SIMULACION DE MONTECARLO

Concepto de Montecarlo

Ciertos problemas complicados en su solución práctica y analítica son frecuentemente resueltos utilizando varias técnicas de probabilidad y muestreo. Estas han sido agrupadas bajo el nombre de Montecarlo, que no es más que una nueva utilización de un antiguo procedimiento: el empleo de muestreo al azar, que permite simular experiencias.

El doctor A. S. Householder intenta definirlo así: "El método Montecarlo constituye el estudio de modelos estocásticos artificiales de procesos matemáticos o físicos". El método no constituye en general novedad para los estadísticos. Por años, cuando éstos tenían dificultades en los problemas de distribución teórica, utilizaban modelos de muestreo para buscar soluciones.

Existe discrepancia entre diferentes autores para definir los tipos de simulación que abarca Montecarlo. En general, llamaremos simulación de Montecarlo a los métodos de simulación usados para conocer el comportamiento de los Modelos de Simulación Estáticos que se basen en resolver ensayos independientes, en los que los resultados que ocurren en un ensayo no afecten lo que ocurre en ensayos subsecuentes.

Anécdota

Durante la segunda guerra mundial, los físicos del laboratorio científico de Los Alamos se enfrentaron con un complejo problema relacionado con el comportamiento de los neutrones. Querían conocer qué distancia media recorrían los neutrones en su viaje a través de diferentes materiales. El problema parecía estar más allá del alcance del cálculo teórico. Los físicos tenían la información básica: probabilidad de que el neutrón rebotara en lugar de ser absorbido por un núcleo, energía perdida después de cada colisión, etcétera.

Los matemáticos Von Neumann y Ulam sugirieron una solución que equivalía a proponer el uso del juego de la ruleta. Paso a paso las Probabilidades de los eventos serían traducidos a un esquema de juego compuesto que serviría para dar al problema una respuesta suficientemente aceptable. Von Neumann le dio el nombre clave de Montecarlo.

Intentaron conocer qué porcentaje de neutrones de un total determinado pasarían a través de un tanque de agua de cierto tamaño, sin ser absorbidos y sin perder la mayor parte de la velocidad. Ninguna fórmula podría describir con precisión el destino de todos los neutrones. El ataque al problema consistió en pretender trazar la trayectoria de una gran muestra de neutrones elegidos al azar.

Imaginaron los neutrones deslizándose por el agua y chocando ocasionalmente con un núcleo de hidrógeno u oxígeno. Siguieron a los neutrones uno por uno en sus aventuras. Conocían en promedio la distancia recorrida antes de encontrar un núcleo, la probabilidad de que este encuentro fuera con oxígeno o con hidrógeno, la probabilidad de que el neutrón fuera o no absorbido por un núcleo y toda otra información complementaria necesaria.

Tomaron un determinado neutrón y su primer incidente fue una comisión con un núcleo de hidrógeno. Sabían que, la probabilidad de que en tal choque el neutrón rebotara estaba determinada. Para decidir qué es lo que haría en esta circunstancia hicieron girar en forma figurada una rueda de ruleta pintada en dos colores con los sectores proporcionales a los valores de las probabilidades de ser rechazado o de ser absorbido. Si la ruleta indicaba que el neutrón era absorbido por el núcleo, ése era el fin de la historia del neutrón. Si en cambio resultaba rechazado, había que girar una nueva rueda marcada convenientemente, para decidir la nueva trayectoria del mismo y además determinar la energía que había perdido. Otra rueda permitiría, por medio del azar, saber hasta dónde viajaría en la nueva dirección hasta tener una nueva colisión con un núcleo, que podría ser de oxígeno o de hidrógeno. De esa forma seguía su carrera hasta que resultaba absorbido, perdía casi toda su energía o se escapaba fuera del tanque. Acumulando un gran número de tales historias obtuvieron un dato bastante preciso del promedio de distancia recorrido por los neutrones en el agua. El grado de precisión del resultado dependía del número de pruebas.

En la práctica, por supuesto, no se usaron ruletas sino calculadoras electrónicas. En este problema, la computadora trabajó tres horas, para trazar la historia de 10.000 neutrones, con un millón y medio de colisiones.

Justificación del método Montecarlo

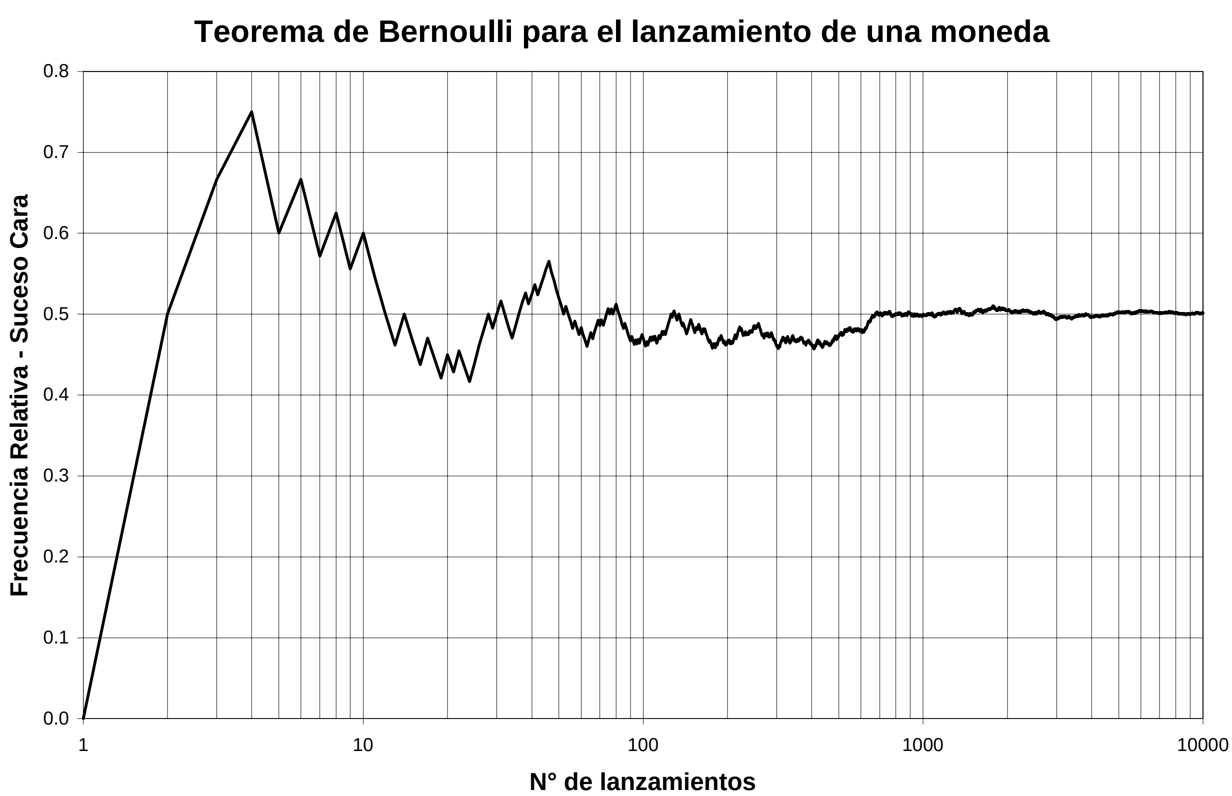
Con una probabilidad matemática que se aproxima a 1, es decir a la certeza, tanto como lo deseamos, podemos esperar que la frecuencia relativa de un acontecimiento en una serie, de ensayos independientes, con probabilidad constante p, difiera de esa probabilidad en un valor menor que cualquier número dado x mayor que 0, siempre que el número de ensayos sea suficientemente grande. Esto es lo que nos dice el Teorema de Bernoulli y que nos permite encarar dos problemas:

a. Cuando se conoce la probabilidad de un fenómeno, tenemos un valor guía de la frecuencia relativa que debemos esperar, al aumentar la experiencia.

