



Maestría en Ciencias de la Ingeniería
Mención Aeroespacial
MECANICA DE LOS FLUIDOS AVANZADA



TRABAJO FINAL

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA CAPA LIMITE BIDIMENSIONAL LAMINAR INCOMPRESIBLE ESTACIONARIA

AUTORES: **Ing. Alejandra Rizzo**
 Ing. Gustavo H. Scarpin

PROFESOR: **Dr. Sergio Elaskar**

Córdoba, 10 de diciembre de 2001



Maestría en Ciencias de la Ingeniería
Mención Aeroespacial
MECANICA DE LOS FLUIDOS AVANZADA



INDICE

RESUMEN	3
SISTEMA DE REFERENCIA Y CONVENCION DE SIGNOS	4
1. INTRODUCCION	5
2. DESARROLLO	5
2.1. Modelo Físico: Planteo de las ecuaciones de capa límite	5
2.2. Modelo Matemático: Modelo e Diferencia Finita Implícito	10
3. RESULTADOS	11
3.1 Validación	11
3.1.1. Comparación con otros software	11
3.1.1.1. Modelo de Diferencia Finita Explícito	12
3.1.1.2. Método de Diferencia Finita "Totalmente Implícito"	12
3.1.2. Comparación con resultados analíticos	13
3.1.2.1. Solución de Blasius	13
3.1.2.1.1. Descripción	13
3.1.2.1.2. Comparación	15
3.1.2.2. La placa plana con succión uniforme	18
3.1.2.2.1. Descripción	18
3.1.2.2.2. Comparación	18
3.1.2.3. Cilindro circular	20
3.1.2.3.1. Descripción	20
3.1.2.3.2. Comparación	21
3.1.2.4. Predicción del punto de separación laminar	23
3.1.2.4.1. Descripción	23
3.1.2.4.2. Comparación	23
3.1.3. Aplicación al flujo linealmente desacelerado de Howarth	25
3.1.3.1. Descripción	25
3.1.3.2. Comparación	25
4. CONCLUSIONES	29
5. REFERENCIAS	29



Maestría en Ciencias de la Ingeniería
Mención Aeroespacial
MECANICA DE LOS FLUIDOS AVANZADA



ANEXO A: PROGRAMA CaLi – MANUAL DE USUARIO	30
ANEXO B: PROGRAMA Clexp – MANUAL DE USUARIO	39
ANEXO C: PROGRAMA Fimp – MANUAL DE USUARIO	42

LISTADO DE FIGURAS

FIGURA 1: Sistema de referencia y convención e signos	4
FIGURA 2: Solución de Blasius para la capa límite sobre una placa plana. Distribución de velocidad longitudinal u (dirección X)	16
FIGURA 3: Solución de Blasius para la capa límite sobre una placa plana. Distribución de velocidad transversal v (dirección Y)	16
FIGURA 4: Solución de Blasius para la capa límite sobre una placa plana. Distribución de tensión de corte sobre la pared	17
FIGURA 5: Solución de Blasius para la capa límite sobre una placa plana. Distribución de coeficiente de fricción sobre la pared	17
FIGURA 6: Placa plana con succión uniforme Perfil de velocidad longitudinal calculado con CaLi	19
FIGURA 7: Placa plana con succión uniforme Perfil de velocidad longitudinal calculado por Iglisch	19
FIGURA 8: Comparación entre flujo potencial y real de un cilindro	20
FIGURA 9: Capa límite sobre un cilindro calculado por White (Ref. [1])	21
FIGURA 10: Capa límite sobre un cilindro calculado con CaLi	22
FIGURA 11: Predicción del punto de separación laminar – Programa CaLi	24
FIGURA 12: Perfil de velocidad – Flujo de Howarth – Calculado con CaLi	26
FIGURA 13: Perfil de velocidad – Flujo de Howarth – Calculado por el autor	26
FIGURA 14: Distribución de C_f – Flujo de Howarth – Calculado con CaLi	27
FIGURA 15: Distribución de C_f – Flujo de Howarth (Figura 7-14 Ref. [1])	27
FIGURA 16: Distribución de C_f – Flujo de Howarth – Calculado con CaLi	28
FIGURA 17: Distribución de C_f – Flujo de Howarth (Figura 4-26 Ref. [1])	28



TRABAJO FINAL

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA CAPA LIMITE BIDIMENSIONAL LAMINAR INCOMPRESIBLE ESTACIONARIA

FLUJO DE HOWARD

Por:

Ing. Alejandra Rizzo
Ing. Gustavo Scarpin

RESUMEN

Con el objetivo de conocer el comportamiento de la capa límite laminar sometida a un gradiente de presión adverso dado por el flujo de Howarth, se procedió a confeccionar un programa de cómputos general que permite resolver las ecuaciones de capa límite laminar incompresible estacionaria con succión sobre la pared y sometida a gradientes de presión arbitrarios.

El programa, presentado en el Anexo A, fue validado analizando capa límites resueltas analíticamente y con los resultados obtenidos mediante otros softwares.

Finalmente se analizó el comportamiento de la capa límite sometida a un flujo del tipo propuesto por Howarth.

Los resultados obtenidos se comparan satisfactoriamente con los presentados en la literatura.

Córdoba, 10 de diciembre de 2001

<i>Alejandra Rizzo</i> <i>Gustavo Scarpin</i>	Página 3	Fecha 15/03/2002
--	-------------	---------------------



SISTEMA DE REFERENCIA Y CONVENCION DE SIGNOS

En el siguiente esquema se presenta la convención de signos y las condiciones de contorno utilizados en el modelo de capa límite analizado en este informe.

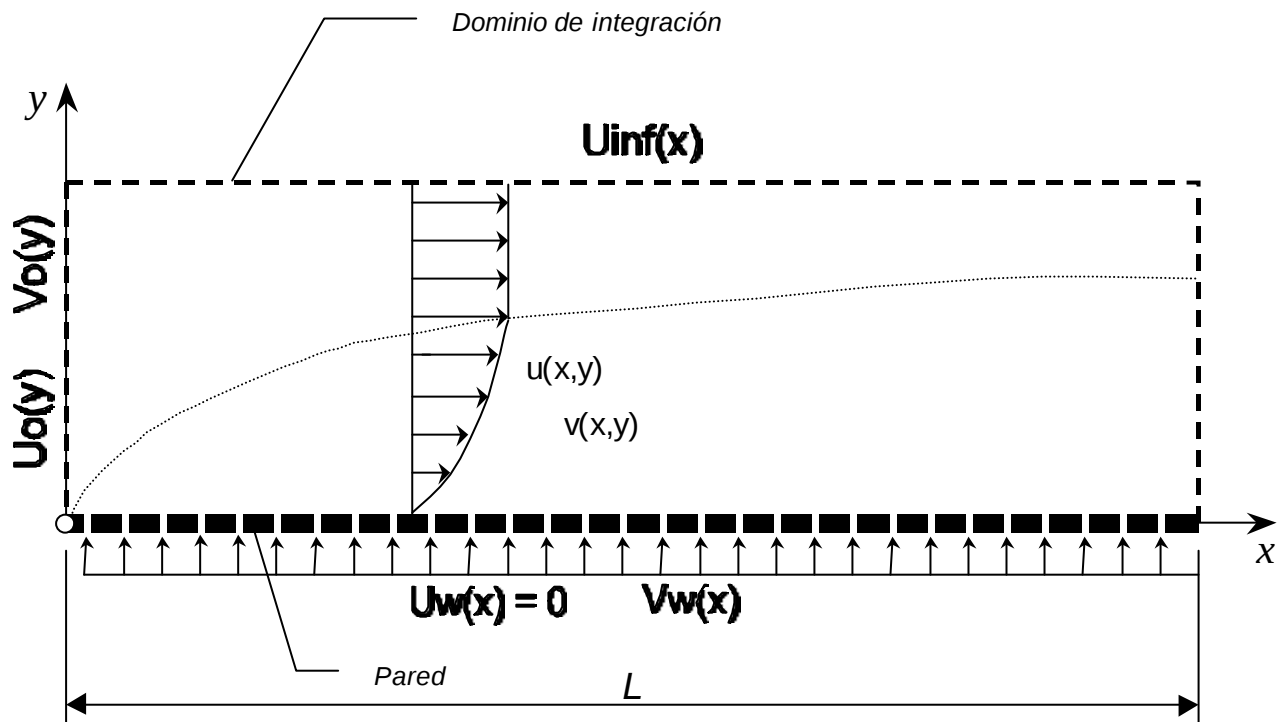


FIGURA 1: Sistema de referencia y convención de signos



Maestría en Ciencias de la Ingeniería
Mención Aeroespacial
MECANICA DE LOS FLUIDOS AVANZADA



1. INTRODUCCION

Este informe es generado como trabajo final de la materia Mecánica de los Fluidos Avanzada correspondiente a la Maestría en Ciencias de la Ingeniería, y tiene por objetivo el estudio de la capa límite laminar bidimensional incompresible estacionaria que se genera cuando un flujo con gradiente de presión adverso del tipo propuesto por Howarth (1938) es inducido sobre una placa plana.

La idea de separar el estudio del fluido en dos partes, una capa tenue en las inmediaciones del cuerpo (capa límite), en la cual el rozamiento juega un papel esencial, y el resto del fluido, en el que se puede prescindir del rozamiento, se debe a L. Prandtl, quien presentó esta conclusión en el Congreso Matemático de Heidelberg en 1904 en su conferencia "Sobre movimientos fluido con muy poco rozamiento".

A partir del trabajo de Prandtl se sentaron las bases para el estudio teórico de lo que se llamó *capa límite de Prandtl* o *capa de rozamiento*. Estos estudios se basan en el análisis integral de Kármán (1921), soluciones de similitud Blasius (1908) – Falkner y Skan (1931), etc.), expansión de series (Howarth (1938), Görler (1957), etc.), método integral aproximado (Thwaites (1949), Rosenhead (1963), etc.) y modelos numéricos resueltos mediante computadoras (Crank-Nicolson (1947), Spalding (1977), Keller (1978), etc.).

Los métodos integrales son fáciles de usar pero limitados en su precisión. Las soluciones de similitud son precisas pero limitadas en aplicabilidad. Si uno desea hacer un estudio general de capa límite para cualquier condición de flujo y de desea gran precisión el único método que existe es el estudio mediante modelos numéricos.

En este trabajo se presenta un método numérico de solución implícita de las ecuaciones de capa límite laminar incompresible estacionaria según el algoritmo de inversión de matriz tridiagonal (TDMA) propuesto por Patankar (1980).

2. DESARROLLO

2.1. Modelo Físico: Planteo de las ecuaciones de la capa límite

Considérese el caso de pequeña viscosidad o de número de Reynolds muy grandes. Prandtl demostró que la viscosidad es decisiva para grandes números de Reynolds y cómo se pueden simplificar las ecuaciones de Navier-Stokes para este caso límite y obtener soluciones aproximadas. Las simplificaciones que se obtienen en el caso de fuerza de viscosidad muy pequeñas se puede deducir por vía físicamente intuitiva. En este caso las fuerzas de inercia prevalecen en el interior del fluido, mientras que los efectos de la viscosidad aquí casi desaparecen.

Alejandra Rizzo Gustavo Scarpin	Página 5	Fecha 15/03/2002
------------------------------------	-------------	---------------------



Maestría en Ciencias de la Ingeniería
Mención Aeroespacial
MECANICA DE LOS FLUIDOS AVANZADA



Considérese la corriente plana de un fluido con pequeña viscosidad alrededor de un cuerpo afilado. El cuadro de líneas de corriente e incluso la distribución de velocidades coinciden ampliamente con las de una corriente sin rozamiento. Sin embargo junto a la superficie el fluido no se desliza como la corriente potencial, sino que se detiene. La transición de la velocidad nula, junto a la pared, a la plena velocidad a cierta distancia del cuerpo, se verifica dentro de una capa muy delgada, la llamada capa límite. En esta se distinguen dos regiones:

1. Una capa muy delgada en contacto inmediato con el cuerpo, dentro de la cual el gradiente de velocidad en dirección perpendicular a la pared es muy grande.
2. El resto del campo, fuera de esta capa, donde no aparece un gradiente de velocidad tan grande, y donde, por consiguiente, el efecto de la viscosidad resulta sin importancia.

En general, puede decirse que la capa límite es tanto más delgada cuanto menor es la viscosidad, o dicho en otras palabras, cuanto mayor es el número de Reynolds. Fundándose en algunas soluciones exactas de las ecuaciones de Navier-Stokes, se puede afirmar que el espesor de la capa límite es proporcional a la raíz cuadrada de la viscosidad cinemática:

$$\delta \propto \sqrt{\nu} \quad (1)$$

En lo sucesivo se admitirá, dada las simplificaciones que se deben introducir en las ecuaciones de Navier-Stokes, que el espesor de la capa límite es muy pequeño en comparación con una dimensión L del cuerpo, que queda pendiente de definición mas precisa

$$\delta \ll L \quad (2)$$

Las soluciones de capa límite tienen, pues, carácter asintótico para grandes números de Reynolds.

