

ECUACIONES DIFERENCIALES DE ORDEN N Y SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES

1. INTRODUCCION

Hasta ahora hemos considerado sólo ecuaciones diferenciales de primer orden del tipo $y' = f(x,y)$.

En este capítulo analizaremos la forma de resolver numéricamente ecuaciones diferenciales de cualquier orden y sistemas de ecuaciones diferenciales. Finalmente haremos una pequeña introducción a las ecuaciones diferenciales parciales.

2. SOLUCION ANALITICA - Método de la transformada de Laplace

2.1 Introducción

Existe una gran cantidad de métodos que permiten resolver ecuaciones diferenciales de diferentes tipos. Un método que ha tenido gran aceptación es el método de la transformada de Laplace, el cual proporciona la solución directa de una ecuación diferencial en determinadas circunstancias. Además, en el caso de algunas funciones de forma irregular, las cuales son difíciles de manejar con facilidad por otros métodos, el método de Laplace proporciona una solución muy elegante.

Aquí sólo se muestra las aplicaciones básicas del método de la transformada de Laplace. Se prescinde de las demostraciones matemáticas rigurosas y de aquellas aplicaciones más complejas, remitiendo al estudiante a los textos consagrados a éste capítulo tan importante de la matemática aplicada.

2.2 La transformada de Laplace

Sea $\mathbf{F}(t)$ una función de t definida para todo $t > 0$; la transformada de Laplace, que se expresa con el símbolo $L[\mathbf{F}(t)]$, se define por

$$L[\mathbf{F}(t)] = f(s) = \int_0^{\infty} F(t)e^{-st} dt \quad (1)$$

en donde el parámetro s puede ser un número real o complejo. El operador $L[\mathbf{F}(t)]$ transforma una función $\mathbf{F}(t)$ en el *dominio del tiempo* en una función $f(s)$ en el *dominio de la variable s*. Ambas funciones, $\mathbf{F}(t)$ y $f(s)$, forman un par de transformadas. Existen tablas en donde se encuentran estos pares de funciones. En el ANEXO se presenta una tabla de este tipo.

Las condiciones suficientes para la existencia de la transformada de Laplace son que la función $\mathbf{F}(t)$ sea (a) continua a intervalos y (b) de orden exponencial. Una función $\mathbf{F}(t)$ es de orden exponencial si $|\mathbf{F}(t)| < Ae^{\alpha t}$ para todo $t > t_0$, siendo A y t_0 constantes positivas. Si se cumple estas condiciones, la integral de la transformación directa es convergente para todo $\sigma > \alpha$, y existe $f(s)$.

En resumen, L es el llamado *operador de la transformada de Laplace*. Si $L[\mathbf{F}(t)] = f(s)$, entonces $\mathbf{F}(t) = L^{-1}[f(s)]$, es la transformada inversa de Laplace de $f(s)$. L^{-1} es llamado *operador de la transformada inversa de Laplace*.

2.2.1 Ejemplo 1

Hallar la transformada de Laplace de la función escalón $\mathbf{F}(t) = A$ para $t > 0$.

Aplicando la ec. 1 a la función $\mathbf{F}(t) = A$ tendremos

$$L[A] = \int_0^{\infty} Ae^{-st} dt = \left[-\frac{A}{s} e^{-st} \right]_0^{\infty} = \frac{A}{s}$$

Esta es la ecuación (32.25) listada en la tabla del ANEXO.

2.2.2 Ejemplo 2

Hallar la transformada de Laplace de la función $F(t) = e^{at}$, siendo a una constante.

$$\mathcal{L}[e^{at}] = \int_0^{\infty} e^{at} e^{-st} dt = \int_0^{\infty} e^{-(s-a)t} dt = \left[-\frac{1}{(s-a)} e^{-(s-a)t} \right]_0^{\infty} = \frac{1}{s-a}$$

La anterior es la ecuación (32.29) del ANEXO. De igual manera se pueden obtener todas las demás transformaciones listadas en el ANEXO.

