

Teoría de Cola

Ejercicio N° 1

El tiempo medio entre llegadas sucesivas a un servicio de lavado de automóviles tiene una distribución exponencial, con un tiempo entre llegadas de 0.10 horas. Los vehículos se lavan de uno en uno, sobre la base del servicio por orden de llegada. El tiempo necesario para lavar un automóvil tiene una distribución exponencial, con una media de 0.06 horas. Determine:

- a) El tiempo medio que se hace esperar un automóvil para recibir el servicio de lavado.
- b) El tiempo total en el sistema
- c) El porcentaje de utilización del sistema de lavado.

Simule el funcionamiento del sistema durante 1 hora.

Solución :

λ = Cantidad de vehículos / minutos = $1 / (0.1 * 60) = 1/6 = 0.16667$
 μ = Cantidad de lavados / minutos = $1 / (0.06 * 60) = 1/3.6 = 0.27778$

$X_a = -\frac{\ln(1-r_a)}{l} = -6 * \ln(1-r_a)$; $X_s = -\frac{\ln(1-r_s)}{m} = -3.6 * \ln(1-r_s)$

Evento	Tipo de evento	Número de auto	Reloj maestro	Estado del servidor	Longitud de la cola	Tiempo de llegada	Tiempo de salida
1	INICIO		0.000	0			
2	LLEGADA	1	0.000	1	0	7.027	2.956
3	SALIDA	1	2.956	0	0	7.027	9999.000
4	LLEGADA	2	7.027	1	0	22.181	16.120
5	SALIDA	2	16.120	0	0	22.181	9999.000
6	LLEGADA	3	22.181	1	0	23.017	24.142
7	LLEGADA	4	23.017	1	1	24.743	24.142
8	SALIDA	3	24.142	1	0	24.743	35.730
9	LLEGADA	5	24.743	1	1	27.236	35.730
10	LLEGADA	6	27.236	1	2	33.366	35.730
11	LLEGADA	7	33.366	1	3	44.362	35.730
12	SALIDA	4	35.730	1	2	44.362	41.181
13	SALIDA	5	41.181	1	1	44.362	43.205
14	SALIDA	6	43.205	1	0	44.362	46.415
15	LLEGADA	8	44.362	1	1	46.588	46.415
16	SALIDA	7	46.415	1	0	46.588	47.597
17	LLEGADA	9	46.588	1	1	48.002	47.597
18	SALIDA	8	47.597	1	0	48.002	48.268
19	LLEGADA	10	48.002	1	1	62.450	48.268
20	SALIDA	9	48.268	1	0	62.450	54.865
21	SALIDA	10	54.865	0	0	62.450	9999.000
22	LLEGADA	11	62.450				

N°deAuto	Ra	Xa	Ta	Rs	Xs	Ts	En cola	T. Espera	T. Sistema	T. Libre
0			0			0	0	0	0	0
1	0	0.000	0.000	56	2.956	2.956	0	0.000	2.956	0.000
2	69	7.027	7.027	92	9.093	16.120	0	0.000	9.093	4.072
3	92	15.154	22.181	42	1.961	24.142	0	0.000	1.961	6.062
4	13	0.836	23.017	96	11.588	35.730	1	1.125	12.713	0.000
5	25	1.726	24.743	78	5.451	41.181	1	10.987	16.438	0.000
6	34	2.493	27.236	43	2.024	43.205	2	13.945	15.969	0.000
7	64	6.130	33.366	59	3.210	46.415	3	9.839	13.049	0.000
8	84	10.995	44.362	28	1.183	47.597	1	2.053	3.236	0.000
9	31	2.226	46.588	17	0.671	48.268	1	1.009	1.680	0.000
10	21	1.414	48.002	84	6.597	54.865	1	0.266	6.863	0.000
11	91	14.448	62.450	86	7.078					
							PROMEDIO =	3.922	8.396	
							SUMA =			10.133

- a) Tiempo medio para recibir el lavado = 3.922 minutos
- b) Tiempo total en el sistema = 8.396 minutos
- c) Porcentaje de utilización del sistema de lavado = $1 - 10.133/60 = 83.11\%$