Veamos las simplificaciones de las ecuaciones de Navier- Stokes para la capa límite. Para ello, vamos a considerar para cada término de estas ecuaciones su orden de magnitud. En primer lugar supondremos el problema como bidimensional. Reducimos las ecuaciones de Navier-Stokes a forma adimensional, dividiendo todas las velocidades por la velocidad V de la corriente general y todas las longitudes por una longitud característica L , escogida de tal manera que el gradiente sin dimensiones $\partial u / \partial x$, dentro del dominio considerado no sobrepase el orden de magnitud 1. La presión se habrá hecho adimensional con ρV^2 y el tiempo con L/V . Además el número de Reynolds se expresa por:

$$\text{Re} = \frac{VL\rho}{\mu} = \frac{VL}{\nu} \quad (3)$$

que, según nuestras hipótesis debe ser muy grande. Con esto las ecuaciones de Navier-Stokes para el problema plano son:

Alejandra Rizzo Gustavo Scarpin	Página 6	Fecha 15/03/2002
------------------------------------	-------------	---------------------



Maestría en Ciencias de la Ingeniería
Mención Aeroespacial
MECANICA DE LOS FLUIDOS AVANZADA



Dirección x:
$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (4)$$

$\frac{1}{\delta} \quad \frac{1}{\delta} \quad \frac{1}{\delta} \quad \frac{1}{\delta} \quad \frac{1}{\delta^2} \quad \frac{1}{\delta^2}$

Dirección y:
$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (5)$$

$\frac{1}{\delta} \quad \frac{1}{\delta} \quad \frac{1}{\delta} \quad \frac{1}{\delta} \quad \frac{1}{\delta^2} \quad \frac{1}{\delta^2}$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

$\frac{1}{\delta} \quad \frac{1}{\delta}$

Las condiciones de contorno son detención del fluido junto a la pared:

$$u = v = 0, \text{ para } y = 0$$

y

$$u = U, \text{ para } y \rightarrow \infty$$

de acuerdo con la hipótesis hecha sobre el espesor de la capa límite, el espesor sin dimensiones con relación a la longitud L , que continuaremos designando como δ , será muy pequeña con relación a la unidad ($\delta \ll 1$).

Ahora examinaremos cada término con el objeto de despreciar los términos numéricamente pequeños y llegar así a las simplificaciones de las ecuaciones. De la ecuación de continuidad resulta, ya que $\partial u / \partial x$ es de orden de magnitud 1, que también $\partial v / \partial y$ es de orden 1; luego en la capa límite v es del orden de magnitud de δ , ya que junto a la pared es $v = 0$. Por lo tanto, también $\partial v / \partial x$ y $\partial^2 v / \partial x^2$ son del orden de magnitud de δ . Además $\partial^2 u / \partial x^2$ es de orden de magnitud 1. (Los ordenes de magnitud expresados están escrito debajo de las ecuaciones).

Admitiremos que la aceleración no estacionaria $\partial u / \partial t$ es del mismo orden de magnitud que la aceleración convectiva $u \partial u / \partial x$. Esto significa que las aceleraciones bruscas, como las que se presentan, por ejemplo, con fuertes ondas de presión, quedan excluidas. Según nuestras consideraciones anteriores, pese a la pequeñez de $1/\text{Re}$, por lo menos algunos términos de rozamiento, en la proximidad inmediata de la pared, deben ser del mismo orden de magnitud que los términos de inercia. También algunas de las segundas derivadas de la velocidad, en la capa en contacto con la pared, deben ser muy grandes. Según lo dicho antes, éstas sólo pueden ser $\partial^2 u / \partial y^2$ y $\partial^2 v / \partial y^2$. Como la componente de velocidad paralela a la pared, en el estrecho espacio δ sube desde cero junto a la pared, hasta el valor 1 de la corriente general, se tiene:



Maestría en Ciencias de la Ingeniería
Mención Aeroespacial
MECANICA DE LOS FLUIDOS AVANZADA



$$\frac{\partial u}{\partial y} \propto \frac{1}{\delta} \quad \text{y} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \propto \frac{1}{\delta^2} \quad (7)$$

mientras que $\partial v / \partial x \propto \delta / \delta \propto 1$, y $\partial^2 v / \partial y^2 \propto 1 / \delta$. Introduciendo estas condiciones en las ecuaciones (4) Y (5) se ve, según la primera ecuación del movimiento, que la fuerza de rozamiento en la capa límite sólo llega al orden de magnitud de las fuerzas de inercia cuando el número de Reynolds es del orden de magnitud $1 / \delta^2$:

$$\frac{1}{\text{Re}} = \delta^2 \quad (8)$$

la primera ecuación se puede simplificar para grandes números de Reynolds, ya que entonces $\partial^2 u / \partial x^2$ se puede despreciar frente a $\partial^2 u / \partial y^2$.

La tercera ecuación, la ecuación de continuidad, permanece invariable para grandes Re. La segunda ecuación indica que $\partial p / \partial y$ es del orden de magnitud de δ . La diferencia de presión a través de la capa límite, que podría obtenerse por integración de la segunda ecuación, es del orden de δ^2 , es decir, muy pequeña. La presión permanece prácticamente constante a través de la capa límite. A partir de la presión en el borde de la capa límite se puede señalar dónde está determinada por la corriente sin rozamiento. La presión en la capa límite viene impuesta, en cierto modo, por la corriente exterior. Para la corriente dentro de la capa límite, se la debe considerar como función conocida, que solo depende de la coordenada x y del tiempo t .

En el borde exterior de la corriente, la velocidad longitudinal u se convierten la velocidad de corriente exterior $U(x, t)$. Como aquí no aparece ninguna caída de velocidad importante, perpendicularmente a la pared, en la ecuación (4) se pierden los términos de rozamiento con números de Re grandes, así que dicha ecuación restableciendo en ella las magnitudes con dimensiones, para la corriente exterior toma la forma:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad (9)$$

Para una corriente estacionaria se simplifica todavía mas esta ecuación, porque la presión entonces solo depende de x . Entonces quedaría:

$$U \frac{dU}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad (10)$$

Las condiciones de contorno para la corriente exterior son casi las mismas que para la corriente sin rozamiento. El espesor de la capa límite es muy pequeño, y la velocidad transversal v en el borde de la capa, muy pequeña también ($v/V \propto \delta/L$). La corriente potencial sin rozamiento para el mismo cuerpo, que junto a la pared del cuerpo tiene una componente normal que tiende a cero, se puede mirar como una buena aproximación de la corriente



Maestría en Ciencias de la Ingeniería
Mención Aeroespacial
MECANICA DE LOS FLUIDOS AVANZADA



exterior. Por eso, el gradiente de presión en la dirección de x , para la capa límite, se puede obtener fácilmente aplicando la ecuación de Bernoulli (9) a la línea de corriente definida por la pared, y considerada como corriente potencial conocida.

Resumiendo, podemos escribir ahora las ecuaciones simplificadas de Navier-Stokes, que denominaremos *ecuaciones de Prandtl para la capa límite*, en la siguiente forma volviendo a las magnitudes con dimensiones :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (11)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (12)$$

Las condiciones de contorno son:

$$\begin{aligned} y = 0; & \quad u = v = 0 \\ y = & \quad ; \quad u = U(x, t) \end{aligned}$$

La corriente potencial $U(x, t)$ se considera como una función conocida; determina la distribución de la presión según (9). Además, se debe dar también en todo el dominio xy que interesa, para $t = 0$, una adecuada corriente en la capa límite.

Para el caso estacionario el sistema se simplifica:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

(13)

con las condiciones de contorno:

$$\begin{aligned} y = 0; & \quad u = v = 0 \\ y = & \quad ; \quad u = U(x) \end{aligned}$$

Además, hay que dar un perfil inicial $u(x_0, y)$ para una sección inicial $x = x_0$. Se trata de calcular el desarrollo que experimentará un perfil inicial en una corriente dada.

La simplificación matemática obtenida es considerable. En contraste con las ecuaciones diferenciales del movimiento lento, ahora se conserva el carácter no lineal de las ecuaciones de



Navier-Stokes. Sin embargo, una de las tres ecuaciones iniciales del movimiento plano para u , v , p , desaparece, la ecuación del movimiento perpendicular a la pared. Al mismo tiempo disminuye en una unidad el número de incógnitas. Queda un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas u y v . La presión no se considera como incógnita, sino que se puede obtener aplicando la ecuación de Bernoulli a la corriente potencial, supuesta conocida, para el cuerpo considerado. Además en la primera ecuación del movimiento falta uno de los dos términos de rozamiento.

Hagamos notar todavía que nuestra estimación, según la ecuación (8) del espesor de la capa límite nos daría:

$$\frac{\delta}{L} \propto \frac{1}{\text{Re}} = \sqrt{\frac{\nu}{VL}} \quad (14)$$

Nuestro anterior conocimiento que $\delta \propto \sqrt{x}$, deducido de las soluciones exactas de Navier-Stokes, queda también confirmado. El factor numérico que falta todavía en la ecuación (14) se dará después para la corriente lenta en una placa plana como igual a 5, siendo L la distancia al borde anterior de la placa.

Las consideraciones precedentes se refieren a una pared plana, pero se pueden generalizar fácilmente para una pared curva. Para ello se verá que las ecuaciones de la capa límite (13) valen también para paredes curvas, mientras no presenten curvaturas exageradas, como por ejemplo, aristas afiladas.

La deducción de las ecuaciones de capa límite, aquí desarrollada, parte de la hipótesis de que la influencia del rozamiento sólo se extiende fundamentalmente a una capa de muy poco espesor. Por otra parte, se intenta deducir las ecuaciones de la capa límite de Prandtl por vía puramente matemática de las ecuaciones de Navier-Stokes, sin ayuda de conceptos físicos intuitivos.

2.2. Modelo Matemático: Modelo de Diferencia Finita Implícito

Para resolver las ec. (13) se propone el esquema de Diferencia Finita implícito presentado en el Cap. 4-7.2 de Ref. [1]. Según el mismo las ec. de capa límite se pueden expresar de la siguiente forma:

$$-u_{m+1,n+1} + (1+2\frac{\Delta x}{u_{m,n}\Delta y^2})u_{m+1,n} - u_{m+1,n-1} \approx u_{m,n} - (u_{m,n+1} - u_{m,n-1}) + \frac{U_{m+1}^2 - U_m^2}{2u_{m,n}} \quad (15)$$

$$\text{con} \quad \frac{\Delta x}{u_{m,n}\Delta y^2} \quad \text{y} \quad \frac{v_{m,n}\Delta x}{2u_{m,n}\Delta y}$$



Una vez obtenida las velocidades longitudinales u se calculan las transversales v :

$$v_{m+1,n} \approx v_{m+1,n-1} - \frac{\Delta y}{2\Delta x} [u_{m+1,n} - u_{m,n} + u_{m+1,n-1} - u_{m,n-1}] \quad (16)$$

Al resolver las ec. se generan un sistema de ecuaciones algebraicas tridiagonales que se resuelve usando el algoritmo de inversión de matrices tridiagonales (TDMA) desarrollado por Patankar.

El TDMA es descripto seguidamente:

La ec. (15) puede ser escrita como:

$$(1 + 2 \frac{\Delta y}{\Delta x}) u_n = \frac{\Delta y}{\Delta x} u_{n+1} + \frac{\Delta y}{\Delta x} u_{n-1} + C_n \quad (17)$$

donde C_n representa el RHS de la ec (15). El algoritmo de sustitución inversa tiene la forma:

$$u_n = P_n u_{n+1} + Q_n \quad (18)$$

Primero se calcula P_n y Q_n . Iniciándose desde abajo, $u_1=0$, calculando

$$P_2 = \frac{2}{1 + 2 \frac{\Delta y}{\Delta x}} \quad Q_2 = \frac{C_2}{1 + 2 \frac{\Delta y}{\Delta x}} \quad (19)$$

El cálculo de los remanentes P y Q se realiza con las relaciones recurrentes:

$$P_n = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta x}}{1 + 2 \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x} P_{n-1}} \quad Q_n = \frac{C_n + \frac{\Delta y}{\Delta x} Q_{n-1}}{1 + 2 \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x} P_{n-1}} \quad (20)$$

Al llegar al extremo superior es posible conocer la velocidad, ya que $u_N=U$,

$$u_{N-1} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta x} U + \frac{\Delta y}{\Delta x} Q_{N-2} + C_{N-1}}{1 + 2 \frac{\Delta y}{\Delta x} - \frac{\Delta y}{\Delta x} P_{N-2}} \quad (21)$$

donde U es la velocidad de la corriente libre. Con u_{N-1} y todos los P y Q conocidos, se pueden obtener todas las velocidades correspondientes a ese paso usando el algoritmo (18). Este algoritmo trabaja extremadamente bien en ecuaciones del tipo (15).