2.3 Ejemplo de solución analítica usando transformada de Laplace.

Resolver la siguiente ecuación diferencial de segundo orden usando transformada de Laplace.

$$y'' - 3y' + 2y = 0; \quad \text{con } y(0) = 3, y'(0) = 4 \quad (2)$$

Transformamos la ecuación (2) del “dominio del tiempo” al “dominio de la variable s ” usando las transformaciones listadas en el ANEXO (ec. 32.8, 32.7)

$$s^2 f(s) - sF(0) - F'(0) - 3(sf(s) - F(0)) + 2f(s) = 0$$

reemplazando $F(0)$ y $F'(0)$ con las condiciones de contorno definidos en (2) nos queda:

$$s^2 f(s) - 3s - 4 - 3sf(s) + 9 + 2f(s) = 0$$

despejando $f(s)$

$$f(s)(s^2 - 3s + 2) = 3s - 5 \Rightarrow f(s) = \frac{3s - 5}{s^2 - 3s + 2} \quad (3)$$

Para poder hallar la transformada inversa de (3) debemos simplificarla en términos que aparezcan en la tabla del ANEXO. Por este motivo haremos un desarrollo en fracciones parciales de la ec. (3) siguiendo los pasos listados a continuación:

- Encontramos las raíces del divisor: $s = 1$ y $s = 2$ (Polos de la función).
- Descomponiendo en factores el divisor, la ec. (3) queda:

$$\frac{3s - 5}{(s - 1)(s - 2)} = \frac{A}{s - 1} + \frac{B}{s - 2} \quad (4)$$

- Encontramos los valores de los coeficientes A y B . Para hallar A hacemos

$$\frac{3s - 5}{(s - 1)(s - 2)}(s - 1) = A + \frac{B}{s - 2}(s - 1); \text{ sustituyendo } s = 1, \quad A = \left. \frac{3s - 5}{s - 2} \right|_{s=1} = 2$$

$$\text{Análogamente } B = \left. \frac{3s - 5}{s - 1} \right|_{s=2} = 1$$

- Reemplazar los valores de A y B en (4), nos queda expresada la ec. (3) en los siguientes términos:

$$f(s) = \frac{2}{s - 1} + \frac{1}{s - 2} \quad (5)$$

Ahora si estamos en condiciones de hallar la transformada inversa de (5) usando la tabla del ANEXO (ec. 32.29) o el resultados que obtuvimos en 2.2.2 :

$$y = 2e^t + e^{2t} \quad (6)$$

Por supuesto la ec. (6) es la solución analítica de la ec. (2). Para comprobarlo se debe reemplazar (6) y sus derivadas en (2) y verificar la igualdad. Además se debe verificar que se cumplan las condiciones de contorno en y e y' .

3. SOLUCION NUMERICA

El problema general de una ecuación diferencial de orden n con condiciones iniciales es:

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

con:

$$\begin{aligned} y(x_0) &= y_0 \\ y'(x_0) &= y'_0 \\ &\vdots \\ y^{(n-1)}(x_0) &= y^{(n-1)}_0 \end{aligned}$$

Esta ecuación de orden n, puede ser convertida a un sistema de n ecuaciones de primer orden, haciendo:

$$\begin{aligned} u_1(x) &= y(x) \\ u_2(x) &= y'(x) \\ &\vdots \\ u_n(x) &= y^{(n-1)}(x) \end{aligned}$$

obteniendo el sistema:

$$\begin{aligned} u'_1(x) &= u_2(x) \\ u'_2(x) &= u_3(x) \\ &\vdots \\ u'_n(x) &= f(x, u_1(x), u_2(x), \dots, u_n(x)) \end{aligned}$$

Estas ecuaciones son resueltas simultáneamente usando alguno de los métodos de solución numérica de ecuaciones diferenciales de primer orden visto anteriormente.

3.1 Solución de sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden

Consideremos un sistema de 2 ecuaciones diferenciales de primer orden del tipo:

$$\begin{aligned} v' &= g(x, v, w) \\ w' &= f(x, v, w) \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales $v(x_0) = v_0$ y $w(x_0) = w_0$.