b. Cuando no conocemos la probabilidad, que es el caso que más nos interesa en la realidad y la experiencia es grande, podemos tomar la frecuencia relativa del acontecimiento como un valor aproximado de la probabilidad. La precisión dada la podemos aumentar acrecentando el número de experiencias.

Supongamos que jugamos a cara o cruz con una moneda. Si a medida que vamos aumentando el número de experiencias hallamos los valores de la frecuencia relativa (cociente entre el número de veces que sale cara y el número total de lanzamientos) referente al suceso cara, nos puede suceder que al llegar a los 200 casos, tengamos un valor de 0,465. Al pasar a 1200 casos podemos encontramos con un valor de 0,5017 y así sucesivamente. Al ir acrecentando el número de lanzamientos de la moneda observamos que las oscilaciones de la frecuencia relativa irán pasando a una segunda, tercera, y así siguiendo, cifra decimal. Podemos aceptar la hipótesis de que continuando este juego durante, un tiempo suficientemente grande, sin que cambien las condiciones iniciales, llegaremos a valores constantes para la segunda, tercera y cuarta cifra.

Si representamos gráficamente en la abscisa el número de observaciones y en las ordenadas la frecuencia relativa del resultado, suceso cara, la curva obtenida mostrará al principio grandes oscilaciones que irán disminuyendo gradualmente hasta acercarse a una línea horizontal.



Aplicaciones

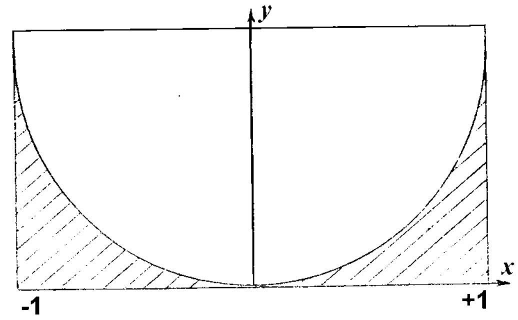
Seguidamente presentamos algunos problemas sencillos que nos hagan ver distintas aplicaciones de Monte Carlo en diferentes ámbitos.

Montecarlo en la matemática y en la estadística

a. Valor de una integral definida

Tenemos la función : $y = x^2$

Si representamos gráficamente la función, tenemos la siguiente curva:

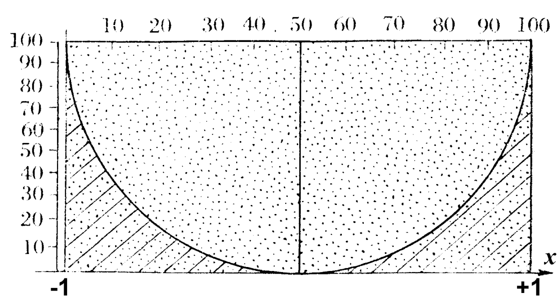


El área comprendida entre el eje x y la función dada para el intervalo x=1 y x=-1, área rayada, corresponde al valor:

$$A = \int_{-1}^{+1} x^2 \cdot dx = \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_{-1}^{+1} = \frac{2}{3}$$

Siendo el área del rectángulo igual a 2, efectuando el cociente entre el área de la integral y este valor 2, obtenemos un valor relativo de un tercio. Vamos a suponer que no conociéramos el valor del área rayada y la quisiéramos obtener mediante el método Monte Carlo.

Tal como lo vemos en la figura siguiente, dibujamos una doble escala vertical y horizontal.



Entramos en la tabla de números aleatorios, sacando parejas de dos dígitos, lo que nos determina un valor de la ordenada y otro de la abscisa. Tenemos así las coordenadas de un punto en la superficie, el cual es dibujado en la figura. De esta forma comenzamos a trabajar y vamos llenando de puntos la superficie. Aquellos que caen exactamente sobre la curva de la función no los colocamos.

Supongamos que al obtener 200 puntos, sumamos 69 sobre la superficie rayada. Efectuamos el cociente:

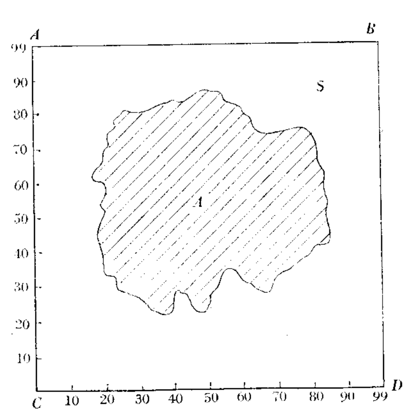
$$\frac{69}{200} = 0.345$$

El valor esperado teórico era de 0,333. El modelo físico utilizado nos dio 0,345. Quiere decir que la diferencia entre lo esperado y lo obtenido en la primera muestra del modelo Montecarlo es de 0,012.

Repetimos el cálculo de este modelo físico, con diferentes números al azar, la cantidad que sea necesaria en relación con la precisión deseada. El promedio de los valores nos dará aproximadamente el área buscada.

b. Medir por Montecarlo una superficie irregular

Se ha desbordado un río por lluvias intensas. La superficie rayada, de forma totalmente irregular, está cubierta de agua. Deseamos conocer la dimensión de la superficie cubierta. La fotografía aérea nos da una imagen real de la dimensión de esa superficie que indicamos con A. Lo resolveremos por Montecarlo. Trazamos el rectángulo ABCD, cuyos vértices geográficos conocemos, lo que nos permite conocer su superficie, que indicaremos con S.



Tal como lo vemos en la figura, dibujamos una doble escala vertical y horizontal. Entramos en la tabla de números aleatorios, sacando parejas de dos dígitos, lo que nos determina un valor de la ordenada y otra de la abscisa. Tenemos así las coordenadas de un punto del rectángulo, al que marcaremos en la figura. Todos los puntos del rectángulo tienen la misma probabilidad de aparecer. De esta forma trabajamos y vamos dibujando puntos, los que caerán o no dentro de la superficie del agua.

