

ANEXO : TRANSFORMADA DE LAPLACE

32

TRANSFORMADAS DE LAPLACE

DEFINICION DE LA TRANSFORMADA DE LAPLACE DE $F(t)$

32.1

$$\mathcal{L}\{F(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} F(t) dt = f(s)$$

En general $f(s)$ existe cuando $s > \alpha$ donde α es cierta constante. $\mathcal{L}$ es llamado el *operador de la transformada de Laplace*.

DEFINICION DE LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE DE $f(s)$

Si $\mathcal{L}\{F(t)\} = f(s)$, entonces $F(t) = \mathcal{L}^{-1}\{f(s)\}$ es la *transformada inversa de Laplace* de $f(s)$. $\mathcal{L}^{-1}$ es llamado el *operador de la transformada inversa de Laplace*.

FORMULA COMPLEJA PARA LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

La transformada inversa de Laplace de $f(s)$ puede encontrarse directamente por los métodos de la teoría de las variables complejas. El resultado es

32.2

$$F(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} f(s) ds = \frac{1}{2\pi i} \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{c-iT}^{c+iT} e^{st} f(s) ds$$

donde c ha de escogerse de tal manera que todos los puntos singulares de $f(s)$ caigan a la izquierda de la línea $\text{Re}\{s\} = c$ en el plano complejo s .

TABLA DE LAS PROPIEDADES GENERALES DE LAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE

	$f(s)$	$F(t)$
32.3	$a f_1(s) + b f_2(s)$	$a F_1(t) + b F_2(t)$
32.4	$f(s/a)$	$a F(at)$
32.5	$f(s - a)$	$e^{at} F(t)$
32.6	$e^{-as} f(s)$	$\mathcal{U}(t - a) = \begin{cases} F(t - a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases}$
32.7	$s f(s) - F'(0)$	$F'(t)$
32.8	$s^2 f(s) - s F(0) - F'(0)$	$F''(t)$
32.9	$s^n f(s) - s^{n-1} F(0) - s^{n-2} F'(0) - \dots - F^{(n-1)}(0)$	$F^{(n)}(t)$
32.10	$f'(s)$	$-t F(t)$
32.11	$f''(s)$	$t^2 F(t)$
32.12	$f^{(n)}(s)$	$(-1)^n t^n F(t)$
32.13	$\frac{f(s)}{s}$	$\int_0^t F(u) du$
32.14	$\frac{f(s)}{s^n}$	$\int_0^t \dots \int_0^t F(u) du^n = \int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} F(u) du$
32.15	$f(s) g(s)$	$\int_0^t F(u) G(t-u) du$

05/14/00

TABLA DE ALGUNAS TRANSFORMADAS DE LAPLACE

	$f(s)$	$F(t)$
32.25	$\frac{1}{s}$	1
32.26	$\frac{1}{s^2}$	t
32.27	$\frac{1}{s^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad 0! = 1$
32.28	$\frac{1}{s^n} \quad n > 0$	$\frac{t^{n-1}}{\Gamma(n)}$
32.29	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}
32.30	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad n = 1, 2, 3, \dots$	$\frac{t^{n-1} e^{at}}{(n-1)!}, \quad 0! = 1$
32.31	$\frac{1}{(s-a)^n} \quad n > 0$	$\frac{t^{n-1} e^{at}}{\Gamma(n)}$
32.32	$\frac{1}{s^2 + a^2}$	$\frac{\text{sen } at}{a}$
32.33	$\frac{s}{s^2 + a^2}$	$\cos at$
32.34	$\frac{1}{(s-b)^2 + a^2}$	$\frac{e^{bt} \text{sen } at}{a}$
32.35	$\frac{s-b}{(s-b)^2 + a^2}$	$e^{bt} \cos at$
32.36	$\frac{1}{s^2 - a^2}$	$\frac{\text{senh } at}{a}$
32.37	$\frac{s}{s^2 - a^2}$	$\cosh at$
32.38	$\frac{1}{(s-b)^2 - a^2}$	$\frac{e^{bt} \text{senh } at}{a}$