Al resolverlo usando el método de Euler queda:

$$\begin{aligned} v_{i+1} &= v_i + h \cdot g(x_i, v_i, w_i) \\ w_{i+1} &= w_i + h \cdot f(x_i, v_i, w_i) \end{aligned}$$

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema de ec. diferenciales de primer orden:

$$\begin{aligned} v' + 3xv - 5w &= 0 \\ 4w' - 2wv &= x \end{aligned}$$

con las condiciones iniciales: $v(0) = 2$, $w(0) = -1$. Paso de integración $h = 0.2$.

i	x	v _i	w _i	v' _i	w' _i	v _{i+1}	w _{i+1}
0	0.0	2.000	-1.000	-5.000	-1.000	1.000	-1.200
1	0.2	1.000	-1.200	-6.600	-0.550	-0.320	-1.310
2	0.4	-0.320	-1.310	-6.166	0.310	-1.553	-1.248
3	0.6	-1.553	-1.248	-3.445	1.119	-2.242	-1.024
4	0.8	-2.242	-1.024	0.260	1.348	-2.190	-0.755
5	1.0	-2.190	-0.755	2.797	1.076	-1.631	-0.539
6	1.2	-1.631	-0.539	3.174	0.740	-0.996	-0.391
7	1.4	-0.996	-0.391	2.226	0.545	-0.551	-0.282
8	1.6	-0.551	-0.282	1.231	0.478	-0.304	-0.187
9	1.8	-0.304	-0.187	0.710	0.478	-0.162	-0.091
10	2.0	-0.162	-0.091	0.519	0.507	-0.059	0.010

X	V (V - W)	W (V - W)
0.0	2.0	-1.0
0.2	1.0	-1.2
0.4	-0.3	-1.3
0.6	-1.6	-1.25
0.8	-2.2	-1.0
1.0	-2.2	-0.75
1.2	-1.6	-0.55
1.4	-1.0	-0.4
1.6	-0.55	-0.3
1.8	-0.3	-0.2
2.0	-0.2	-0.1

Como ya se dijo, para poder resolver numéricamente una ecuación diferencial de orden n debemos transformarla en n ecuaciones diferenciales de primer orden y luego resolverla de igual manera que se hizo en 3.1.

$$y'' = f(x, y', y)$$

Definimos: $v = y$
 $w = y'$

$$\begin{aligned} v' &= w \\ w' &= f(x, v, w) \end{aligned}$$

Al resolverlo usando el método de Euler queda:

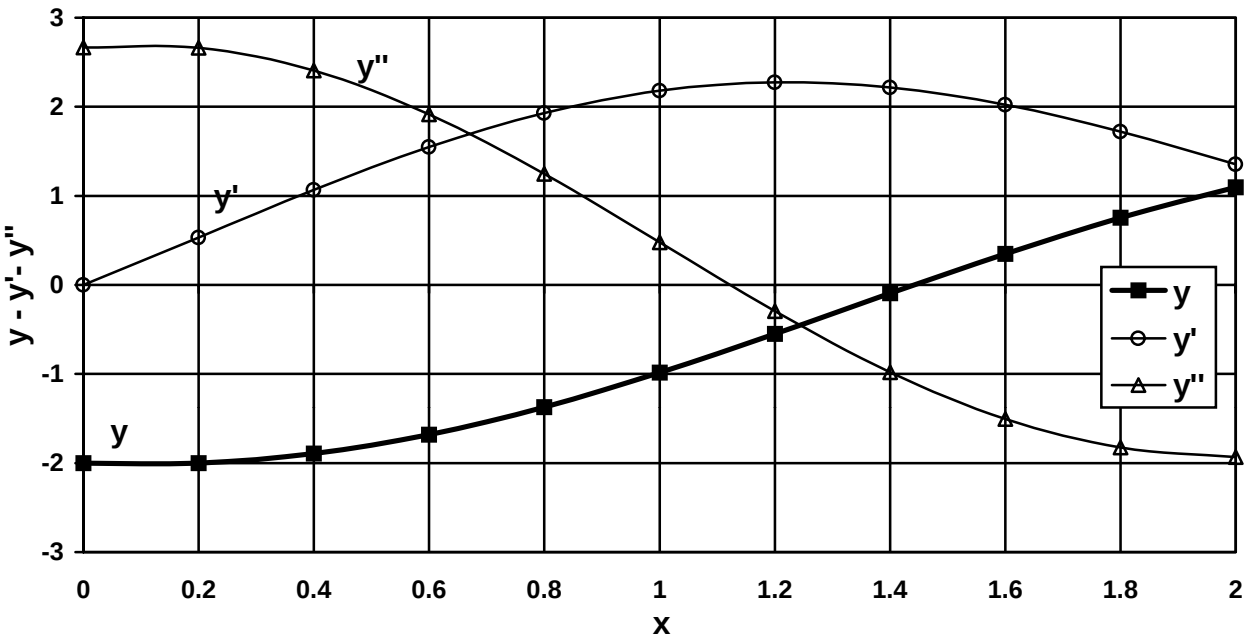
Ejemplo 1:

$$3y'' + 2xy' + 3y - 2 = \sin(x)$$

Para integrar numéricamente transformamos la ecuación anterior en un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden haciendo $v = y$, $w = y'$:

$$\begin{aligned} v' &= w \\ w' &= \frac{\sin(x) - 2xw - 3v + 2}{3} \quad \text{con } v(0) = -2, w(0) = 0. \end{aligned}$$

i	x	v _i	w _i	v' _i	w' _i	v _{i+1}	w _{i+1}
0	0.0	-2.000	0.000	0.000	2.667	-2.000	0.533
1	0.2	-2.000	0.533	0.533	2.662	-1.893	1.066
2	0.4	-1.893	1.066	1.066	2.406	-1.680	1.547
3	0.6	-1.680	1.547	1.547	1.916	-1.371	1.930
4	0.8	-1.371	1.930	1.930	1.247	-0.985	2.180
5	1.0	-0.985	2.180	2.180	0.479	-0.549	2.275
6	1.2	-0.549	2.275	2.275	-0.294	-0.094	2.217
7	1.4	-0.094	2.217	2.217	-0.980	0.349	2.021
8	1.6	0.349	2.021	2.021	-1.505	0.754	1.720
9	1.8	0.754	1.720	1.720	-1.826	1.097	1.354
10	2.0	1.097	1.354	1.354	-1.934	1.368	0.968



Ejemplo 2:

Resolver la ecuación diferencial (2):

$y'' - 3y' + 2y = 0;$ con $y(0) = 3, y'(0) = 4$

Lo transformamos en dos ec. diferenciales de primer orden haciendo $v = y, w = y'$:

$v' = w$
 $w' = 3w - 2v$ con $v(0) = 3, w(0) = 4.$

i	x	v _i	w _i	v' _i	w' _i	v _{i+1}	w _{i+1}	y _{exacto}
0	0.0	3.00	4.00	4.00	6.00	3.40	4.60	3.00
1	0.1	3.40	4.60	4.60	7.00	3.86	5.30	3.43
2	0.2	3.86	5.30	5.30	8.18	4.39	6.12	3.93
3	0.3	4.39	6.12	6.12	9.57	5.00	7.08	4.52
4	0.4	5.00	7.08	7.08	11.22	5.71	8.20	5.21
5	0.5	5.71	8.20	8.20	13.17	6.53	9.52	6.02
6	0.6	6.53	9.52	9.52	15.49	7.48	11.06	6.96
7	0.7	7.48	11.06	11.06	18.23	8.59	12.89	8.08
8	0.8	8.59	12.89	12.89	21.49	9.88	15.04	9.40
9	0.9	9.88	15.04	15.04	25.36	11.38	17.57	10.97
10	1.0	11.38	17.57	17.57	29.95	13.14	20.57	12.83

3.3 Resumen

Combinando los métodos presentados en los puntos 3.1 y 3.2 es posible resolver sistemas de ecuaciones diferenciales ordinarias de cualquier orden transformándolo en un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden y usando los métodos clásicos ya analizados.

4. ESTABILIDAD

Una cuestión importante es la estabilidad del procedimiento numérico. La inestabilidad surge cuando cualquier error que se haya introducido (por ej., debido al redondeo) produce una solución no deseada de la ecuación de diferencias finitas, la cual entonces crece más rápidamente que la solución requerida, rebasándola eventualmente.