La relación entre la cantidad de puntos que caen a la superficie y la cantidad de puntos dibujados nos representa la proporción de la superficie de agua respecto a la del rectángulo que conocemos. Multiplicando esta proporción por el área S, nos dará el valor fijado en forma aproximada.

Los resultados obtenidos a medida que aumentamos el tamaño de n, de la cantidad de puntos, los encontramos en el cuadro siguiente:

n	**Puntos en A**	**Proporción**	**Superficie de A**
200	156	0.780	156
500	383	0.766	153
1000	749	0.749	149
2000	1506	0.753	150

En la primera columna encontramos el número de puntos dibujados. En la segunda, la cantidad que entró en la superficie A; en la tercera, el cociente de los valores de la columna A, por el total de puntos. En la última columna estimamos la superficie de agua, multiplicando los valores de la tercera columna por la superficie del cuadrado, que alcanza a 200 Km. cuadrados.

Montecarlo en el ámbito militar

Históricamente fue una de las áreas de mayor desarrollo de la simulación de Montecarlo. Por ejemplo, en lo que respecta al bombardeo estratégico o táctico realizado por aviones, la aplicación de Montecarlo es utilizada, sobre todo, en los siguientes tipos de problemas:

a. Número de aviones que no cumplen la misión.
b. Número de aviones derribados por la defensa enemiga en el camino al blanco.
c. Número de aviones que se extravían por errores de navegación.
d. Número de aviones derribados por la defensa local del blanco.
e. Lugar donde las bombas hacen impacto.
f. Daños esperados.

Para más información con respecto a este tema se puede consultar en el libro “INVESTIGACION OPERATIVA – MONTECARLO” de Gerardo A. Sylvester, Editorial Cid, 1974.

Montecarlo en el análisis de riesgo

Análisis de riesgo es el proceso de predecir el resultado de una decisión ante una incertidumbre. Seguidamente describimos un problema que involucra una gran incertidumbre: la cantidad a producir ante una demanda cambiante.

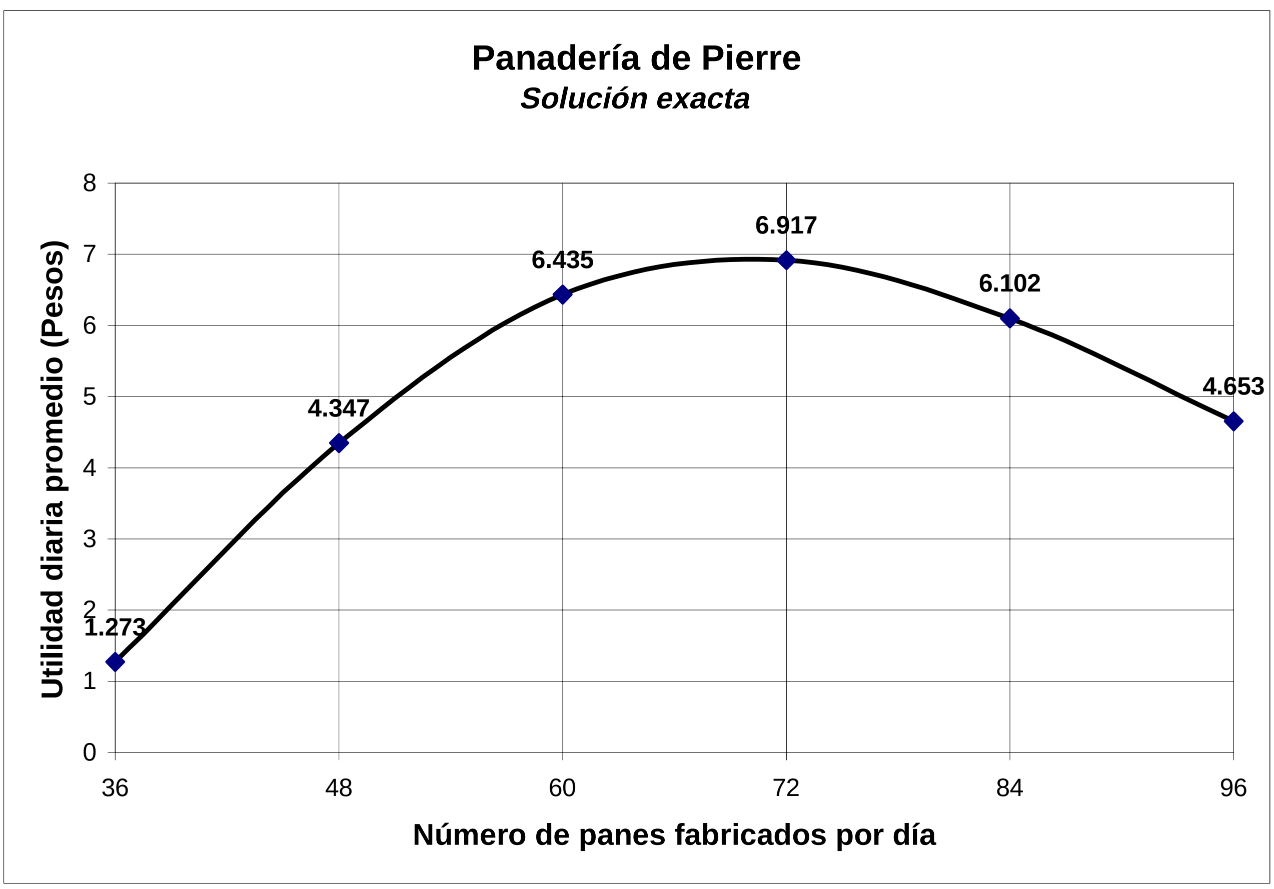
La panadería de Pierre

La panadería de Pierre hace y vende pan francés. Cada mañana, la panadería satisface la demanda del día con pan recién horneado. Pierre puede hacer el pan únicamente en lotes de una docena de panes. Cada pan tiene un costo de fabricación de 25c de peso. Supondremos, por simplicidad, que la demanda diaria total de pan también se presenta en múltiplos de 12. Los datos demuestran que esta demanda varía de 36 a 96 panes diarios. Un pan se vende a 40c de peso y si sobra al final del día se vende a una cocina de beneficencia a un precio de recuperación de 10c de peso por pan. Si la demanda es mayor que la oferta, suponemos que hay un costo de ganancia perdida de 15c de peso/pan, debido a la pérdida de clientes que van con los competidores, etc. Los registros de la panadería muestran que la demanda diaria se puede clasificar en tres tipos: alta, media y baja. Estas demandas se presentan con probabilidades de .30, .45 y .25, respectivamente. La distribución de la demanda por categorías aparece en la Tabla. Pierre quisiera determinar el número óptimo de panes que debe hacer cada día para maximizar la ganancia (ingresos + ingresos de recuperación – costo de fabricación – costo de ingresos perdidos).

	DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD DE DEMANDA		
DEMANDA	***Alta***	***Media***	***Baja***
36	.05	.10	.15
48	.10	.20	.25
60	.25	.30	.35
72	.30	.25	.15
84	.20	.10	.05
96	.10	.05	.05

Solución exacta: Este problema en particular es posible resolverlo en forma exacta. La solución es la siguiente:

Política	**Números de panes hechos diariamente**	**Utilidad diaria promedio (Pesos)**
A	36	1.273
B	48	4.347
C	60	6.435
D	72	6.917
E	84	6.102
F	96	4.653



Distribución del tipo de demanda

TIPO DE DEMANDA	PROBABILIDAD	DISTRIBUCION ACUMULADA	INTERVALO DE NÚMEROS ALEATORIOS	
Alta	0.30	0.30	0	29
Media	0.45	0.75	30	74
Baja	0.25	1.00	75	99

Distribución de demandas por tipo

	DISTRIBUCION DE PROBABILIDAD DE DEMANDA			DISTRIBUCION ACUMULADA			INTERVALO DE NÚMEROS ALEATORIOS					
DEMANDA	Alta	Media	Baja	Alta	Media	Baja	Alta		Media		Baja	
36	0.05	0.10	0.15	0.05	0.10	0.15	0	4	0	9	0	14
48	0.10	0.20	0.25	0.15	0.30	0.40	5	14	10	29	15	39
60	0.25	0.30	0.35	0.40	0.60	0.75	15	39	30	59	40	74
72	0.30	0.25	0.15	0.70	0.85	0.90	40	69	60	84	75	89
84	0.20	0.10	0.05	0.90	0.95	0.95	70	89	85	94	90	94
96	0.10	0.05	0.05	1.00	1.00	1.00	90	99	95	99	95	99

Simulación de Montecarlo

POLITICA: 60 (panes/día) NUMEROS ALEATORIOS: técnica del producto medio modificado

K= 35 K= 65

DIA	NUM. ALEAT. PARA EL TIPO DE DEMANDA	TIPO DE DEMANDA	NUM. ALEAT. PARA LA DEMANDA	DEMANDA	INFRESOS (PESOS)	GANANCIA PERDIDA (PESOS)	VALOR DE RECUPERACION (PESOS)	GANANCIA (PESOS)
1	69	Media	56	60	24.00	0.00	0.00	9.00
2	41	Media	64	72	24.00	1.80	0.00	7.20
3	43	Media	16	48	19.20	0.00	1.20	5.40
4	50	Media	4	36	14.40	0.00	2.40	1.80
5	75	Baja	26	48	19.20	0.00	1.20	5.40
6	62	Media	69	72	24.00	1.80	0.00	7.20
7	17	Alta	48	72	24.00	1.80	0.00	7.20
8	59	Media	12	48	19.20	0.00	1.20	5.40
9	6	Alta	78	84	24.00	3.60	0.00	5.40
10	21	Alta	7	48	19.20	0.00	1.20	5.40
11	73	Media	45	60	24.00	0.00	0.00	9.00
12	55	Media	92	84	24.00	3.60	0.00	5.40
13	92	Baja	98	96	24.00	5.40	0.00	3.60
14	22	Alta	37	60	24.00	0.00	0.00	9.00
15	77	Baja	40	60	24.00	0.00	0.00	9.00
Promedio	**50.80**		**46.13**	**63.20**	**22.08**	**1.20**	**0.48**	***6.36***

Montecarlo en optimización de inventarios

a. Conceptos Básicos de Inventarios

Un inventario es una la lista de bienes que son almacenados por una organización para ser usados en el futuro. Casi todas las empresas mantienen inventarios de uno u otro tipo. Los comercios minoristas llevan en el inventario artículos que ellos planean vender a los consumidores. Las firmas fabricantes tienen inventarios de las existencias de materias primas que son componentes de los bienes producidos. La mayoría de las organizaciones poseen una gran proporción de sus capitales estancados en inventarios, lo cual hace del control de inventario una necesidad básica de la administración.

Debido a que el control de inventario es una inquietud común para una gran variedad de organizaciones, ha sido estudiada por muchos años. De hecho, los modelos de control de inventario fueron desarrollados ya en 1915 por F. W. Harris. El problema del control de inventario es un problema bien estructurado. Esto es, los objetivos son bien conocidos y los medios para la realización de los objetivos están razonablemente bien definidos. Específicamente, el objetivo es minimizar los costos de mantenimiento de un artículo del inventario.

En la práctica, los costos de inventario son agrupados en una de las siguientes categorías:

1. Costo de conservación.
2. Costo de pedido o costo de organización.
3. Costo de faltante.
4. Costo de adquisición.

Los *costos de conservación o mantenimiento* son los costos asociados con la tenencia física del artículo en el depósito. Son incluidos en esta categoría los costos de almacenamiento, seguros, vencimiento, robo, obsolescencia y costo de capital parado. Es usual que el rango de los costos anuales de conservación sea de 15% a 40% de la inversión en inventario.

Los *costos de pedido* incluyen los costos de oficina asociados con el proceso de ordenar una compra, costos de envío y costos de manipulación una vez que el pedido es recibido. Cuando el artículo es producido por la organización en lugar de ser pedido a un proveedor, se incurre en costos de organización de la producción en lugar de los costos de pedido. Los costos de pedido u organización son muy parecidos en su comportamiento, y por simplicidad, nos referiremos sólo como costos de pedido.

El *costo de faltante* ocurre cuando un artículo no está disponible para la demanda. Si el artículo es para venta final al consumidor, el costo faltante incluye la ganancia perdida sobre la venta particular (a menos que el cliente esté dispuesto a ordenar la compra nuevamente, en otras palabras, a esperar), más las potenciales ventas futuras perdidas cuando el cliente decide realizar sus compras a un competidor. Cuando el artículo del inventario es usado en un proceso de producción en lugar de venta final, el artículo faltante rompe la cadena de producción y, por lo tanto, incrementa los costos debido a la disminución de la eficiencia de la producción. De todos los costos, el costo de faltante es el más difícil de estimar.

Los *costos de adquisición* son los costos de compra del artículo y son, por supuesto, muy importantes para la organización. En muchos casos, sin embargo, ellos pueden ser omitidos del análisis, debido a que no se incrementa con las decisiones alternativas. Esto es, ellos no varían con los posibles cursos de acción. Unicamente cuando son discutidas las cantidades los costos de adquisición deben ser incluidos en el análisis.

Lo que hace dificultoso el problema del inventario es que el costo de conservación y los costos de pedido se mueven en direcciones opuestas cuando se cambia la cantidad pedida. Grandes cantidades pedidas disminuyen el número de pedidos colocados por períodos de tiempo, de esta manera se reducen los costos de pedido; pero grandes órdenes de compra también incrementan el balance del inventario promedio y, de ser así, aumentan los costos de conservación. Los costos de faltante tienden a disminuir cuando los pedidos son grandes, pero generalmente están más asociadas al punto de realizar un nuevo pedido que a la decisión de la cantidad a pedir.

Cómo hacer para minimizar los costos de inventario involucra responder las siguientes dos preguntas fundamentales:

1. ¿Cuántos artículos deberían ser pedidos?
2. ¿Cuándo los artículos deberían ser pedidos?