3. RESULTADOS

3.1. Validación

3.1.1. Comparación con otros software

Alejandra Rizzo Gustavo Scarpin	Página 11	Fecha 15/03/2002
------------------------------------	--------------	---------------------



Con el objetivo de validar el programa CaLi se confeccionaron otros softwares que permiten resolver las ecuaciones de capa límite (13). No se presentan gráficos comparativos porque las curvas caen una sobre otras. Los software son los siguientes:

3.1.1.1. Modelo de Diferencia Finita Explícito

Este modelo es presentado en el Cap. 4.7.1 de Ref. [1] y se basa en resolver las ec. Usando un esquema del siguiente tipo:

$$u_{m+1,n} \approx \left(- \right) u_{m,n+1} + (1 - 2 \) u_{m,n} + \left(+ \right) u_{m,n-1} + \frac{U_{m+1}^2 - U_m^2}{2u_{m,n}} \quad (22)$$

$$\text{donde} \quad = \frac{\Delta x}{u_{m,n} \Delta y^2} \quad \text{y} \quad = \frac{v_{m,n} \Delta x}{2u_{m,n} \Delta y}$$

Como se ve el nuevo valor de la velocidad es obtenido en base a valores conocidos de u del paso anterior.

Una vez obtenida la velocidad u se calcula la velocidad normal v de la siguiente forma:

$$v_{m+1,n} \approx v_{m+1,n-1} - \frac{\Delta y}{2\Delta x} [u_{m+1,n} - u_{m,n} + u_{m+1,n-1} - u_{m,n-1}] \quad (23)$$

El programa donde se ha automatizado esta rutina se lo presenta en el ANEXO B. El único objetivo de este software es validar el programa CaLi.

Se realizaron varias corridas de prueba y los resultados obtenidos con el mismo coinciden con los obtenidos con CaLi. Se pudo observar la gran dificultad existente en este método explícito en lo referente a la estabilidad numérica, lo que resulta aconsejable usar un método implícito para resolver las ecuaciones aquí planteadas.

3.1.1.2. Método de Diferencia Finita “Totalmente Implícito”

Este modelo se encuentra desarrollado en el Cap. 7-3.3 de Ref. [4] (Ecs. 7-25) y automatizado en el software presentado en el ANEXO C. Es un método similar al usado en el CaLi que difiere únicamente en la forma que se discretiza el término independiente de la ec. de cantidad de movimiento y en cómo se resuelve la matriz tridiagonal. Para el caso del programa del ANEXO C, la matriz tridiagonal se resuelve usando una subrutina estándar (TRIDAG.FOR)

Las ecuaciones en diferencia finita son escrita de la siguiente forma:



$$B_j u_{j-1}^{n+1} + D_j u_j^{n+1} + A_j u_{j+1}^{n+1} = C_j \quad (24)$$

con

$$B_j = -\frac{v_j^n}{2\Delta y} - \frac{v}{(\Delta y)^2}$$

$$D_j = \frac{u_j^n}{\Delta x} + \frac{2v}{(\Delta y)^2}$$

$$A_j = \frac{v_j^n}{2\Delta y} - \frac{v}{(\Delta y)^2}$$

$$C_j = \frac{(u_j^n)^2}{\Delta x} + u_e^n \frac{(u_e^{n+1} - u_e^n)}{\Delta x}$$

Los resultados obtenidos coinciden exactamente con los obtenidos mediante el programa CaLi. Este programa fue creado con la única intención de evaluar los resultados obtenidos con CaLi ya que este último posee una rutina de inversión de matriz tridiagonal mucho más eficiente.

3.1.2. Comparación con resultados analíticos

Para validar los resultados obtenidos con CaLi se procedió a correr diferentes modelos simples de capa límite cuyos resultados son conocidos ya que las ec. se las resolvieron analíticamente. Seguidamente se hace una breve descripción de los mismos y se presentan los resultados obtenidos.

3.1.2.1. Solución de Blasius

3.1.2.1.1 Descripción

El ejemplo más sencillo para el uso de las ecuaciones de la capa límite es el flujo a lo largo de una placa plana muy delgada. Este caso fue presentado por H. Blasius. La placa empieza en el punto $x = 0$ y se prolonga indefinidamente en dirección del eje x . Supongamos que la velocidad de la corriente general U_∞ es también paralela al eje x . En este caso, la velocidad de la corriente potencial es constante, y además $dp/dx = 0$. Las ecuaciones de la capa límite toman las siguientes formas:

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (25)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (26)$$



Maestría en Ciencias de la Ingeniería
Mención Aeroespacial
MECANICA DE LOS FLUIDOS AVANZADA



con condiciones de contorno

$$\text{en } y = 0, \quad u = 0$$

$$\text{en } y = \infty, \quad u = U, \quad \frac{du}{dy} = 0$$

Como en todo el sistema no se encuentra una longitud característica, nos inclinamos a suponer que los perfiles de la velocidad adimensionales a cualquier distancia del borde de la placa son similares entre sí, $u/U = f(\eta)$. El espesor de la capa límite, δ , era una elección natural para adimensionalizar la distancia desde la pared. De tal manera, la solución es de la forma:

$$\frac{u}{U} = g(\eta) \quad \text{donde} \quad \eta \propto \frac{y}{\delta}$$

con base en la solución de Stokes, $\delta \propto \sqrt{\nu x / U}$, Blasius estableció que la variable adimensional apropiada para la similitud debía ser

$$\eta = \sqrt{\frac{U}{\nu x}} \quad (27)$$

La introducción de la función de corriente, ψ , donde

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{y} \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (28)$$

satisface la ecuación de continuidad; al reemplazar u y v , ésta se reduce a una en la cual ψ es la única variable dependiente. Definiendo una función de corriente adimensional como:

$$f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{\nu x U}} \quad (29)$$

hace a $f(\eta)$ la variable dependiente y a η la variable independiente. Luego de considerables manipulaciones se llega a la expresión

$$2 \frac{d^3 f}{d\eta^3} + f \frac{d^2 f}{d\eta^2} = 0 \quad (30)$$

con las condiciones de frontera



Maestría en Ciencias de la Ingeniería
Mención Aeroespacial
MECANICA DE LOS FLUIDOS AVANZADA



$$\begin{aligned} \text{en } \eta = 0, \quad f &= \frac{df}{d\eta} = 0 \\ \text{en } \eta \rightarrow \infty, \quad \frac{df}{d\eta} &= 1 \end{aligned}$$

Las ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden que gobiernan el crecimiento de la capa límite sobre una placa plana, se han transformado en una ecuación diferencial ordinaria no lineal de tercer orden con condiciones de frontera dadas. No es posible resolver esta ecuación en forma cerrada; Blasius la resolvió empleando una expansión de la serie de potencias en torno a $\eta = 0$ acoplada a una expresión asintótica para $\eta \rightarrow \infty$. Los valores resultantes fueron tabulados tal como la TABLA 4-1 de Ref. [1].

El perfil de velocidades se obtiene de forma adimensional graficando u/U contra η , empleando los valores de la tabla.

Se observa que en $\eta = 5.0$, $u/U = 0.992$. Al definir el espesor de la capa límite, δ , como el valor de y para el cual $u/U = 0.99$, entonces:

$$\delta \approx \frac{5.0}{\sqrt{U/\nu x}} = \frac{5.0x}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (31)$$

Los esfuerzos de corte de la pared pueden expresarse como

$$\tau_w = \mu \frac{\partial u}{\partial y} = \mu U \sqrt{U/\nu x} \frac{d^2 f}{d\eta^2} \quad (32)$$

y el coeficiente de esfuerzo de corte esta dado por

$$C_f = \frac{\tau_w}{\frac{1}{2} \rho U^2} = \frac{0.664}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (33)$$

Cada uno de los resultados para el espesor de la capa límite, δ , el esfuerzo de corte de pared, τ_w , y el coeficiente de fricción superficial, C_f , dependen del número de Re de longitud Re_x hasta la potencia $1/2$. El espesor de la capa límite aumenta como $x^{1/2}$, y el esfuerzo de corte de la pared y el coeficiente de fricción superficial varían como $1/x^{1/2}$. Estos resultados caracterizan el comportamiento de la capa límite laminar sobre una placa plana.

3.1.2.1.2 Comparación

Seguidamente se comparan los resultados de la solución de Blasius con los obtenidos con CaLi.

Alejandra Rizzo Gustavo Scarpin	Página 15	Fecha 15/03/2002
------------------------------------	--------------	---------------------

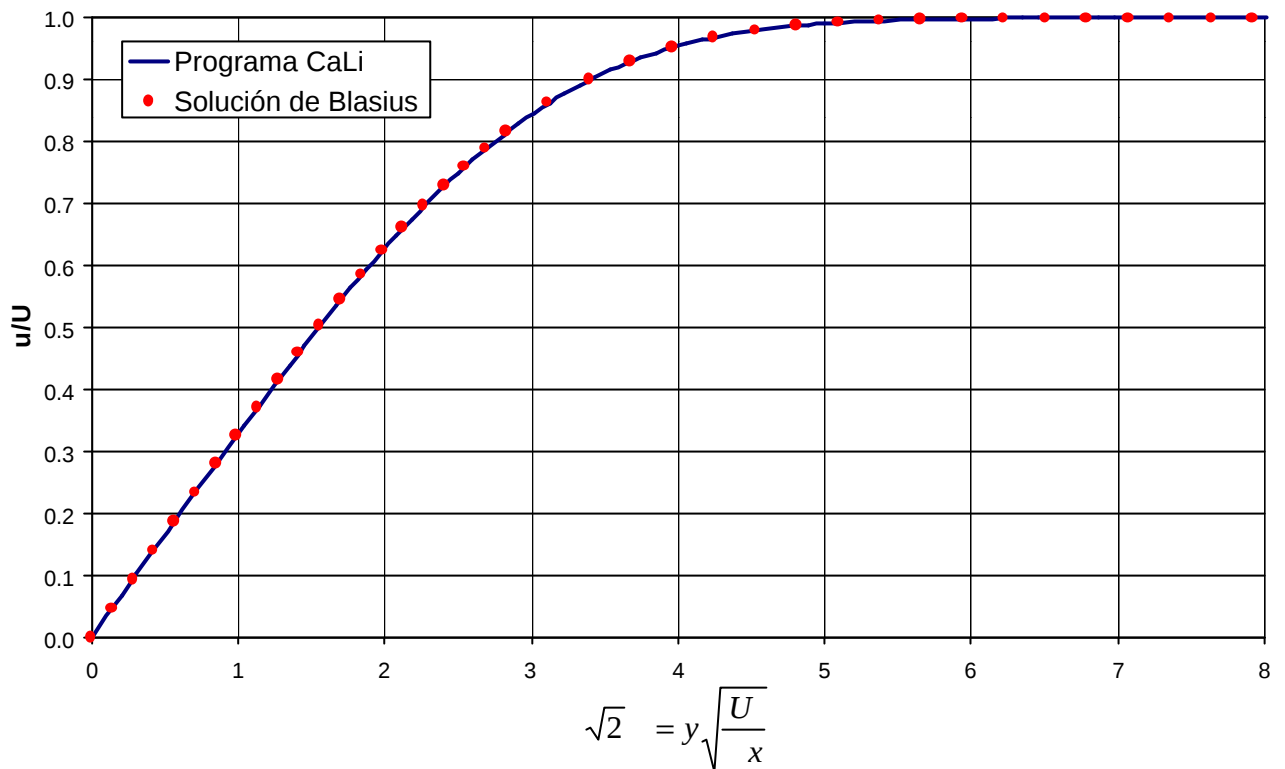


FIGURA 2: Solución de Blasius para la capa límite sobre una placa plana.
Distribución de velocidad longitudinal u (dirección X)