Teoría de Cola

Ejercicio N° 2

En un taller de reparaciones se garantiza poder arreglar ciertas fallas de algunos aparatos domésticos en 20 minutos. La garantía indica que si un cliente tiene que esperar más de 20 minutos, recibe la reparación gratuitamente. En promedio, por cada reparación cobran 5 pesos y el costo promedio de la reparación para el taller es de 3 pesos, lo que ocasiona beneficios promedio de 2 pesos por reparación. Los aparatos domésticos llegan al taller para su reparación según una distribución de Poisson y con un índice medio de ocho por hora. El tiempo de servicio por reparador tiene una distribución exponencial, con un tiempo medio de servicio de cinco minutos. El taller utiliza un reparador. ¿Puede funcionar con beneficios, aplicando esa garantía?. (Tiempo de simulación 90 minutos)

Solución :

λ = Cantidad de aparatos domésticos/ minutos = 8 / 60 = 2/15 = 0.133333

μ = Cantidad de reparaciones / minutos = 1 / 5 = 0.20

$$X_a = -\frac{\ln(1-r_a)}{l} = -\frac{15}{2} * \ln(1-r_a) \qquad ; \qquad X_s = -\frac{\ln(1-r_s)}{m} = -5 * \ln(1-r_s)$$

Evento	Tipo de evento	Número de aparato	Reloj maestro	Estado del servidor	Longitud de la cola	Tiempo de llegada	Tiempo de salida
1	INICIO		0.000	0	0		
2	LLEGADA	1	0.000	1	0	8.784	4.105
3	SALIDA	1	4.105	0	0	8.784	9999.000
4	LLEGADA	2	8.784	1	0	27.727	21.413
5	SALIDA	2	21.413	0	0	27.727	9999.000
6	LLEGADA	3	27.727	1	0	28.771	30.450
7	LLEGADA	4	28.771	1	1	30.929	30.450
8	SALIDA	3	30.450	1	0	30.929	46.545
9	LLEGADA	5	30.929	1	1	34.045	46.545
10	LLEGADA	6	34.045	1	2	41.708	46.545
11	LLEGADA	7	41.708	1	3	55.452	46.545
12	SALIDA	4	46.545	1	2	55.452	54.115
13	SALIDA	5	54.115	1	1	55.452	56.926
14	LLEGADA	8	55.452	1	2	58.235	56.926
15	SALIDA	6	56.926	1	1	58.235	61.384
16	LLEGADA	9	58.235	1	2	60.003	61.384
17	LLEGADA	10	60.003	1	3	78.063	61.384
18	SALIDA	7	61.384	1	2	78.063	63.027
19	SALIDA	8	63.027	1	1	78.063	63.958
20	SALIDA	9	63.958	1	0	78.063	73.121
21	SALIDA	10	73.121	0	0	78.063	9999.000
22	LLEGADA	11	78.063	1	0	84.051	87.893
23	LLEGADA	12	84.051	1	1	88.267	87.893
24	SALIDA	11	87.893	1	0	88.267	88.765
25	LLEGADA	13	88.267	1	1	92.098	88.765
26	SALIDA	12	88.765	1	0	92.098	108.325

N°Rep.	Ra	Xa	Ta	Rs	Xs	Ts	En cola	T. Sistema	Caja
0			0			0			
1	0	0.000	0.000	56	4.105	4.105	0	4.105	2
2	69	8.784	8.784	92	12.629	21.413	0	12.629	2
3	92	18.943	27.727	42	2.724	30.450	0	2.724	2
4	13	1.044	28.771	96	16.094	46.545	1	17.774	2
5	25	2.158	30.929	78	7.571	54.115	1	23.187	-5
6	34	3.116	34.045	43	2.811	56.926	2	22.881	-5
7	64	7.662	41.708	59	4.458	61.384	3	19.676	2
8	84	13.744	55.452	28	1.643	63.027	2	7.575	2
9	31	2.783	58.235	17	0.932	63.958	2	5.723	2
10	21	1.768	60.003	84	9.163	73.121	3	13.118	2
11	91	18.060	78.063	86	9.831	87.893	0	9.831	2
12	55	5.989	84.051	16	0.872	88.765	1	4.714	2
13	43	4.216	88.267	98	19.560	108.325	1	20.058	-5
								Suma =	5

El sistema puede funcionar con beneficio, siendo el mismo del 5/(13*5) = 7.7%.