Para artículos con *demanda dependiente*, muchas organizaciones usan sistemas de planificación de requerimiento de materiales (MRP). Demanda dependiente se refiere a la situación donde la demanda de un artículo depende de la demanda de un artículo de nivel superior. Por ejemplo, la demanda de cinturones de seguridad en un nuevo automóvil depende del número de autos producidos. Una vez realizadas las estimaciones para el artículo de mayor nivel y es conocida la *estructura de producto* (qué componentes van en el producto a fabricar), la determinación de la demanda de las partes componentes es relativamente confiable. Por supuesto, en organizaciones que fabrican múltiples productos con varias partes componentes que a su vez se producen en diferentes cantidades y variables a lo largo del tiempo, calcular las cantidades y el momento en el cual se debe hacer el pedido por inventario es un problema complejo. Consecuentemente, las computadoras juegan un papel crítico en esta área, y cuando se habla de un sistema MRP, se está haciendo referencia a un sistema computarizado.

Para los artículos que tienen *demanda independiente* los procedimientos de control de inventario están basados en un enfoque diferente, debido a que los requerimientos de inventarios no están calculados directamente basados en la demanda del artículo de mayor nivel. Dos diferentes métodos son usados comúnmente:

1. Métodos de la cantidad pedida fija.
2. Métodos del período de pedido fijo.

Con los *métodos de la cantidad pedida fija*, basado en análisis anteriores, el número de artículos a pedir a la vez es fijo (por ej. 100 unidades), pero el momento de colocar la orden de compra varía con la demanda. Sólo cuando el número de unidades remanentes en el inventario cae por debajo del punto de repedido o “gatillo”, se realiza un pedido. Con *los métodos del período de pedido fijo*, basado en análisis anteriores, el lapso para colocar una orden de compra es fijo (por ej. cada 2 semanas), pero el tamaño del pedido colocado depende del número de artículos remanentes en el inventario. Ambos de estos métodos intentan responder las preguntas en las que se basa el control de inventario: “Cuánto” y “Cuándo”. Para cada método una gran cantidad de modelos han sido desarrollados, los cuales varían en sus suposiciones. Algunos modelos son determinísticos y otros son probabilísticos; algunos asumen pedidos anteriores y otros no; algunos son para situaciones en donde el artículo es producido para el inventario y en otras situaciones éste es pedido.

b. Un modelo de cantidad pedida fija

Como una ilustración de los modelos de inventario, consideraremos el desarrollo y uso de un modelo simple de cantidad pedida fija. El objetivo será determinar una cantidad a pedir óptima, Q_{opt}, y el punto de repedido, R. El modelo resultante será un típico modelo de los varios existentes de este tipo determinístico. En estos modelos se hacen varias suposiciones acerca de los sistemas del mundo real y han sido desarrollados usando técnicas de matemática tradicional (álgebra simple y cálculo diferencial).

Considere una situación en donde podemos asumir que la demanda para el artículo es conocida con certeza (conocimiento perfecto) y es constante a través del tiempo (sin factores de demanda estacional). Además, el tiempo de entrega o aprovisionamiento es también conocido con certeza. Aún cuando estas hipótesis sean bastantes exigentes y en muchos casos son suposiciones irreales, ellas son típicas de muchos modelos de control de inventario. Admitamos estas suposiciones al menos por el momento, note que en la siguiente figura se describe el comportamiento y luego el repedido de los artículos del inventario. En el tiempo=0 arriba un pedido por Q artículos, resultando en un balance de inventario de Q. Este inventario es consumido a un ritmo constante conocido a lo largo del tiempo. Eventualmente, el punto de repedido R, es alcanzado y un pedido es colocado para Q unidades más. A partir de ahí, como el tiempo de entrega L es conocido con certeza, el punto de repedido puede ser fijado de manera tal que el último artículo remanente en el inventario sea usado justo cuando el nuevo pedido es recibido. El arribo de los artículos ordenados incrementa el balance del inventario a Q unidades y el proceso se repite en sí mismo.

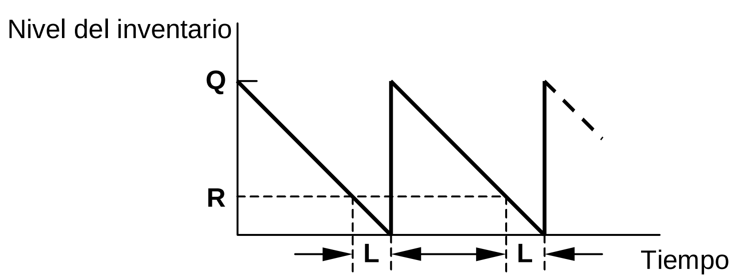


Figura : Cantidad en inventario en función del tiempo

Asumiendo una demanda conocida D, por unidad de tiempo, un costo de conservación K_C, por artículo por unidad de tiempo, y un costo de pedido K_O, por pedido, uno puede encontrar el valor Q que minimice el costo total de inventario TC. No hay necesidad de considerar los costos de faltante ya que debido a la suposición de certeza sobre la demanda y tiempo de entrega no existe posibilidad de escasez del producto. Debido a que no hay descuentos por cantidad, los costos de adquisición pueden ser ignorados debido a que no son relevantes respecto de las decisiones alternativas.

Primero consideraremos el costo de conservación total. El mayor número de artículos en el inventario es Q y el menor en 0. Debido a que la demanda es constante, el nivel de inventario promedio es (Q + 0)/2, o Q/2. Si K_C es el costo de conservación por artículo, el costo de conservación total para un promedio de Q/2 artículos debe ser:

$$K_C \frac{Q}{2}$$

Si D es la demanda por unidad de tiempo y Q unidades son pedidas al mismo tiempo, D/Q es el número de pedidos colocados por unidad de tiempo. Cuando el costo por orden es K_O, el *costo de pedido total* es:

$$K_O \frac{D}{Q}$$

El costo de inventario total, TC, es la suma de los costos de conservación y pedido.

$$TC = K_C \frac{Q}{2} + K_O \frac{D}{Q}$$

Para encontrar el valor de Q que minimiza TC, se debe primero derivar TC con respecto a Q:

$$\frac{\partial TC}{\partial Q} = \frac{K_C}{2} - \frac{K_O D}{Q^2}$$

Esta expresión es entonces igualada a cero y se despeja Q para encontrar el valor que minimiza TC.

$$\frac{K_C}{2} - \frac{K_O D}{Q^2} = 0$$

$$Q_{opt} = \sqrt{\frac{2K_O D}{K_C}}$$

Esta fórmula puede ser usada para determinar el número óptimo de artículos a pedir por inventario cuando la demanda, costos de conservación, y costos de pedido son conocidos y las hipótesis subyacentes al modelo son satisfechas. El siguiente ejemplo ilustra el uso del modelo.