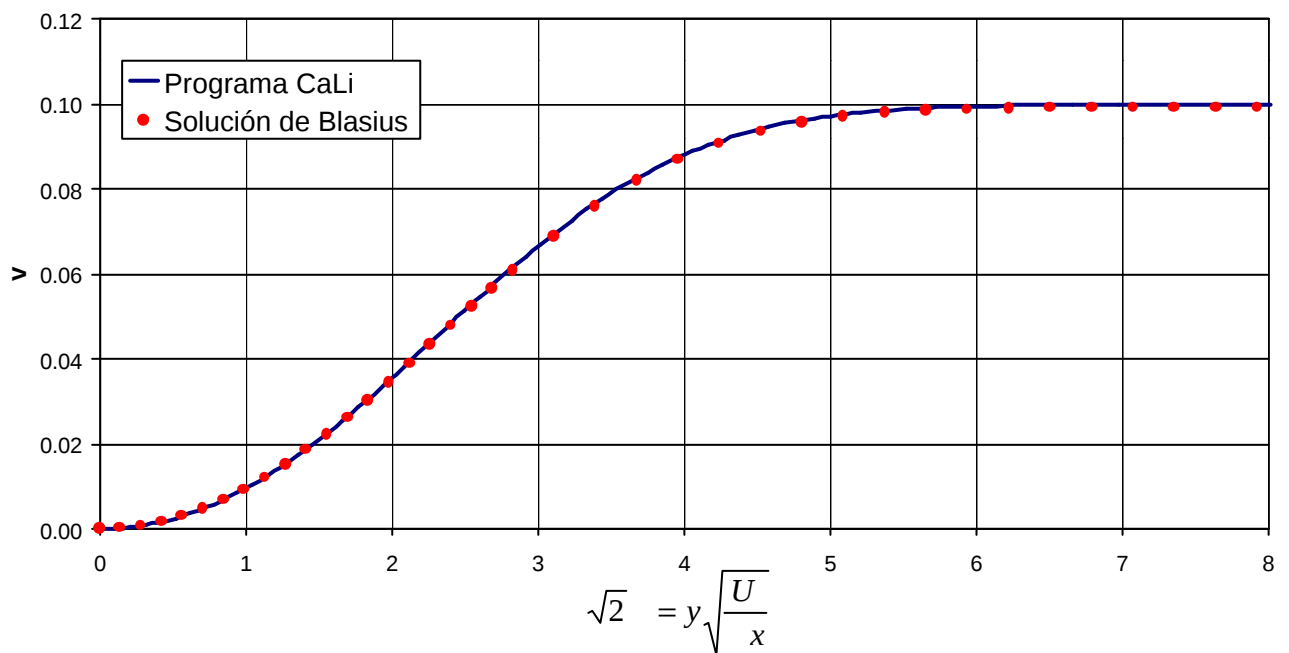


FIGURA 3: Solución de Blasius para la capa límite sobre una placa plana.
Distribución de velocidad transversal v (dirección Y)

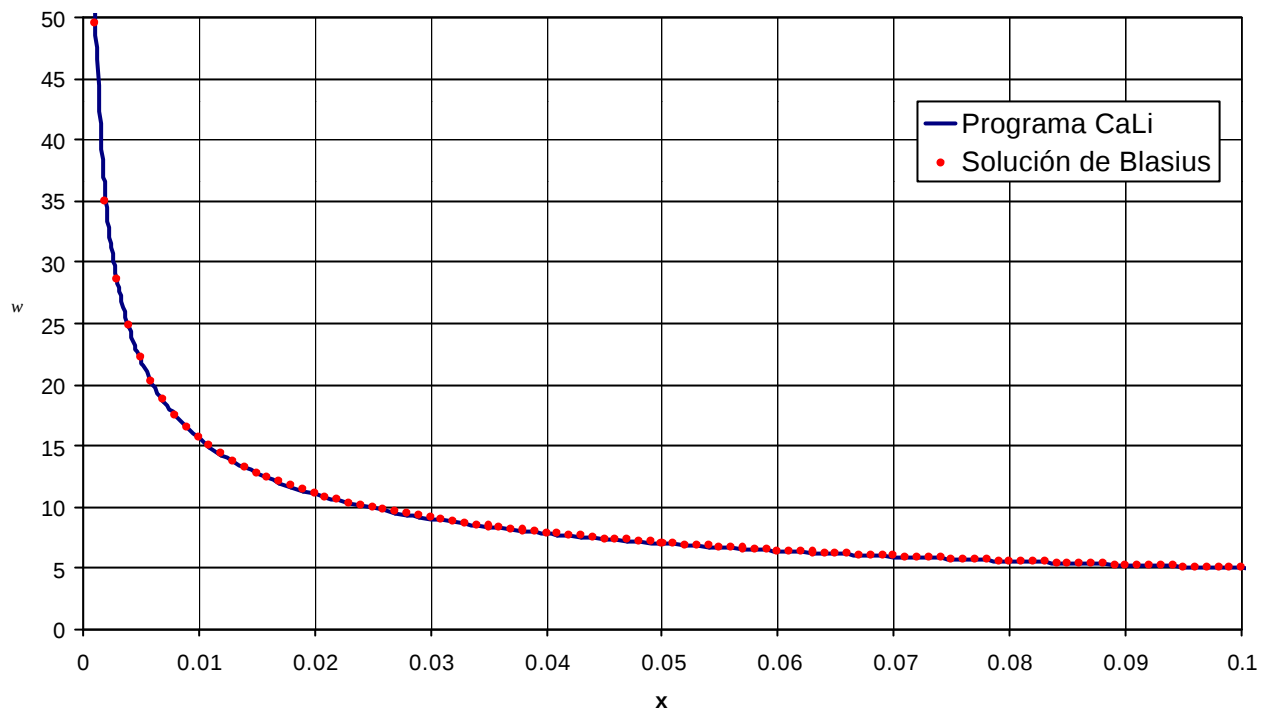


FIGURA 4: Solución de Blasius para la capa límite sobre una placa plana.
Distribución de tensión de corte sobre la pared

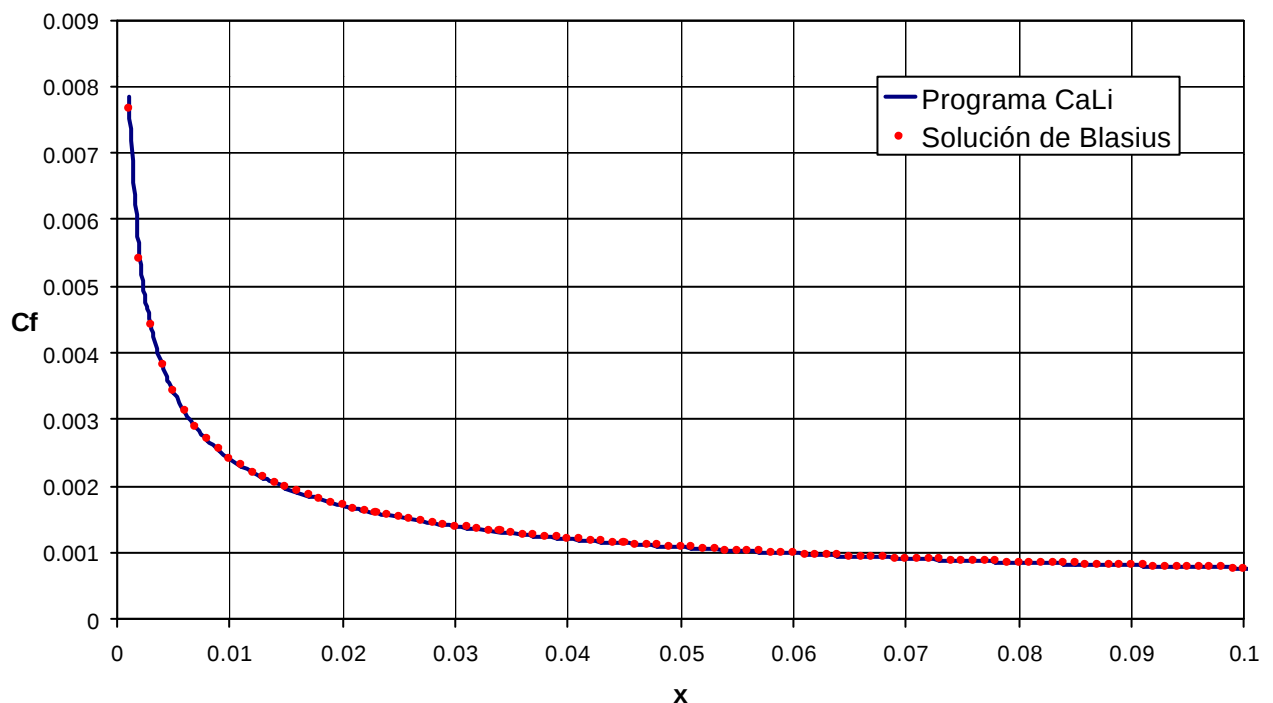


FIGURA 5: Solución de Blasius para la capa límite sobre una placa plana.
Distribución de coeficiente de fricción sobre la pared



3.1.2.2. La placa plana con succión uniforme

3.1.2.2.1 Descripción

En otra serie de soluciones, Iglish (1944) estudió la capa limite a través de una placa plana con succión. La succión sobre la pared es un método bastante práctico para retrasar la transición de la capa limite laminar a turbulenta. Iglish resolvió las ecuaciones de capa limite para presión constante, $dU/dx = 0$, con condiciones de frontera:

$$\begin{aligned}u(x, 0) &= 0 \\v(x, 0) &= v_0 = \text{cte} < 0 \\u(x, \infty) &= U\end{aligned}$$

No existe similitud en el flujo, y los perfiles de velocidades cambian gradualmente desde una forma aproximada a la de Blasius en el borde de la placa hasta una forma exponencial asintótica dada por la siguiente expresión, conforme se avanza en la placa.

$$u = U(1 - e^{y u_w / \nu}) \quad (34)$$

La condición asintótica se alcanza en $(-v_0 / U_\infty) \sqrt{\text{Re}_x} \approx 2.0$. Tomando un valor típico de succión, $(-v_0 / U_\infty) = 0.001$ con aire a 20°C y $U_\infty = 10 \text{ m/s}$, la distancia para alcanzar la condición asintótica será de $x = 6 \text{ mts}$. Si se incrementa la succión aumenta la resistencia, llevándola posiblemente por encima de los valores del flujo turbulento que es precisamente lo que se intenta evitar mediante la succión. El coeficiente de resistencia en la placa se ve incrementado debido a que ésta absorbe a través de ella el momento tangencial:

$$C_D = \frac{1}{L} \int_0^L C_f(x) dx + 2C_Q \quad \text{donde} \quad C_Q = -\frac{v_0}{U_0} \quad (35)$$

donde C_f es la tensión viscosa local $2 \tau_w / \rho U_0^2$.

3.1.2.2.2 Comparación

Seguidamente se comparan los resultados obtenidos por Iglish con los calculados usando el programa CaLi.

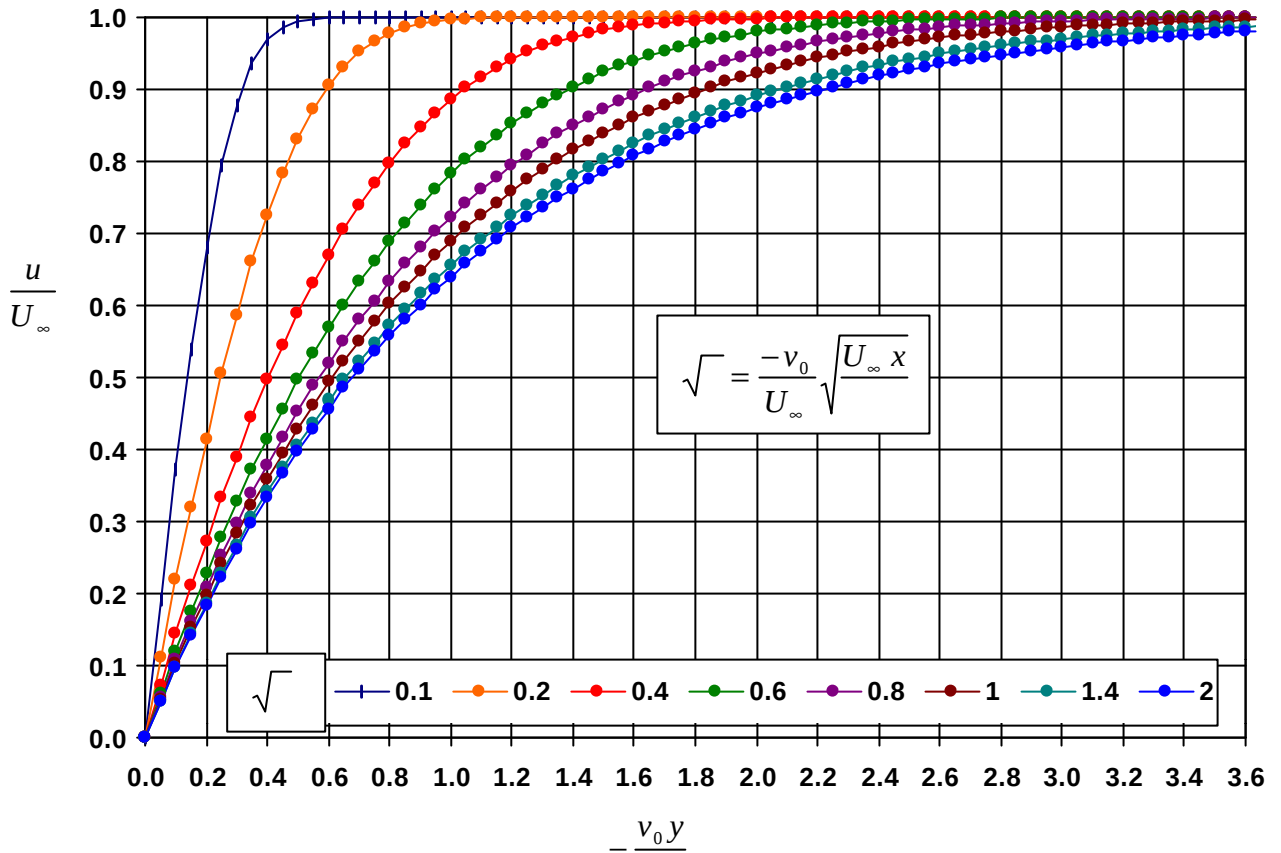


FIGURA 6: Placa plana con succión uniforme
Perfil de velocidad longitudinal calculado con CaLi