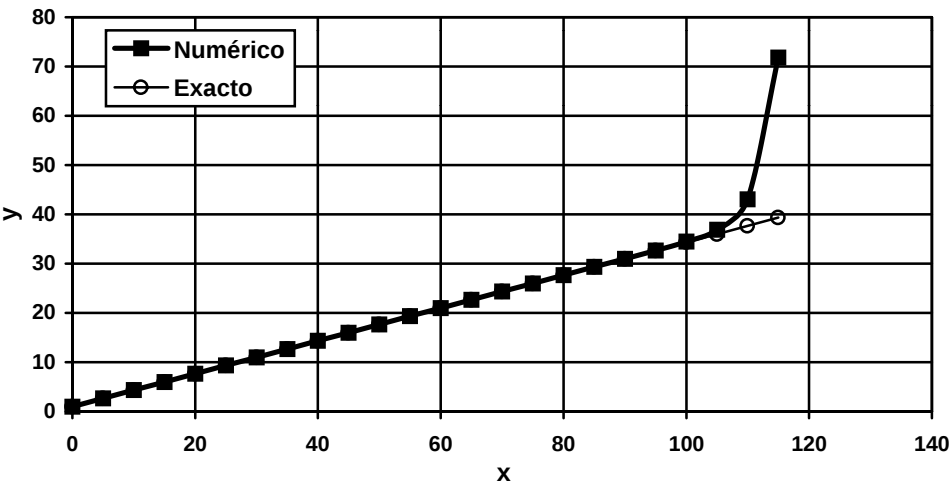
Las fórmulas que usamos originan un error de truncamiento y su conocimiento es valioso, pero no suficiente para determinar la precisión del método. Con el objeto de dar una idea respecto a este tema consideremos el siguiente ejemplo:

Analicemos la ecuación:

$$y' = y - \frac{1}{3}x - \frac{2}{3}$$

cuya solución analítica general es $y(x) = Ae^x + \frac{1}{3}x + 1$. En el caso especial de condición inicial $y(0) = 1$

A es nulo. En este caso la solución será una expresión lineal simple que variará lentamente en comparación con el término exponencial. Durante el cálculo numérico, debido a los errores, es probable que se considere el término exponencial y el error resultante crecerá y rebasará a la solución.



Este fenómeno se llama inestabilidad inherente, puesto que un pequeño cambio en el valor inicial causa un gran cambio (para x grande) en la solución verdadera. Es análogo al “mal condicionamiento” en el álgebra lineal y es relativamente independiente del método numérico de solución.

Sin embargo, usando fórmulas de orden más elevado y aritmética de doble precisión, se puede obtener mayor exactitud. También, puede ser posible dar otro enunciado al problema de tal modo que se supere la inestabilidad.

5. ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES

Hemos visto hasta aquí los métodos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias de cualquier orden. Además de estas ecuaciones existen otras ecuaciones diferenciales denominadas ecuaciones diferenciales a derivadas parciales. Estas ecuaciones, cuyos campos de aplicación es la física nuclear, aerodinámica, análisis estructural, mecánica computacional, etc., están adquiriendo cada vez mayor importancia.

A modo de ejemplo escribamos una ecuación diferencial a derivadas parciales de segundo orden, lineales, con dos variables independientes. Esta se puede escribir de la forma:

$$A u_{xx} + B u_{xy} + C u_{yy} + D u_x + E u_y + F u = G$$

donde A, B, C, D, E, F y G son funciones únicamente de x y y.

Para poder seleccionar una solución específica a este problema, se debe suministrar información adicional (similar a las condiciones iniciales de las ecuaciones diferenciales ordinarias) que, como estamos tratando con dos variables independientes, éstas tendrán que ser dadas a través de una curva en el plano x – y. Esta información puede referirse a u y/o a sus derivadas.

Se definen tres tipos de ecuaciones diferenciales parciales de 2° orden:

- a. Ecuación elíptica ($B^2 - 4AC < 0$)
- b. Ecuación parabólica ($B^2 - 4AC = 0$)
- c. Ecuación hiperbólica ($B^2 - 4AC > 0$)

Cada ecuación tiene un método práctico de resolución. Puede suceder que alguna ecuación pertenezca a más de un tipo, dependiendo de cómo varíen los valores de los coeficientes.

El método para obtener las ecuaciones de diferencias finitas que permita resolverlos es similar a los procedimientos usados para resolver las ecuaciones diferenciales ordinarias, sólo que aquí se suma una nueva dimensión al problema. Es decir ahora existe dos variables independientes y no sólo una como era en el caso anterior. Generalmente para resolver problemas prácticos usando estas ecuaciones es necesario disponer de potentes computadoras.