Si D = 1000 unidades por año
K_C = \$4 por artículo por año
K_O = \$20 por pedido

$$Q_{opt} = \sqrt{\frac{2 \cdot 20 \cdot 1000}{4}} = 100\ unidades\ por\ pedido$$

Con esta cantidad pedida resulta el siguiente costo anual promedio (excluyendo, por supuesto, los costos de adquisición).

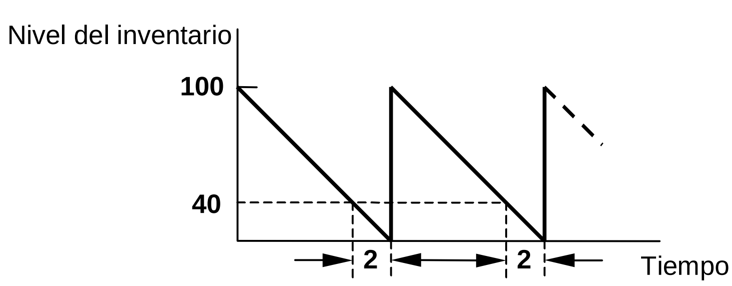
$$TC = \frac{4 \cdot 100}{2} + \frac{20 \cdot 1000}{100} = \$400$$

Para poder determinar el punto de repedido, se debe encontrar sólo el promedio de salida del artículo por semana, *d*, y entonces multiplicar este factor por el tiempo de entrega, L, expresado en semanas.

R=*d*·L

Si el tiempo de entrega es de dos semanas (L=2), la demanda es todavía de 1000 unidades por año y si la firma opera 52 semanas por año, el punto de repedido sería:

$$R = \frac{1000 \cdot 2}{52} \cong 40\ unidades$$



Los modelos de inventario de cantidad pedida fija y período de pedido fijo, de rápida construcción, son usados comúnmente en la industria para artículos con demanda independiente y generalmente produce resultados satisfactorios. Una aproximación completamente diferente, no obstante, es desarrollar un modelo adaptado al consumidor que capture la mayor complejidad del mundo real asociado con el mantenimiento de un artículo del inventario en particular. La única dificultad al sumar más realismo y complejidad al modelo, es que los métodos analíticos tradicionales de análisis pueden rápidamente transformarse en prohibitivamente dificultosos de aplicar, aún para profesionales de las matemáticas y estadísticas. Consecuentemente, si la mayor complejidad es requerida y justificada, el análisis debe a menudo cambiar de un modo de análisis analítico a uno numérico. La simulación de inventario Montecarlo, el cual es presentado a continuación, es un ejemplo de una aproximación numérica al problema del inventario.

c. Simulación de inventario Montecarlo

En la simulación de inventario Montecarlo, la demanda y el tiempo de entrega son tratados probabilísticamente, requiriendo que las distribuciones de probabilidad sean especificada para cada variable. Las distribuciones de probabilidades pueden ser determinadas por varios caminos. Un camino es analizar los datos históricos del pasado; para varios artículos del inventario, cuando exista una gran cantidad de datos confiables. Por ejemplo, asumamos que los datos de la Tabla 1 son relevantes Estas *distribuciones de frecuencia* muestra la frecuencia con la cual varios niveles de demanda y tiempos de entrega han sido experimentados por la organización.

Tabla 1: Datos de demanda y tiempos de entrega

Demanda por semana	Frecuencia	Tiempo de entrega, semanas	Frecuencia
0	5	1	4
1	10	2	4
2	15	3	2
3	12		10
4	8		
	50		

Al hacer esto esperamos que el futuro sea como el pasado. Los datos históricos pueden ser usados directamente en la formulación de las probabilidades. La *frecuencia relativa* para cada variable debe ser calculada y entonces *tratadas como una probabilidad*. Esta transformación es obtenida dividiendo la frecuencia en cada categoría por el número total de observaciones, como se ilustra en la Tabla 2 y 3.

Como se dijo, esta aproximación asume para las distribuciones de probabilidad específica que el futuro será como el pasado. Cuando la gerencia de la organización sabe que este no es el caso, las probabilidades deben ser ajustadas para reflejar el presentimiento subjetivo de la gerencia a cerca de cómo el futuro diferirá del pasado. Desgraciadamente, prácticamente no existe una guía de cómo hacer estos ajustes. En algunos casos este puede ser el único método posible ya que el artículo del inventario bajo consideración es uno nuevo en la lista de artículos inventariados mantenidos por la organización, y todas las estimaciones probabilísticas serán altamente subjetivas. A pesar de que la mayoría de las personas se sienten disconformes con las probabilidades subjetivas, se deben tomar decisiones; ya que estimaciones subjetivas razonadas cuidadosamente son mejores que no tener ninguna estimación.

d. La simulación

Cuando se realiza una simulación de inventario por Montecarlo, se debería preparar una planilla de cálculo como se muestra en la Tabla 4. Este tipo de simulación puede ser usado para investigar las consecuencias de varias combinaciones de cantidades a pedir Q y punto de repedido R. En nuestro ejemplo Q=6 y R=3. Posteriormente discutiremos los resultados de simular otras combinaciones de Q y R.

Antes de iniciar el análisis, necesitamos estimar los costos de conservación, pedido y faltante. Asumiremos que los costos de conservación son de $4 por artículo por semana cuando se calcula en base al “balance de fin de semana”. Consecuentemente, si una semana finaliza con tres artículos remanentes en el inventario, los costos de conservación para esa semana son de 3 x $2 = $6. Los costos de pedido son estrictamente una función del número de pedidos colocados, y son de $30 por pedido. Estos costos son registrados en la semana en la cual el pedido es colocado. Asumiremos que los pedidos arriban al inicio de la semana y están disponibles para la venta durante la semana. Los costos de faltante son de $20 por cada artículo no disponible cuando es demandado, y en este caso asumiremos que el consumidor no desea esperar para realizar un nuevo pedido. Al final de este capítulo consideraremos el caso de repetición del pedido en la simulación.

Nuestra simulación se inicia con un balance de inventario asumido de seis unidades disponibles en la semana 0. Esta *condición inicial* de seis unidades refleja la cantidad pedida que será simulada y es similar a lo que vimos al simular con el modelo de cantidad pedida fija donde se asumió que en el tiempo = 0 arriba un pedido de Q unidades. Esta condición inicial, es decir iniciar con el arribo de un pedido, es la más usada en este tipo de simulación.

Nuestra simulación usará un *incremento de tiempo fijo* de avance. La conducta del sistema es observada en forma semanal, es decir el modelo se mueve de semana en semana. Estos modelos se denominan *modelos de simulación estáticos*. Esta aproximación contrasta con el tiempo de avance denominado *próximo evento*, donde el modelo se mueve de evento a evento independientemente de cuan cerca o lejos los eventos estén en el tiempo como lo veremos al estudiar *los modelos de línea de espera o cola*. Este segundo tipo de modelos se denominan *modelos de simulación dinámicos*
.