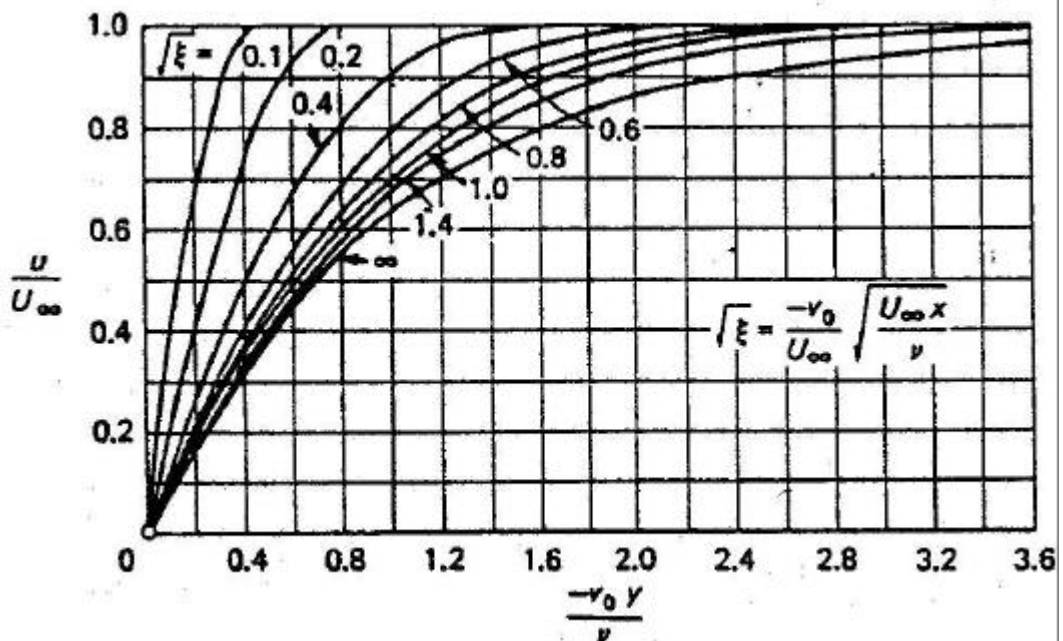


FIGURA 7: Placa plana con succión uniforme
Perfil de velocidad longitudinal calculado por Iglisch



3.1.2.3. Cilindro circular

3.1.2.3.1 Descripción

La distribución de velocidad potencial sobre un cilindro circular, en términos de la longitud de arco adimensionalizado $x^*=x/a$, donde a es el radio del círculo es:

$$\frac{U}{U_{\infty}} = 2 \sin(x^*) = 2.0x^* - 0.333x^{*3} + 0.0167x^{*5} \dots \quad (36)$$

para la cual se puede calcular fácilmente la solución de la capa límite con cualquier método (integral, series o numérico). Cuando se calcula la capa límite con las velocidades dadas por (36), se predice la separación a un ángulo $x^* = \phi = 104.5^\circ$, según los cálculos numéricos realizados por (1960), lo cual no puede ser reproducido experimentalmente en mediciones sobre flujos laminares.

Desafortunadamente el gran espesor de la capa límite induce una separación que a su vez produce una perturbación de primer orden sobre la misma. Por esto la velocidad real sobre el cilindro es levemente diferente a la dada por (36). Por ejemplo los experimentos realizados por Heimenz (1911) para un cilindro a número de Reynolds $Re_a = U a / \nu = 9500$ estima que la velocidad varía según :

$$\frac{U}{U_{\infty}} \approx 1.814x^* - 0.271x^{*3} - 0.0471x^{*5} \quad (37)$$

el cual es levemente distinto al obtenido mediante (36). El gradiente de velocidad (1.814) es 9.3 % menor que el valor potencial (2.0), y la velocidad máxima ($1.595 U_{\infty}$) ocurre a $\phi = 71.2^\circ$, en lugar de, $\phi = 90^\circ$. Las dos distribuciones son mostradas en la Figura 8. Los métodos de diferencia finita predicen la separación a $\phi_{sep} = 80^\circ$, mientras que los métodos integrales de Thwaites predice a 78.5° y la serie de Howarth-Tifford predice a 83° . Los tres tienen un razonable acuerdo con los experimentos de Heimenz

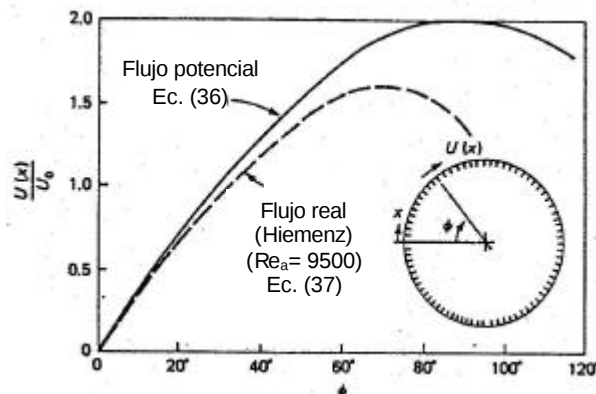


FIGURA 8: Comparación entre flujo potencial y real de un cilindro



3.1.2.3.2 Comparación

Seguidamente se comparan los resultados obtenidos por White (Ref. 1) y los calculados con CaLi. Se observa una discrepancia en los valores de abscisa probablemente por algún error de interpretación o por haberse tomado por parte de White un Reynolds distinto entre el usado para definir la velocidad ($Re_a = 9500$) y el que usó para calcular la capa límite ($Re_a = 100000$). En el caso del CaLi se utilizó el mismo Reynolds ($Re_a = 9500$) para definir la velocidad y calcular la capa límite.

El programa CaLi predice la separación a los 81° , lo cual coincide con los otros métodos y con los resultados experimentales.

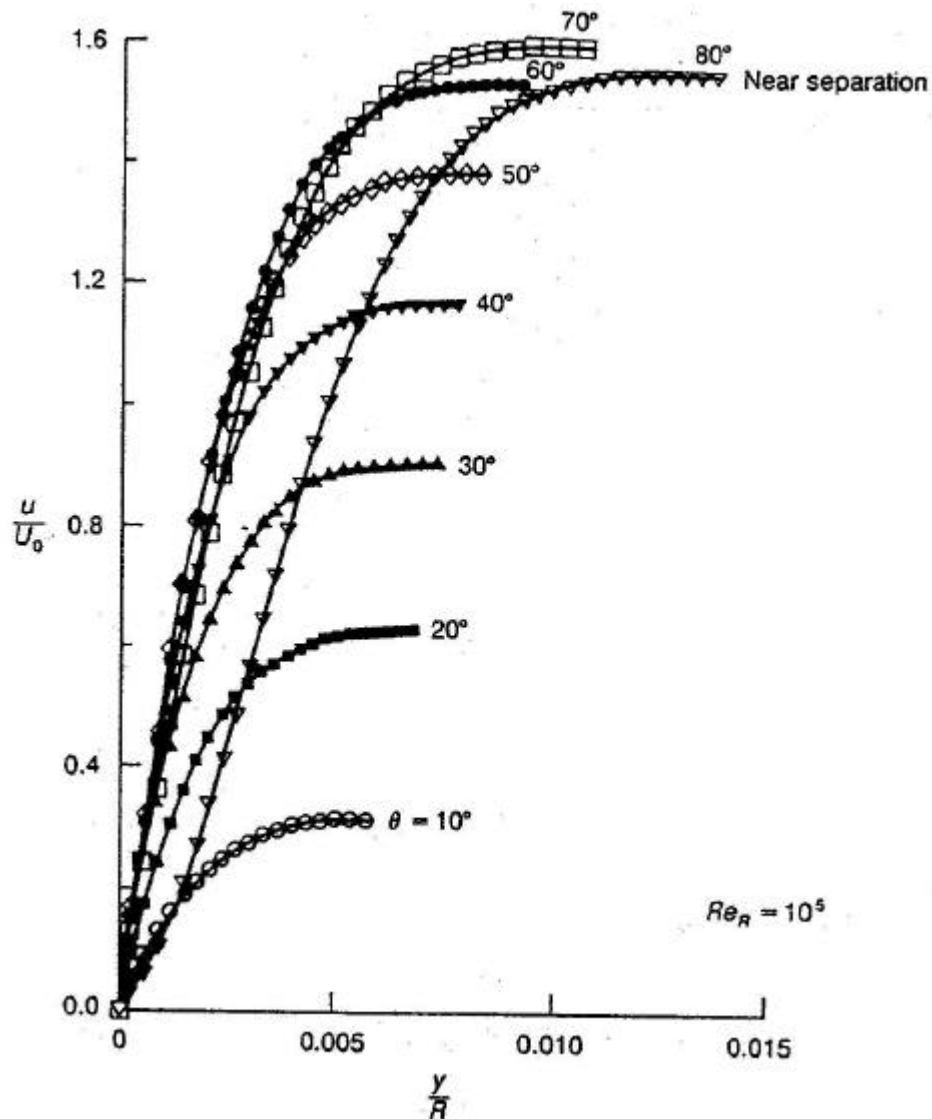


FIGURA 9: Capa límite sobre un cilindro calculado por White (Ref. [1])

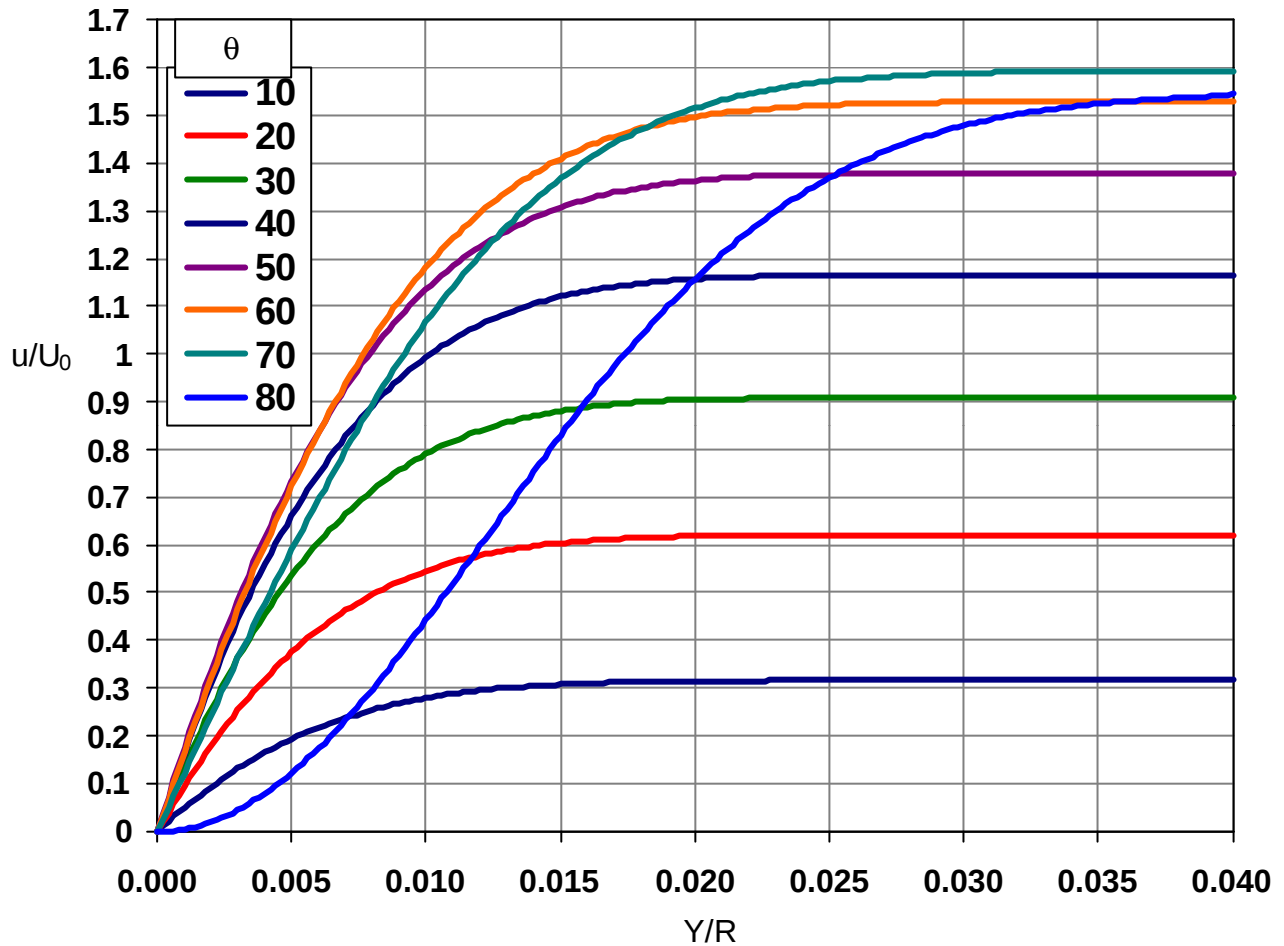


FIGURA 10: Capa límite sobre un cilindro calculado con CaLi



3.1.2.4. Predicción del punto de separación laminar

3.1.2.4.1 Descripción

La separación de la capa límite sólo puede ocurrir en una región de corriente de velocidad decreciente. Por lo tanto, en algún punto corriente arriba, la velocidad debe tener un máximo y la presión un mínimo.