05/14/00

	$f(s)$	$F(t)$
32.56	$\frac{s^4}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{(3 - a^2t^2) \operatorname{sen} at + 5at \cos at}{8a}$
32.57	$\frac{s^5}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{(8 - a^2t^2) \cos at - 7at \operatorname{sen} at}{8}$
32.58	$\frac{3s^2 - a^2}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{t^2 \operatorname{sen} at}{2a}$
32.59	$\frac{s^3 - 3a^2s}{(s^2 + a^2)^3}$	$\frac{1}{2}t^2 \cos at$
32.60	$\frac{s^4 - 6a^2s^2 + a^4}{(s^2 + a^2)^4}$	$\frac{1}{6}t^3 \cos at$
32.61	$\frac{s^3 - a^2s}{(s^2 + a^2)^4}$	$\frac{t^3 \operatorname{sen} at}{24a}$
32.62	$\frac{1}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{(3 + a^2t^2) \operatorname{senh} at - 3at \cosh at}{8a^5}$
32.63	$\frac{s}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{at^2 \cosh at - t \operatorname{senh} at}{8a^3}$
32.64	$\frac{s^2}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{at \cosh at + (a^2t^2 - 1) \operatorname{senh} at}{8a^3}$
32.65	$\frac{s^3}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{3t \operatorname{senh} at + at^2 \cosh at}{8a}$
32.66	$\frac{s^4}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{(3 + a^2t^2) \operatorname{senh} at + 5at \cosh at}{8a}$
32.67	$\frac{s^5}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{(8 + a^2t^2) \cosh at + 7at \operatorname{senh} at}{8}$
32.68	$\frac{3s^2 + a^2}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{t^2 \operatorname{senh} at}{2a}$
32.69	$\frac{s^3 + 3a^2s}{(s^2 - a^2)^3}$	$\frac{1}{2}t^2 \cosh at$
32.70	$\frac{s^4 + 6a^2s^2 + a^4}{(s^2 - a^2)^4}$	$\frac{1}{6}t^3 \cosh at$
32.71	$\frac{s^3 + a^2s}{(s^2 - a^2)^4}$	$\frac{t^3 \operatorname{senh} at}{24a}$
32.72	$\frac{1}{s^3 + a^3}$	$\frac{e^{at/2}}{3a^2} \left\{ \sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3} at}{2} - \cos \frac{\sqrt{3} at}{2} + e^{-3at/2} \right\}$

	$f(s)$	$F(t)$
32.73	$\frac{s}{s^3 + a^3}$	$\frac{e^{at/2}}{3a} \left\{ \cos \frac{\sqrt{3} at}{2} + \sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3} at}{2} - e^{-3at/2} \right\}$
32.74	$\frac{s^2}{s^3 + a^3}$	$\frac{1}{3} \left(e^{-at} + 2e^{at/2} \cos \frac{\sqrt{3} at}{2} \right)$
32.75	$\frac{1}{s^3 - a^3}$	$\frac{e^{-at/2}}{3a^2} \left\{ e^{3at/2} - \cos \frac{\sqrt{3} at}{2} - \sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3} at}{2} \right\}$
32.76	$\frac{s}{s^3 - a^3}$	$\frac{e^{-at/2}}{3a} \left\{ \sqrt{3} \operatorname{sen} \frac{\sqrt{3} at}{2} - \cos \frac{\sqrt{3} at}{2} + e^{3at/2} \right\}$
32.77	$\frac{s^2}{s^3 - a^3}$	$\frac{1}{3} \left(e^{at} + 2e^{-at/2} \cos \frac{\sqrt{3} at}{2} \right)$
32.78	$\frac{1}{s^4 + 4a^4}$	$\frac{1}{4a^3} (\operatorname{sen} at \cosh at - \cos at \sinh at)$
32.79	$\frac{s}{s^4 + 4a^4}$	$\frac{\operatorname{sen} at \sinh at}{2a^2}$
32.80	$\frac{s^2}{s^4 + 4a^4}$	$\frac{1}{2a} (\operatorname{sen} at \cosh at + \cos at \sinh at)$
32.81	$\frac{s^3}{s^4 + 4a^4}$	$\cos at \cosh at$
32.82	$\frac{1}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a^3} (\sinh at - \operatorname{sen} at)$
32.83	$\frac{s}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a^2} (\cosh at - \cos at)$
32.84	$\frac{s^2}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2a} (\sinh at + \operatorname{sen} at)$
32.85	$\frac{s^3}{s^4 - a^4}$	$\frac{1}{2} (\cosh at + \cos at)$
32.86	$\frac{1}{\sqrt{s+a} + \sqrt{s+b}}$	$\frac{e^{-bt} - e^{-at}}{2(b-a) \sqrt{\pi t^3}}$
32.87	$\frac{1}{s\sqrt{s+a}}$	$\frac{\operatorname{fer} \sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
32.88	$\frac{1}{\sqrt{s}(s-a)}$	$\frac{e^{at} \operatorname{fer} \sqrt{at}}{\sqrt{a}}$
32.89	$\frac{1}{\sqrt{s-a} + b}$	$e^{at} \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - b e^{b^2 t} \operatorname{fer} (b\sqrt{t}) \right\}$

REFERENCIA : “MANUAL DE FORMULAS Y TABLAS MATEMATICAS”, MURRAY R. SPIEGEL, SERIE DE COMPENDIOS SCHAUM. MCGRAW-HILL. 1975.