Tabla 2: Distribución de la Demanda

DEMANDA POR SEMANA	FRECUENCIA	PROBABILIDAD	DISTRIBUCION ACUMULADA	INTERVALO DE NÚMEROS ALEATORIOS	
0	5	0.10	0.10	0	9
1	10	0.20	0.30	10	29
2	15	0.30	0.60	30	59
3	12	0.24	0.84	60	83
4	8	0.16	1.00	84	99
SUMA	**50**	**1**			

Tabla 3: Distribución del Tiempo de Entrega

T. DE ENTREGA, SEMANAS	FRECUENCIA	PROBABILIDAD	DISTRIBUCION ACUMULADA	INTERVALO DE NÚMEROS ALEATORIOS	
1	4	0.40	0.40	0	39
2	4	0.40	0.80	40	79
3	2	0.20	1.00	80	99
SUMA	**10**	**1**			

Tabla 4: SIMULACION DE MONTECARLO

POLITICA: **Q = 6**
R = 3

NUMEROS ALEATORIOS: de tabla

	Cálculo de la demanda		*Cálculo del T. de Entrega*		*Actividad Simulada*				*Costos Simulados*			
Tiempo	**NUM. ALEAT.**	**Demanda**	**NUM. ALEAT.**	**Tiempo de Entrega**	**Pedido Colocado**	**Pedido Recibido**	**Balance**	**Articulos no Vendidos**	**Conservación $2**	**Pedido $30**	**Faltante $20**	**Total**
0							6					
1	69	3	64	2	6		3	0	6	30	0	**36**
2	73	3					0	0	0	0	0	**0**
3	16	1				6	5	0	10	0	0	**10**
4	65	3	39	1	6		2	0	4	30	0	**34**
5	1	0				6	8	0	16	0	0	**16**
6	71	3					5	0	10	0	0	**10**
7	91	4	19	1	6		1	0	2	30	0	**32**
8	99	4	69	2	6	6	3	0	6	30	0	**36**
9	18	1					2	0	4	0	0	**4**
10	33	2				6	6	0	12	0	0	**12**
11	65	3	34	1	6		3	0	6	30	0	**36**
12	86	4				6	5	0	10	0	0	**10**
13	94	4	91	3	6		1	0	2	30	0	**32**
14	39	2					0	1	0	0	20	**20**
15	38	2					0	2	0	0	40	**40**
16	84	4	42	2	6	6	2	0	4	30	0	**34**
17	45	2					0	0	0	0	0	**0**
18	91	4	25	1	6	6	2	0	4	30	0	**34**
19	3	0				6	8	0	16	0	0	**16**
20	81	3					5	0	10	0	0	**10**
Promedio	58.10	2.60	47.88	1.63	6	6	3.05	0.15	6.10	12.00	3.00	**21.10**

En la hoja de cálculo de la Tabla 4 la simulación se extiende a través de 20 semanas. Basados en las 20 semanas de actividad simulada, es posible estimar el costo semanal medio asociado con la política de pedir seis unidades cuando el nivel de inventario cae a tres o menos. Esto lo obtenemos sumando el total de costos y dividiendo por el total de semanas. Para nuestra simulación, el costo medio será:

$$\overline{X} = \frac{422}{20} = \$21.10$$

e. Análisis para optimización

Normalmente se asocia que el propósito de la simulación de modelos es la de *describir* el sistema que está siendo analizado; no obstante, mediante una manipulación inteligente del modelo, es algunas veces posible determinar los puntos *óptimos*. La simulación de inventario de Montecarlo provee un buen ejemplo. La simulación presentada en la Tabla 4 fue para una combinación Q=6 y R=3. Mediante la simulación, uno puede analizar el comportamiento del costo del sistema cuando se sigue una política de inventario de pedir seis unidades cuando el balance del inventario cae a tres unidades. A pesar de esta útil información, la simulación no nos revela que combinación de Q y R minimiza los costos de inventario. Solamente simulando alternativamente varias combinaciones de Q y R puede ser obtenida este tipo de información.

Es útil visualizar el costo semanal medio resultante de varias combinaciones de Q y R, en términos de un gráfico de superficie, tal como se muestra en la Figura 5.

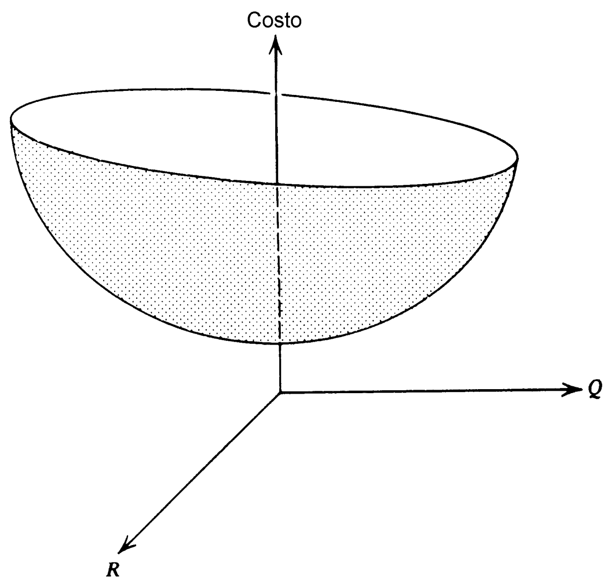


Figura 5: Costo en función de Q y R

Nuestro objetivo es encontrar el punto más profundo del valle sobre la superficie. Aunque es posible simular una combinación de Q y R a mano, un análisis computarizado se transforma en mandatorio cuando son analizados múltiplos Q y R. El diagrama de flujo de la Figura 6 es apropiado para desarrollar un modelo computarizado.