Stratford (1954) propone encontrar el coeficiente de presión al cual ocurre la separación, suponiendo que:

$$C_p = \frac{p - p_{min}}{\frac{1}{2} \rho U_{máx}^2} = 1 - \frac{U^2}{U_{máx}^2} \quad (38)$$

debe satisfacer la relación algebraica

$$(x - x_B)^2 C_p \left(\frac{dC_p}{dx} \right)^2 \approx 0.0104 \quad (39)$$

donde x_B es cero si la velocidad máxima ocurre a $X=0$ (como por ejemplo en el flujo de Howarth).

Otro método de predicción de la separación laminar es el de Thwaites, el cual se basa en el valor del espesor de cantidad de movimiento. El procedimiento es calcular $\theta(x)$ mediante el método de Thwaites

$$\theta^2 \approx \frac{0.45}{U^6} \int_0^x U^5 dx \quad (40)$$

y entonces aplicar el criterio aproximado

$$_{sep} = \theta^2 \left(\frac{dU}{dx} \right) \approx -0.09 \quad (41)$$

La aproximación de este método es del orden de $\pm 10\%$.

3.1.2.4.2 Comparación

Seguidamente se compara en una tabla diferentes flujos teóricos y los puntos de separación resultantes predichos por Thwaites, Stratford y CaLi comparados con los resultados teóricos exactos.



TABLA 1: Predicción del punto de separación laminar

$U(x)$	x_{sep} (exacto)	Thwaites		Stratford		Programa CaLi	
		x_{sep}	Error, %	x_{sep}	Error, %	x_{sep}	Error, %
Howarth (1938)							
$1 - x$	0.120	0.123	+2.5	0.122	+1.7	0.1200	0.0
Tani (1949)							
$1 - x^2$	0.271	0.268	-1.1	0.271	0.0	0.2717	+0.3
$1 - x^4$	0.462	0.449	-2.8	0.461	-0.2	0.4623	+0.1
$1 - x^8$	0.640	0.621	-3.0	0.639	-0.2	0.6411	+0.2
Görler (1957)							
$\cos(x)$	0.389	0.384	-1.3	0.387	-0.5	0.3892	+0.1
$(1 - x)^{1/2}$	0.218	0.221	+1.3	0.218	0.0	0.2175	-0.2
$(1 - x)^2$	0.0637	0.0652	+2.4	0.0644	+1.1	0.06328	-0.7
$(1 - x)^{-1}$	0.151	0.158	+4.6	0.157	+3.9	0.1503	-0.5
$(1 + x)^{-2}$	0.0713	0.0739	+3.6	0.0732	+2.7	0.07080	-0.7

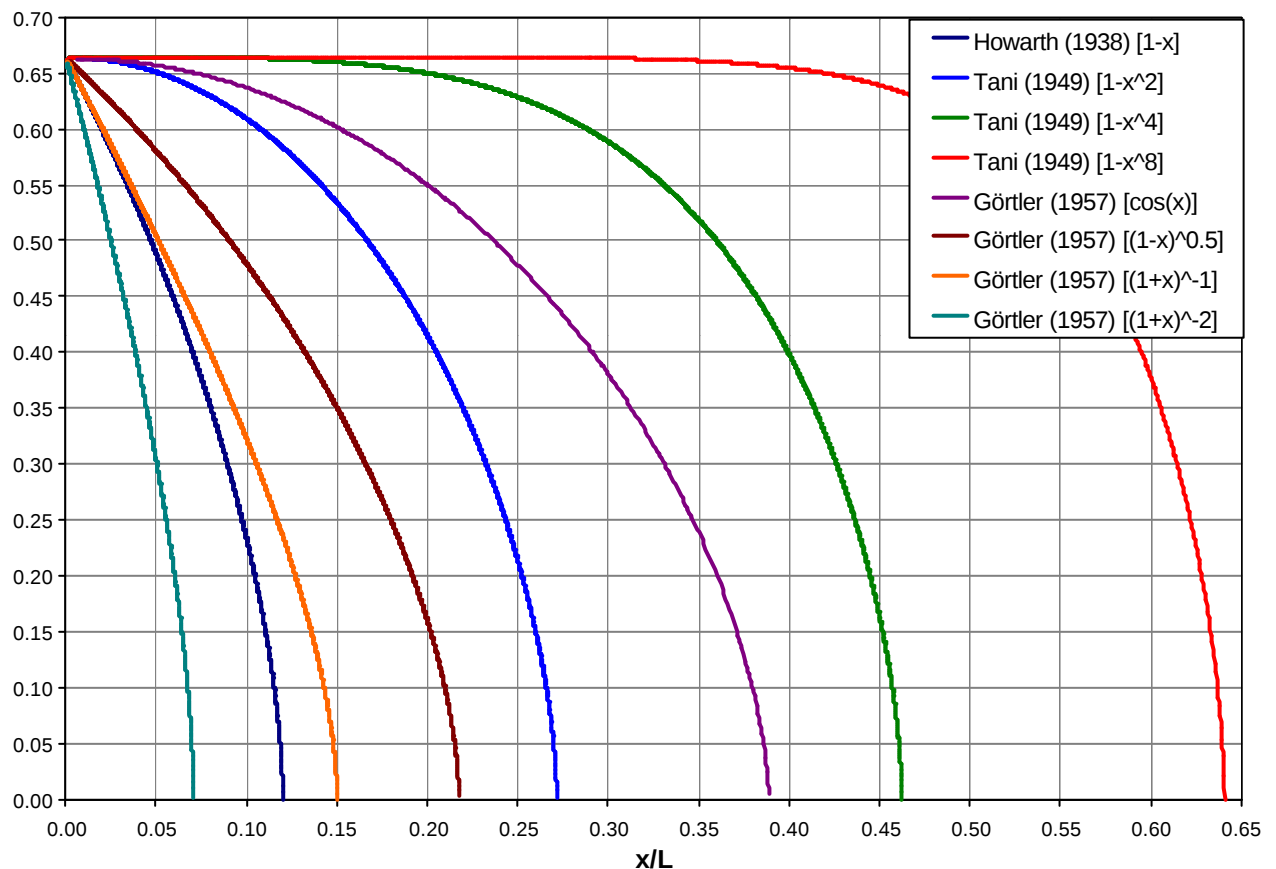


FIGURA 11: Predicción del punto de separación laminar
Programa CaLi



3.1.3. Aplicación al flujo linealmente desacelerado de Howarth

3.1.3.1 Descripción

L. Howarth (1938) e I. Tani (1949) estudiaron la solución de la capa límite para una corriente desacelerada potencial del tipo:

$$U(x) = U_0 - a x^n \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (42)$$

que representa una generalización de la corriente a lo largo de una placa plana (Blasius). En el caso más sencillo $n=1$, estudiado por Howarth, se puede interpretar como corriente potencial en un canal, formado por una parte de paredes paralelas (velocidad U_0) y otra parte convergente ($a<0$) o divergente ($a>0$). En este caso los perfiles de velocidad de capa límite no son afines como en el caso de Blasius. Howarth introduce en lugar de y la nueva variable η , como en el flujo a lo largo de una placa

$$\eta = \frac{1}{2} y \sqrt{\frac{U_0}{x}} \quad (43)$$

y además hace

$$x^* = \frac{ax}{U_0} \quad (44)$$

($x^*>0$, corriente retardada; $x^*<0$, corriente acelerada). Para resolverlo Howarth expandió la función de corriente en una serie de potencias en x/L cuyos coeficientes son funciones de η .

El método descrito de Howarth fue generalizado por Tani al caso $n>1$ (con $a>0$). No publicó ninguna tabla de coeficientes, sino sólo los resultados finales para $n=2, 4$ y 8 .

3.1.3.2 Comparación

Se realizaron varias corridas estudiando el flujo de Howarth en especial, debido a que es la finalidad de este trabajo su estudio.

De estas corridas se puede concluir que los perfiles de velocidad calculado por Howarth coinciden con los obtenidos por CaLi excepto para el desprendimiento. En esta condición, el punto de desprendimiento obtenido originalmente fue de $x/L = 0.125$. Sin embargo como se puede ver en la Tabla 1, el desprendimiento ocurre a $x/L = 0.120$. Estas comparaciones se pueden ver en las Figuras 12 y 13.



Maestría en Ciencias de la Ingeniería
Mención Aeroespacial
MECANICA DE LOS FLUIDOS AVANZADA





Además del perfil de velocidades se calculó la variación del coeficiente de fricción a lo largo de la pared. En este punto en particular surgieron dificultades al intentar comparar los resultados obtenidos con CaLi y la Figura 17 (Figura 4-26 Ref. [1]).

Debido a ello, se verificó primero la variación del coeficiente de fricción dado por la Figura 15 (Figura 7-14 Ref. [1]). Se observa que este resultado coincide con el obtenido mediante el programa CaLi (Fig. 14). Cabe destacar que para estas curvas la integración se inicia con un perfil de velocidad constante y no con la de Blasius como es el modelo original de Howarth.

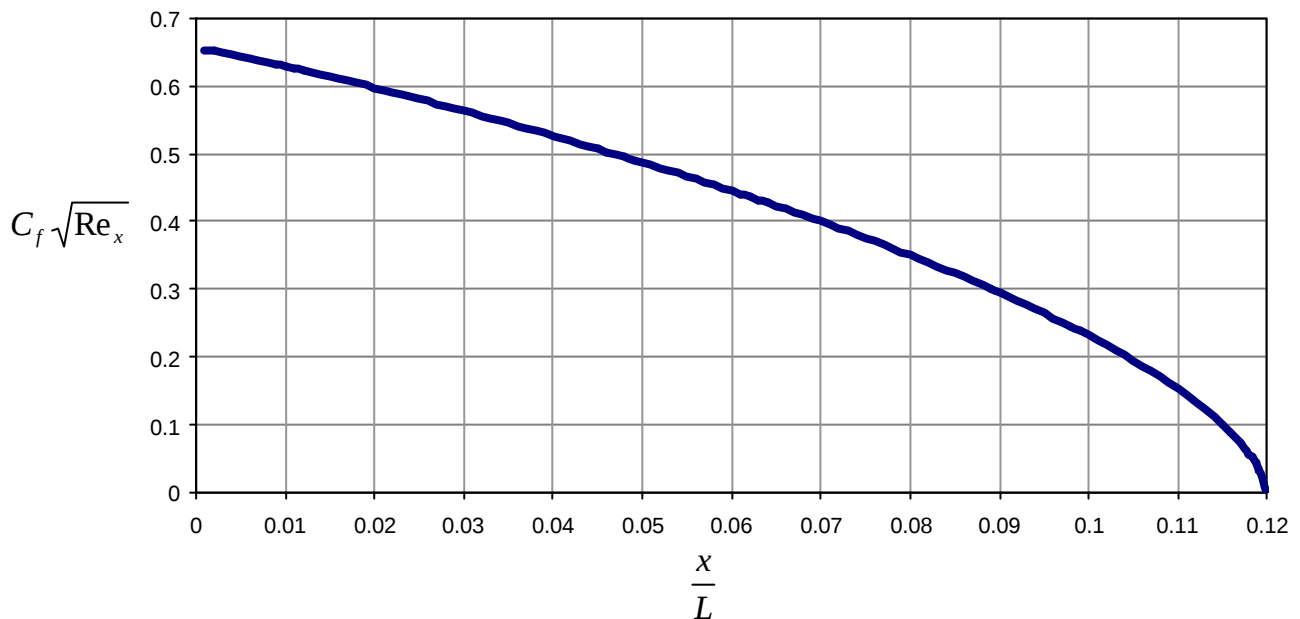


FIGURA 14: Distribución de C_f – Flujo de Howarth – Calculado con CaLi

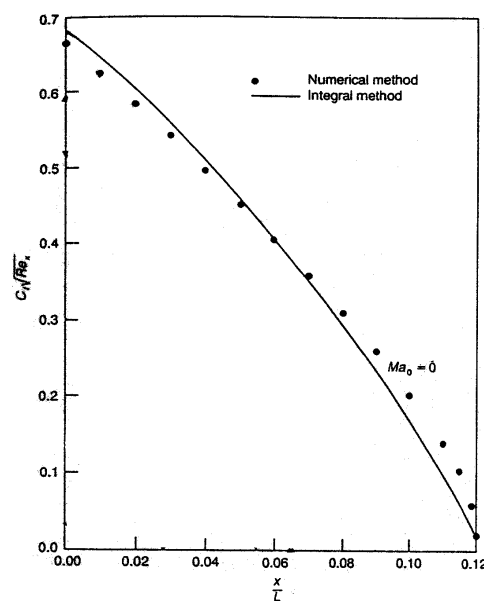


FIGURA 15: Distribución de C_f – Flujo de Howarth (Figura 7-14 Ref. [1])



Al observar los resultados presentados en las Figuras 14 y 15 se concluye que la Figura 4-26 Ref. [1] tiene expresado erróneamente el título de las ordenadas por las siguientes razones:

El valor de C_{f0} es un valor indeterminado por lo tanto no se lo puede usar como referencia. Este valor podría ser estimado extrapolando la curva de C_f al valor de $x=0$. Sin embargo la forma de la curva se corresponde no a la de C_f (de forma similar a la Figura 5) sino a la de $C_f \sqrt{Re_x}$ (Ver Figs. 14 y 15).

