy = x(a - by) \\ \frac{dy}{dt} &= -cy + dxy = y(-c + dx)\end{aligned}\tag{1}$$

cuyas constantes  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son todas positivas.

### Análisis de Estabilidad

Muchas veces es posible determinar las propiedades de la solución de una ecuación diferencial sin necesidad de obtener una solución explícita, para ello se debe realizar un análisis de estabilidad.

Por ejemplo si en el modelo anterior deseamos conocer cuál son los puntos críticos del modelo, es decir con qué número de individuos de cada especie se logra el equilibrio En estos puntos se obtiene velocidad de crecimiento nulo. Para ello, se debe hacer:

$$\begin{aligned}0 &= x(a - by) \\ 0 &= y(-c + dx)\end{aligned}\tag{2}$$

Este es un sistema casi lineal con dos puntos críticos,  $(0, 0)$  y  $(c/d, a/b)$ . El Punto  $(0, 0)$  es un punto crítico, pero la solución de equilibrio correspondiente  $X(t) = 0$ ,  $y(t) = 0$  simplemente describe la extinción simultánea de ambas especies.

El punto crítico  $(c/d, a/b)$  es de mayor interés;  $X(t) = c/d$  y  $Y(t) = a/b$  son las poblaciones constantes no nulas de presa y predador, respectivamente, y que pueden coexistir en equilibrio. Gráficamente se puede observar:

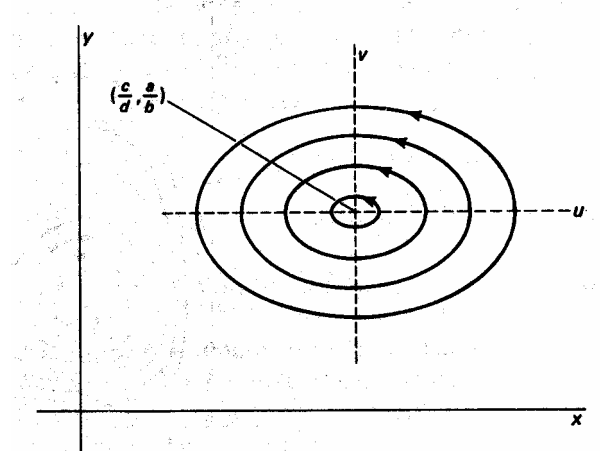


Figura 1: Trayectorias del sistema Presa-Predador

**Otros Modelos**

**Especies en Competencia**

Consideremos ahora dos especies (de animales, plantas o bacterias, por ejemplo) cuyas poblaciones son  $x(t)$  y  $y(t)$  y que compiten una con la otra por los alimentos disponibles en el ambiente común. Esto está en marcado contraste con el caso en el que una especie depreda a la otra. Para construir un modelo matemático tan realista como sea posible, vamos a suponer que en ausencia de la otra especie una de ellas tendría una población limitada (Modelo de Población Límite). Cuando no se da interacción o competencia entre las dos especies, la población satisfaría en entonces las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1x - b_1x^2 \\ \frac{dy}{dt} &= a_2y - b_2y^2 \end{aligned} \tag{3}$$

cada una de las cuales es de la forma de la ecuación del Modelo de Población Límite. Pero además, supongamos que la competencia tiene el efecto de una tasa de declinación de ambas poblaciones proporcional a su producto  $xy$ . Insertamos tales términos con una constante de proporcionalidad *negativa* en la ec. (3) para obtener las **ecuaciones de especies en competencia**

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1x - b_1x^2 - c_1xy = x(a_1 - b_1x - c_1y) \\ \frac{dy}{dt} &= a_2y - b_2y^2 - c_2xy = y(a_2 - b_2y - c_2x) \end{aligned} \tag{4}$$

donde todos los coeficientes  $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1$  y  $c_2$  son positivos.

El sistema casi lineal (4) tiene cuatro puntos críticos. Mediante la igualación a cero de los segundos miembros de ambas ecuaciones, vemos que si  $x=0$ , entonces  $y = 0$  o  $y=a_2/b_2$ , mientras que si  $y=0$ , entonces  $x=0$  o  $y=a_1/b_1$ . Esto de los tres puntos críticos  $(0,0), (0, a_2/b_2), (a_1/b_1, 0)$ . El cuarto es la intersección de las dos rectas:

$$\begin{aligned} b_1x + c_1y &= a_1 \\ c_2x + b_2y &= a_2 \end{aligned} \tag{5}$$

De la ec. (5) es posible deducir lo siguiente:

- a) Si  $c_1c_2 < b_1b_2$ , la competencia es pequeña comparada con la inhibición. Esto significa que en este caso, ambas especies pueden coexistir, y lo hacen.
- b) Si  $c_1c_2 > b_1b_2$ , la competencia es grande comparada con la inhibición. Así que en este caso las dos especies no pueden coexistir; una sobrevive y la otra llega a extinguirse totalmente.