Teoría de Cola

Ejercicio N° 3

Un muelle cuenta con una grúa para descargar barcos. El tiempo de descarga es de 2 días/barco con distribución exponencial, y la tasa de llegadas sigue una distribución de Poisson con una media de 3 barcos cada 7 días. Si un barco llega y el muelle está ocupado se une a una línea de espera para ser atendido en orden FCFS (El primero que llega el primero que se sirve). Determine el tiempo promedio que transcurre desde que un barco llega al sistema hasta que termina su descarga, la probabilidad de que el sistema esté vacío y la longitud promedio de la fila (Tiempo de simulación 30 días).

Solución :

λ = Promedio de arribos de barcos/día = 3 / 7 = 0.429
 μ = Promedio de barcos descargados/día = 1 / 2 = 0.500

$$X_a = -\frac{\ln(1-r_a)}{l} = -\frac{7}{3} * \ln(1-r_a) \qquad ; \qquad X_s = -\frac{\ln(1-r_s)}{m} = -2 * \ln(1-r_s)$$

Evento	Tipo de evento	Número de barco	Reloj maestro	Estado del servidor	Longitud de la cola	Tiempo de llegada	Tiempo de salida
1	INICIO		0.000	0	0	0.000	9999.000
2	LLEGADA	1	0.000	1	0	2.733	1.642
3	SALIDA	1	1.642	0	0	2.733	9999.000
4	LLEGADA	2	2.733	1	0	8.626	7.784
5	SALIDA	2	7.784	0	0	8.626	9999.000
6	LLEGADA	3	8.626	1	0	8.951	9.716
7	LLEGADA	4	8.951	1	1	9.622	9.716
8	LLEGADA	5	9.622	1	2	10.592	9.716
9	SALIDA	3	9.716	1	1	10.592	16.153
10	LLEGADA	6	10.592	1	2	12.976	16.153
11	LLEGADA	7	12.976	1	3	17.252	16.153
12	SALIDA	4	16.153	1	2	17.252	19.182
13	LLEGADA	8	17.252	1	3	18.118	19.182
14	LLEGADA	9	18.118	1	4	18.668	19.182
15	LLEGADA	10	18.668	1	5	24.286	19.182
16	SALIDA	5	19.182	1	4	24.286	20.306
17	SALIDA	6	20.306	1	3	24.286	22.089
18	SALIDA	7	22.089	1	2	24.286	22.746
19	SALIDA	8	22.746	1	1	24.286	23.119
20	SALIDA	9	23.119	1	0	24.286	26.784
21	LLEGADA	11	24.286	1	1	26.149	26.784
22	LLEGADA	12	26.149	1	2	27.461	26.784
23	SALIDA	10	26.784	1	1	27.461	30.716
24	LLEGADA	13	27.461	1	2	28.653	30.716
25	LLEGADA	14	28.653	1	3	29.924	30.716
26	LLEGADA	15	29.924	1	4	30.387	30.716

N° Barco	Ra	Xa	Ta	Rs	Xs	Ts	En cola	T. Sistema	Sist. Vacío
0			0			0			
1	0	0.000	0.000	56	1.642	1.642	0	1.642	1.000
2	69	2.733	2.733	92	5.051	7.784	0	5.051	1.000
3	92	5.893	8.626	42	1.089	9.716	0	1.089	1.000
4	13	0.325	8.951	96	6.438	16.153	1	7.202	0.000
5	25	0.671	9.622	78	3.028	19.182	2	9.559	0.000
6	34	0.970	10.592	43	1.124	20.306	2	9.714	0.000
7	64	2.384	12.976	59	1.783	22.089	3	9.113	0.000
8	84	4.276	17.252	28	0.657	22.746	3	5.494	0.000
9	31	0.866	18.118	17	0.373	23.119	4	5.001	0.000
10	21	0.550	18.668	84	3.665	26.784	5	8.116	0.000
11	91	5.619	24.286	86	3.932	30.716	1	6.430	0.000
12	55	1.863	26.149	16	0.349	31.065	2	4.915	0.000
13	43	1.312	27.461	98	7.824	38.889	2	11.428	0.000
14	40	1.192	28.653	37	0.924	39.813	3	11.160	0.000
15	42	1.271	29.924	6	0.124	39.937	4	10.013	0.000
16	18	0.463	30.387						
						Promedio	2.133333	7.062	