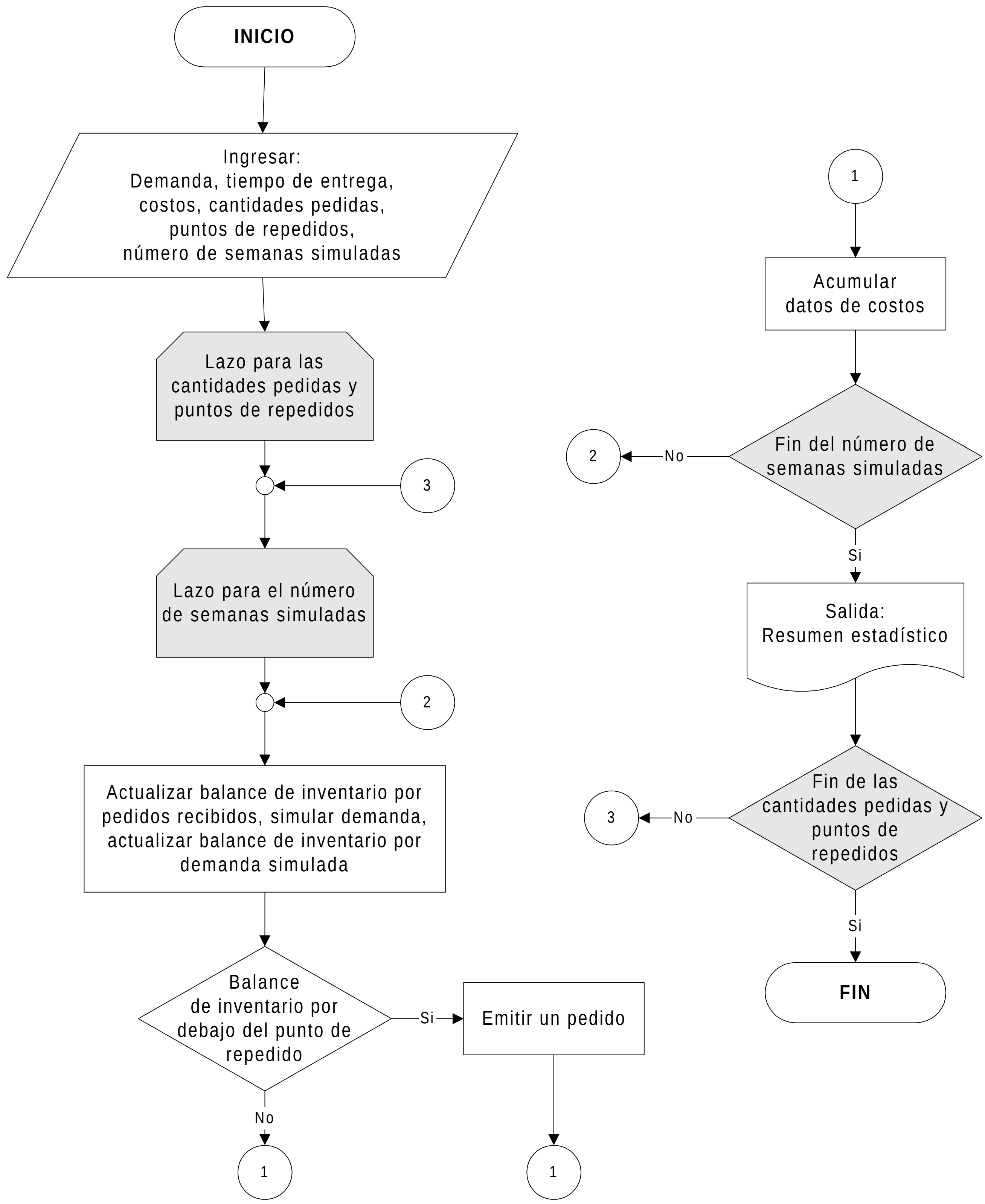
Luego de correr nuestro ejemplo, se presenta en la siguiente tabla una matriz de resultados de diferentes combinaciones de Q y R analizadas. Las filas de la matriz son los Q, y las columnas los R, y los elementos de la matriz los costos semanales medios.

		R				
		1	**2**	**3**	**4**	**5**
	6	22.185	20.760	20.180	20.975	21.465
	7	21.415	19.465	18.895	19.560	21.090
	8	20.750	19.185	18.935	19.190	19.955
Q	**9**	20.145	19.315	19.010	19.665	20.270
	10	19.560	18.950	**18.360**	19.635	21.190
	11	20.125	18.545	19.570	19.595	21.070
	12	20.430	19.140	19.015	20.655	21.010

De la matriz se puede ver que para nuestro ejemplo, una combinación de Q=10 y R=3 aparece como óptima.

En el desarrollo del gráfico de costos para propósitos de comparación, debería utilizarse los mismos juegos de números aleatorios para la obtención de la demanda y tiempos de entrega. Esto significa que las diferentes combinaciones alternativas de Q y R son todas expuestas a los mismos valores para las variables de entrada. Este procedimiento de usar los mismos números aleatorios para las variables de entrada cuando se comparan diferentes configuraciones de un sistema o diferentes políticas de decisión se denomina *duplicación de condiciones experimentales*. Este procedimiento permite detectar diferencias entre alternativas con corridas de pequeñas dimensiones.

Figura 6: Diagrama de flujo para una simulación de inventario Montecarlo



f. Sumando mayor realismo

En nuestra simulación de inventario por Montecarlo la demanda y el tiempo de entrega fueron tratadas como variables aleatorias, creándose, por lo tanto, unas condiciones más aproximadas a lo que ocurre en el mundo real. Si bien se requirió de un gran número de cálculos, todos ellos fueron relativamente simples de realizar. Si aceptamos sumar más cálculos simples a nuestro sistema, se puede realizar todavía una mejor representación del mundo real.

La simulación de inventario de Montecarlo, no incluyó ninguna consideración respecto de la demanda estacional; todos los niveles de demanda fueron tomados de la misma distribución de demanda. Obviamente, existen muchas situaciones en donde la demanda de un artículo del inventario es estacional. Por ejemplo, la mayoría de los comercios minoristas experimentan una fuerte demanda antes y durante las fiestas de fin de año. No existen razones para que la misma distribución de demanda (o tiempos de entrega) deban ser usados para todas las semanas de la simulación. Si los datos empíricos o evaluaciones subjetivas sugieren que son necesarias diferentes distribuciones para ciertos períodos del año, el esquema de simulación provee esta flexibilidad sin afectar apreciablemente la complejidad del análisis.

Otra posibilidad del mundo real es que en algunos de los pedidos ingresen artículos defectuosos y, por lo tanto, no estarán disponibles para la venta o el uso. En este caso es posible preparar una distribución de probabilidad para el número de artículos defectuosos en un envío y entonces se toma una muestra de esta distribución cuando un pedido arriba. La simulación reflejará el número de artículos que están realmente disponibles para el uso. Por supuesto, si sumamos realismo se incrementará el número de cálculos requeridos, pero no demandará ninguna tecnología más sofisticada de la que ya hemos aprendido.

Como ejemplo final de cómo hacer nuestra simulación más realista, considere la posibilidad de que un cliente repita un pedido o, en otras palabras, espere que arribe un pedido luego de que existiera un faltante del artículo. En algunos casos un cliente acepta repetir el pedido, dependiendo de factores tales como la rapidez con la que necesita el artículo, la disponibilidad de proveedores alternativos, y cosas como esas. Si puede ser desarrollada una distribución de probabilidad de disponibilidad del consumidor a repetir un pedido, siempre que ocurra un faltante de inventario, se puede simular e incluir en el análisis la pregunta de que si el consumidor está dispuesto o no a repetir la orden de compra.

De estos ejemplos se puede ver que prácticamente cualquier grado de realismo puede ser incluido en un modelo de simulación. El grado en el cual un modelo debería capturar las riquezas de las situaciones del mundo real depende, de cualquier modo, de muchos factores, incluyendo la intensidad de uso del modelo, los recursos disponibles para desarrollar el modelo, el costo de desarrollo, ensayo e implementación del modelo, y cosas de ese tipo.

El punto principal de todo esto, es que la simulación frecuentemente provee una metodología para modelar sistemas complejos que pueden ser prohibitivamente dificultosos o imposible de analizar con otros métodos alternativos.

Referencia: “COMPUTER SIMULATION”; Hugh J. Watson – John H. Blackstone, Jr.; University of Georgia; 1989.