- a) Tiempo promedio en el sistema = 7.062 días.
- b) Probabilidad de que el sistema esté vacío = 3/15 = 0.2
- c) Longitud promedio de la fila = 2.13 barcos

Teoría de Cola

Ejercicio N° 4

Un banco tiene una caja de tipo autoservicio. Los autos llegan de acuerdo con un proceso Poisson con media de 12 autos/hora. El tiempo de atención al cliente sigue una distribución exponencial con media de 4 minutos por auto. Frente a la caja existe un techo que proporciona sombra para 4 autos (incluyendo al que se encuentra en servicio). Indique cuál es la probabilidad de que al entrar un cliente al sistema le toque sombra durante toda su estancia.

Solución :

λ = Promedio de arribos de autos/minuto = 12 / 60 = 1 / 5 = 0.20

μ = Promedio de atención de autos/minuto = 1 / 4 = 0.25

$$X_a = -\frac{\ln(1-r_a)}{l} = -5 * \ln(1-r_a) \qquad ; \qquad X_s = -\frac{\ln(1-r_s)}{m} = -4 * \ln(1-r_s)$$

Evento	Tipo de evento	Número de auto	Reloj maestro	Estado del servidor	Longitud de la cola	Tiempo de llegada	Tiempo de salida
1	INICIO		0.000	0			
2	LLEGADA	1	0.000	1	0	5.856	3.284
3	SALIDA	1	3.284	0	0	5.856	9999.000
4	LLEGADA	2	5.856	1	0	18.485	15.959
5	SALIDA	2	15.959	0	0	18.485	9999.000
6	LLEGADA	3	18.485	1	0	19.181	20.663
7	LLEGADA	4	19.181	1	1	20.619	20.663
8	LLEGADA	5	20.619	1	2	22.697	20.663
9	SALIDA	3	20.663	1	1	22.697	33.539
10	LLEGADA	6	22.697	1	2	27.805	33.539
11	LLEGADA	7	27.805	1	3	36.968	33.539
12	SALIDA	4	33.539	1	2	36.968	39.595
13	LLEGADA	8	36.968	1	3	38.823	39.595
14	LLEGADA	9	38.823	1	4	40.002	39.595
15	SALIDA	5	39.595	1	3	40.002	41.844
16	LLEGADA	10	40.002	1	4	52.042	41.844
17	SALIDA	6	41.844	1	3	52.042	45.410
18	SALIDA	7	45.410	1	2	52.042	46.724
19	SALIDA	8	46.724	1	1	52.042	47.470
20	SALIDA	9	47.470	1	0	52.042	54.800
21	LLEGADA	11	52.042	1	1	56.034	54.800
22	SALIDA	10	54.800	1	0	56.034	62.664
23	LLEGADA	12	56.034	1	1	58.845	62.664
24	LLEGADA	13	58.845	1	2	61.399	62.664
25	LLEGADA	14	61.399				

N°deAuto	Ra	Xa	Ta	Rs	Xs	Ts	En cola	Sombra
0			0			0	0	
1	0	0.000	0.000	56	3.284	3.284	0	1
2	69	5.856	5.856	92	10.103	15.959	0	1
3	92	12.629	18.485	42	2.179	20.663	0	1
4	13	0.696	19.181	96	12.876	33.539	1	1
5	25	1.438	20.619	78	6.057	39.595	2	1
6	34	2.078	22.697	43	2.248	41.844	2	1
7	64	5.108	27.805	59	3.566	45.410	3	1
8	84	9.163	36.968	28	1.314	46.724	3	1
9	31	1.855	38.823	17	0.745	47.470	4	0
10	21	1.179	40.002	84	7.330	54.800	4	0
11	91	12.040	52.042	86	7.864	62.664	1	1
12	55	3.993	56.034	16	0.697	63.362	1	1
13	43	2.811	58.845	98	15.648	79.010	2	1
14	40	2.554	61.399					
							Suma =	11

La probabilidad de que le toque sombra es de 11/13 = 0.85

Teoría de Cola

Ejercicio N° 5

Simule un sistema que contenga tres canales en paralelo, una cola de servicio en orden de llegada, sin restricciones y con un proceso de llegadas de Poisson, con $\lambda = 0.1$. Se supone que cada proceso de servicio es exponencial con $\mu_1 = 0.08$, $\mu_2 = 0.09$ y $\mu_3 = 0.12$. Estime el porcentaje de utilización de las instalaciones mediante la simulación del funcionamiento del sistema durante 90 minutos.

Solución :

$$X_a = -\frac{\ln(r_a)}{l} = -10 * \ln(r_a)$$

$$; X_s = -\frac{\ln(r_s)}{m}$$

Números aleatorios

	Lambda	0.1	Mu1	0.08	Mu2	0.09	Mu3	0.12
Unidad	ran	t Lambda	Ran	t Mu1	ran	t Mu2	ran	t Mu3
1	0	0	56	7	30	13	32	9
2	69	3	92	1	88	1	82	1
3	92	0	42	10	51	7	16	15
4	13	20	96	0	58	6	14	16
5	25	13	78	3	50	7	89	0
6	34	10	43	10	71	3	48	6
7	64	4	59	6	68	4	45	6
8	84	1	28	15	52	7	89	0
9	31	11	17	22	71	3	55	4
10	21	15	84	2	39	10	25	11
11	91	0	86	1	18	19	93	0
12	55	5	16	22	20	17	45	6
13	43	8	98	0	71	3	3	29

Simulación

Evento	Tipo de evento	Número de unidad	Reloj maestro	Longitud de la cola	EST SERV N° 1	EST SERV N° 2	EST SERV N° 3	Tiempo de llegada	Tiempo de salida servidor N°1	Tiempo de salida servidor N°2	Tiempo de salida servidor N°3
1	INICIO		0								
2	LLEGADA	1	0	0	1	0	0	3	7		
3	LLEGADA	2	3	0	1	1	0	3	7	16	
4	LLEGADA	3	3	0	1	1	1	23	7	16	12
5	SALIDA	1	7	0	0	1	1	23		16	12
6	SALIDA	3	12	0	0	1	0	23		16	
7	SALIDA	2	16	0	0	0	0	23			
8	LLEGADA	4	23	0	1	0	0	36	24		
9	SALIDA	4	24	0	0	0	0	36			
10	LLEGADA	5	36	0	1	0	0	46	46		
11	SALIDA	5	46	0	0	0	0	46			
12	LLEGADA	6	46	0	1	0	0	50	46		
13	SALIDA	6	46	0	0	0	0	50			
14	LLEGADA	7	50	0	1	0	0	51	53		
15	LLEGADA	8	51	0	1	1	0	62	53	52	
16	SALIDA	8	52	0	1	0	0	62	53		
17	SALIDA	7	53	0	0	0	0	62			
18	LLEGADA	9	62	0	1	0	0	77	72		
19	SALIDA	9	72	0	0	0	0	77			
20	LLEGADA	10	77	0	1	0	0	77	83		
21	LLEGADA	11	77	0	1	1	0	82	83	84	
22	LLEGADA	12	82	0	1	1	1	90	83	84	83
23	SALIDA	10	83	0	0	1	1	90		84	83
24	SALIDA	11	83	0	0	1	0	90		84	
25	SALIDA	12	84	0	0	0	0	90			

Solución			
Número de unidad	Servidor 1	Servidor 2	Servidor 3
1	7		
2		13	
3			9
4	1		
5	10		
6	0		
7	3		
8		1	
9	10		
10	6		
11		7	
12			1
Suma =	37	21	10
Utilización =	41%	23%	11%