Para verificar estas suposiciones se dividieron los valores de la distribución graficada en la Fig. 14 por el valor extrapolado de $C_f \sqrt{Re_x}$ en la coordenada $x=0$, observándose que los valores obtenidos coinciden con los presentados en la Figura 17 (Fig. 4-26 Ref. [1]).

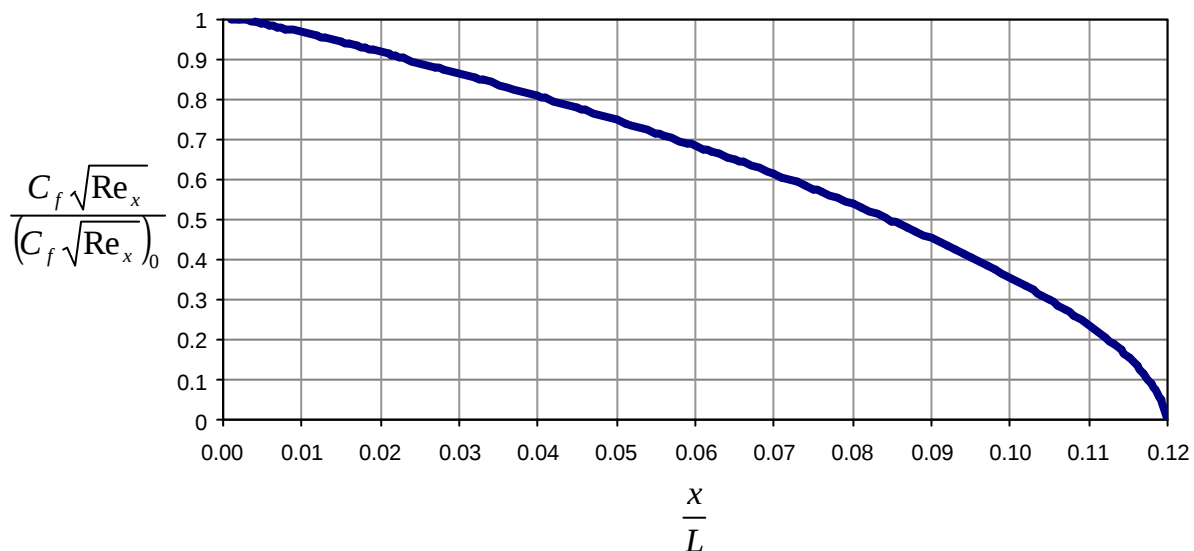


FIGURA 16: Distribución de C_f – Flujo de Howarth – Calculado con CaLi

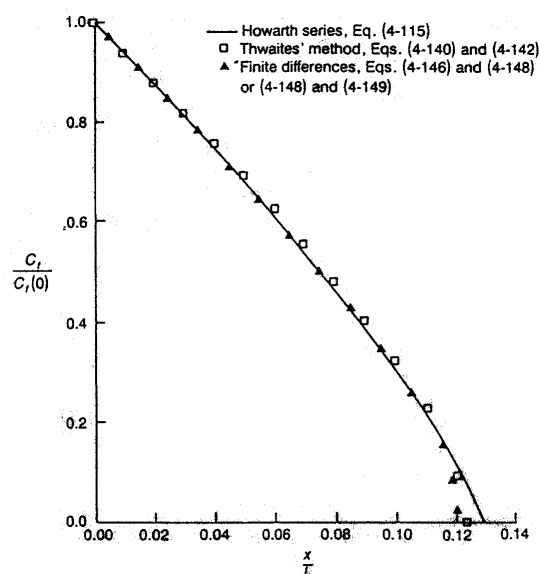


FIGURA 17: Distribución de C_f – Flujo de Howarth (Figura 4-26 Ref. [1])



Maestría en Ciencias de la Ingeniería
Mención Aeroespacial
MECANICA DE LOS FLUIDOS AVANZADA



4. CONCLUSIONES

Se procedió a confeccionar un programa de cómputos que permite resolver las ecuaciones de capa límite laminar incompresible estacionaria con succión sobre la pared y sometida a gradientes de presión arbitrarios.

Se validó el programa comparando sus resultados con otros software y resultados analíticos.

Además se calculó el comportamiento de la capa límite sometida a un flujo de Howarth, encontrándose discrepancias con respecto a los resultados presentados en Ref. [1].

Se concluye finalmente que el programa es válido para el estudio de capa límite.

5. REFERENCIAS

- [1]** Frank M. White, "Viscous Fluid Flow", Second Edition, McGraw-Hill Inc., 1991
- [2]** Dr. Hermann Schlichting, "Teoría de la Capa Límite", Quinta Edición, Ediciones Urmo, 1972.
- [3]** Robert W. Fox, Alan T. Mc Donald, "Introducción a la Mecánica de los Fluidos", Cuarta Edición, McGraw-Hill Inc., 1997.
- [4]** Anderson, Tannehill, Pletcher, "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer" Hemisphere Publishing Corporation.



ANEXO A

PROGRAMA CaLi

MANUAL DE USUARIO

INTRODUCCION

CaLi.FOR es un código computacional escrito en FORTRAN que permite resolver las ecuaciones de Capa Límite Laminar Incompresible Bidimensional.

Las ecuaciones son resueltas de modo implícito usando el esquema de inversión de matriz tridiagonal desarrollado por Patankar (1980).

Al programa se le incluyó un esquema de adaptación de grilla automática al detectarse un incremento de la velocidad mayor a un cierto porcentaje propuesto por el usuario. Cuando se cumple esa condición el programa automáticamente disminuye el paso a la mitad sucesivamente hasta que el incremento de la velocidad sea menor al propuesto. Esta condición se mantiene hasta la próxima estación de integración propuesta originalmente desde donde el paso es restituido a su valor original, iniciándose nuevamente el lazo de reducción si hace falta.

La corrida finaliza al llegar al fin de la integración o al detectarse la inversión de flujo.

DATOS DE ENTRADA

Los datos se ingresan mediante un archivo de entrada con un NAMELIST y cuatro FUNCTION que permiten ingresar las condiciones de contorno en función de la posición.

Archivo de entrada CaLi.DAT:

NAMELIST DATOS:

TITULO : Título representativo de la corrida

Nmax : Número de puntos a discretizar la grilla verticalmente

Ymax : Altura máxima de discretización en Y [m] (en $Y=Y_{max} \rightarrow U=U_{inf}$)

Alejandra Rizzo Gustavo Scarpin	Página 30	Fecha 15/03/2002
------------------------------------	--------------	---------------------



Maestría en Ciencias de la Ingeniería
Mención Aeroespacial
MECANICA DE LOS FLUIDOS AVANZADA



Lmax : Longitud máxima a integrar en la dirección X en [m]
dX : Paso de integración propuesto [m]
dFp : Incremento máximo admisible de la velocidad [%]
RHO : Densidad del fluido [kg/m³]
MU : Viscosidad del fluido [N*s/m²]
Nximp : Paso de impresión en X
Nyimp : Paso de impresión en Y

Ejemplo de archivo de entrada:

```
&DATOS
TITULO='FLUJO DE HOWARTH'
Nmax=501
Ymax=0.005D0
Lmax=10.0D0
dX=0.0001
dFp=1.0d0
RHO=1.
MU=1.D-6
NXimp=100
NYimp=5
/
```

Función de entrada FUNC_u0.FOR:

Perfil de velocidad longitudinal U_0 al inicio de la integración [m/s]

! Distribución de velocidades iniciales u (Dirección X)
! Función del programa CaLi.FOR

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION FUNC_u0(Y)
DOUBLE PRECISION Y

FUNC_u0=1.0d0

RETURN
END
```

Función de entrada FUNC_v0.FOR:

Perfil de velocidad normal a la pared V_0 al inicio de la integración [m/s]

! Distribución de velocidades iniciales u (Dirección X)
! Función del programa CaLi.FOR

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION FUNC_v0(Y)
DOUBLE PRECISION Y

FUNC_v0=0.0d0
```



Maestría en Ciencias de la Ingeniería
Mención Aeroespacial
MECANICA DE LOS FLUIDOS AVANZADA



RETURN
END

Función de entrada FUNC_u.FOR:

Velocidad longitudinal de la corriente libre en el extremo superior del dominio de integración [m/s].

! Distribución de velocidades de la corriente libre Uinf (Dirección X)
! Función del programa CaLi.FOR

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION FUNC_U(X)
  DOUBLE PRECISION X

  FUNC_U=1.0D0-X

  RETURN
END
```

Función de entrada FUNC_Vw.FOR:

Velocidad normal V sobre la pared [m/s].

! Distribución de velocidades sobre la pared Vw (Dirección X)
! Función del programa CaLi.FOR

```
DOUBLE PRECISION FUNCTION FUNC_Vw(X)
  DOUBLE PRECISION X

  FUNC_Vw=0.0D0

  RETURN
END
```

DATOS DE SALIDA

En el archivo de salida CaLi.OUT se imprime el NAMELIST DATOS usado como entrada (Ver DATOS DE ENTRADA) y una tabla conteniendo valores significativos de la corrida. Existen además dos archivos adicionales de salida donde se presenta en forma de tabla la distribución de velocidades longitudinales U (VELOC_u.OUT) y las velocidades normales V (VELOC_v.OUT) en todo el dominio de integración.

Archivo de salida CaLi.OUT:

NAMELIST DATOS:

TITULO : Título representativo de la corrida

Alejandra Rizzo Gustavo Scarpin	Página 32	Fecha 15/03/2002
------------------------------------	--------------	---------------------



Maestría en Ciencias de la Ingeniería
Mención Aeroespacial
MECANICA DE LOS FLUIDOS AVANZADA



Nmax : Número de puntos a discretizar la grilla verticalmente
Ymax : Altura máxima de discretización en Y [m] (en Y=Ymax->U=Uinf)
Lmax : Longitud máxima a integrar en la dirección X en [m]
dX : Paso de integración propuesto [m]
dFp : Incremento máximo admisible de la velocidad [%]
RHO : Densidad del fluido [kg/m³]
MU : Viscosidad del fluido [N*s/m²]
Nximp : Paso de impresión en X
Nyimp : Paso de impresión en Y

TABLA :

X : Distancia X desde el inicio de integración [m]
REx : Número de Reynolds basado en la distancia X [-]
Vx : Velocidad normal sobre la pared [m/s]
Uinf : Velocidad de la corriente en el extremos superior del dominio de integración [m/s]
TAO : Tensión de corte [N/m²]

Cf*raiz(REx) : Coeficiente de fricción dividido la raíz del Reynolds local $\frac{C_f}{\sqrt{Re_x}}$ [-]

Ejemplo de archivo de salida CaLi.OUT:

```
&DATOS
TITULO = FLUJO DE HOWARTH
NMAX = 501
YMAX = 5.0000000000000000E-003
LMAX = 10.0000000000000000
DX = 1.0000000000000000E-004
DFP = 1.0000000000000000
RHO = 1.0000000000000000
MU = 1.0000000000000000E-006
NXIMP = 100
NYIMP = 5
/
```

X	REx	Vx	Uinf	TAO	Cf*raiz(REx)
.00000	.0	.0000	1.0000	.1833	.3666667
.01000	9901.5	.0000	.9900	.0031	.6307660
.02000	19601.5	.0000	.9800	.0021	.5982645
.03000	29101.5	.0000	.9700	.0016	.5636123
.04000	38401.4	.0000	.9600	.0012	.5268282
.05000	47501.4	.0000	.9500	.0010	.4876662
.06000	56401.4	.0000	.9400	.0008	.4457364
.07000	65101.3	.0000	.9300	.0007	.4004718
.08000	73601.3	.0000	.9200	.0005	.3510191
.09000	81901.3	.0000	.9100	.0004	.2959853
.10000	90001.2	.0000	.9000	.0003	.2327585
.11000	97901.2	.0000	.8900	.0002	.1549693
.12000	105601.2	.0000	.8800	.0000	.0260223

INVERSION DE FLUJO



Archivo de salida VELOC_u.OUT:

En este archivo se presenta la distribución de velocidades longitudinales a lo largo y ancho de todo el dominio de integración. En el mismo los datos se presentan en forma matricial de la siguiente manera:

Coordenadas en la dirección Y [m] (Normal a la Pared)	
Coordenadas X en la dirección de la Pared [m]	Velocidad U en la dirección de la Pared [m/s]

Ejemplo de archivo de salida VELOC_u.OUT:

.00000	.00000	.00005	.00010	.00015	.00020	.00025	.00030
.00000	.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000	1.00000
.01000	.00000	.15643	.31338	.46598	.60702	.72878	.82541
.02000	.00000	.10379	.20954	.31600	.42116	.52242	.61689
.03000	.00000	.07891	.16004	.24282	.32635	.40941	.49052
.04000	.00000	.06313	.12855	.19594	.26480	.33444	.40399
.05000	.00000	.05167	.10564	.16171	.21959	.27882	.33886
.06000	.00000	.04263	.08756	.13467	.18374	.23447	.28649
.07000	.00000	.03510	.07249	.11208	.15372	.19721	.24227
.08000	.00000	.02853	.05933	.09234	.12746	.16453	.20336
.09000	.00000	.02255	.04735	.07437	.10351	.13468	.16773
.10000	.00000	.01684	.03591	.05718	.08060	.10609	.13354
.11000	.00000	.01092	.02406	.03938	.05686	.07644	.09805
.12000	.00000	.00265	.00750	.01453	.02373	.03506	.04850
.12100	.00000	.00072	.00365	.00876	.01606	.02553	.03714

Archivo de salida VELOC_v.OUT:

En este archivo se presenta la distribución de velocidades normales a lo largo y ancho de todo el dominio de integración. En el mismo los datos se presentan en forma matricial de la siguiente manera:

Coordenadas en la dirección Y [m] (Normal a la Pared)	
Coordenadas X en la dirección de la Pared [m]	Velocidad V en la dirección normal a la Pared [m/s]



Maestría en Ciencias de la Ingeniería
Mención Aeroespacial
MECANICA DE LOS FLUIDOS AVANZADA



Ejemplo de archivo de salida VELOC_v.OUT:

.00000	.00000	.00005	.00010	.00015	.00020	.00025	.00030
.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000	.00000
.01000	.00000	.00022	.00087	.00192	.00326	.00474	.00616
.02000	.00000	.00008	.00033	.00074	.00129	.00196	.00272
.03000	.00000	.00005	.00019	.00043	.00076	.00116	.00165
.04000	.00000	.00003	.00013	.00030	.00052	.00081	.00116
.05000	.00000	.00003	.00010	.00023	.00040	.00062	.00089
.06000	.00000	.00002	.00008	.00018	.00033	.00051	.00073
.07000	.00000	.00002	.00007	.00016	.00028	.00044	.00063
.08000	.00000	.00002	.00006	.00014	.00025	.00039	.00056
.09000	.00000	.00001	.00006	.00013	.00023	.00036	.00052
.10000	.00000	.00001	.00006	.00013	.00023	.00036	.00051
.11000	.00000	.00002	.00006	.00014	.00025	.00040	.00057
.12000	.00000	.00004	.00015	.00033	.00058	.00091	.00131
.12100	.00000	.00006	.00026	.00057	.00102	.00159	.00227

LISTADO DEL PROGRAMA:

Seguidamente se presenta el listado fuente del programa CaLi.FOR. Las principales características del mismo se encuentran referenciadas en el encabezado.

```
*****
**
**          P R O G R A M A   C a L i
**
*****
**
**  CAPA LIMITE LAMINAR INCOMPRESIBLE ESTACIONARIA BIDIMENSIONAL
**
**  - PERMITE CALCULAR :
**    a) EL PERFIL DE VELOCIDADES (u, v) DESDE LA PARED
**    b) EL COEFICIENTE DE FRICCION Cf A LO LARGO DE LA PARED
**
**  - SE DEFINE POR FUNCIÓN:
**    a) EL PERFIL DE VELOCIDADES INICIALES (U, V) [FUNC_u0, FUNC_v0]
**    b) EL GRADIENTE DE VELOCIDAD FUERA DE LA CAPA LIMITE [FUNC_u]
**    c) EL VALOR DE LA SUCCIÓN A LO LARGO DE LA PLACA [FUNC_vw]
**
**  - LAS ECS. SE RESUELVEN CON METODO IMPLICITO USANDO EL ESQUEMA DE
**    INVERSION DE MATRIZ TRIDIAGONAL DESARROLLADO POR PATANKAR(1980)
**
**  - EL PROGRAMA DETIENE SU EJECUCION AL DETECTAR INVERSION DE FLUJO
**
*****
**  VARIABLES DE ENTRADA
**    TITULO:TITULO GENERAL
**    Nmax   : NUMERO DE PUNTOS A DISCRETIZAR LA GRILLA VERTICALMENTE
**    Ymax   : ALTURA MAXIMA DE DISCRETIZACION [m] (EN Y=Ymax->U=Uinf)
**    Lmax   : LONGITUD MAXIMA A INTEGRAR A LO LARGO DEL EJE X EN [m]
```



Maestría en Ciencias de la Ingeniería
Mención Aeroespacial
MECANICA DE LOS FLUIDOS AVANZADA



```
**      dX      : PASO DE INTEGRACION PROPUESTO [m]      **
**      dFp     : INCREMENTO MAXIMO ADMISIBLE DE LA VELOCIDAD [%] **
**      RHO     : DENSIDAD DEL FLUIDO [kg/m3]             **
**      MU      : VISCOSIDAD DEL FLUIDO [N*s/m2]         **
**      NXimp   : PASO DE IMPRESION EN X                 **
**      NYimp   : PASO DE IMPRESION EN Y                 **
**
*****
** PRINCIPALES VARIABLES                                **
** - REX : NUMERO DE REYNOLDS BASADO EN LA LONGITUD X    **
** - u   : COMPONENTE X DE LA VELOCIDAD EN LA CAPA LIMITE **
** - v   : COMPONENTE Y DE LA VELOCIDAD EN LA CAPA LIMITE **
** - NU  : VISCOSIDAD CINEMATICA                        **
** - Cf  : COEFICIENTE DE FRICCION SOBRE LA PARED       **
** - TAO : TENSION DE CORTE SOBRE LA PARED              **
**
** (TODAS LAS VARIABLES SON DEFINIDAS IMPLICITAMENTE EN DOBLE PRES.) **
**
*****
** REFERENCIAS:                                         **
** Frank M. White, "VISCOUS FLUID FLOW", Second Edition, **
** McGraw-Hill, Inc., 1991                             **
**
*****
** ALEJANDRA RIZZO - GUSTAVO SCARPIN                    CORDOBA, 22 - NOV - 2001 **
**
*****
```

PROGRAM CaLi

IMPLICIT INTEGER (I-N), REAL*8 (A-H,O-Z)

CHARACTER TITULO*50

DOUBLE PRECISION Alfa(5001), Beta(5001), C(5001), P(5001), Q(5001)
, u(2,5001), v(2,5001), MU, Lmax, NU

NAMELIST/DATOS/TITULO, Nmax, Ymax, Lmax, dX, dFp, RHO, MU, NXimp, NYimp
namelist/salida/dY, dX, NU, x

OPEN(UNIT=1, FILE='CaLi.DAT', STATUS='OLD')
OPEN(UNIT=3, FILE='VELOC_u.OUT', STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=4, FILE='VELOC_v.OUT', STATUS='UNKNOWN')
OPEN(UNIT=5, FILE='CaLi.OUT', STATUS='UNKNOWN')

! Parámetros iniciales

READ(1,DATOS)
WRITE(5,DATOS)
WRITE(5,1030)
Imp=1
dY=Ymax/(Nmax-1)
NU=MU/RHO
X=0.0D0
P(1)=0.0D0
Q(1)=0.0D0

! Perfil de velocidad inicial



Maestría en Ciencias de la Ingeniería
Mención Aeroespacial
MECANICA DE LOS FLUIDOS AVANZADA



```
DO n=1,Nmax
  Y=dY*(n-1)
  u(1,n)=FUNC_u0(Y)
  v(1,n)=FUNC_v0(Y)
END DO
u(1,1)=0.0D0 !EVITA EL PUNTO DE IMPACTO EN 0,0
! Impresión de las condiciones iniciales
WRITE(3,1000) X,(Y,Y=0,Ymax,dY*NYimp)
WRITE(4,1000) X,(Y,Y=0,Ymax,dY*NYimp)
!! Distribución de velocidades u y v
WRITE(3,1000) X,(u(1,n),n=1,Nmax,NYimp)
WRITE(4,1000) X,(v(1,n),n=1,Nmax,NYimp)
!! Impresión del archivo principal
!!! Cálculo de REX, TAO y Cf
REX=X*FUNC_U(X)/NU
TAO=MU*(18*u(1,2)-9*u(1,3)+2*u(1,4))/(6*dY)
Cf=TAO/(0.5*RHO*FUNC_U(X)**2)
WRITE(5,1010) X,REX,FUNC_Vw(X),FUNC_U(X),TAO,Cf
! Loop de cálculo
DO WHILE (X.LT.Lmax+dX)
  dX1=dX
  M=1
1  DO i=1,M
! Condiciones de contorno
  u(2,1)=0.0D0
  v(2,1)=FUNC_Vw(X+dX1)
  u(2,Nmax)=FUNC_U(X+dX1)

! Cálculo de factores
  DO n=2,Nmax-1
    Alfa(n)=NU*dX1/(u(1,n)*dY**2)
    Beta(n)=v(1,n)*dX1/(2*u(1,n)*dY)
    C(n)=u(1,n)-Beta(n)*(u(1,n+1)-u(1,n-1))+(FUNC_U(X+dX1)**2-
      FUNC_U(X)**2)/(2*u(1,n))
    P(n)=Alfa(n)/(1+2*Alfa(n)-Alfa(n)*P(n-1))
    Q(n)=(C(n)+Alfa(n)*Q(n-1))/(1+2*Alfa(n)-Alfa(n)*P(n-1))
  END DO

! Cálculo de la velocidad u para el paso m+1
  u(2,Nmax-1)=(Alfa(Nmax-1)*FUNC_U(X+dX1)+Alfa(Nmax-1)*Q(Nmax-2)+
    C(Nmax-1))/(1+2*Alfa(Nmax-1)-Alfa(Nmax-1)*P(Nmax-2))
  DO n=Nmax-2,2,-1
    u(2,n)=P(n)*u(2,n+1)+Q(n)
  END DO

! Adaptación de la grilla
  IF (u(2,2).ge.0.1.and.DABS((u(2,2)-u(1,2))/u(1,2)*100.).GT.dFp)
    THEN
      dX1=dX1/2.
      M=M*2
      GOTO 1
    END IF

! Cálculo de la velocidad v para el paso m+1
  DO n=2,Nmax
    v(2,n)=v(2,n-1)-dY/(2*dX1)*(u(2,n)-u(1,n)+u(2,n-1)-u(1,n-1))
  END DO
!! Avanzar un paso las condiciones iniciales
```



Maestría en Ciencias de la Ingeniería
Mención Aeroespacial
MECANICA DE LOS FLUIDOS AVANZADA



```
DO n=1,Nmax
  u(1,n)=u(2,n)
  v(1,n)=v(2,n)
END DO
X=X+dX1
END DO
! Salida de resultados
!! Distribución de velocidades u y v
  IF (Imp.GE.NXimp) THEN
    WRITE(3,1000) X,(u(2,n),n=1,Nmax,NYimp)
    WRITE(4,1000) X,(v(2,n),n=1,Nmax,NYimp)
    Imp=1
!! Impresión del archivo principal
!!! Cálculo de REX, TAO y Cf
    REX=X*FUNC_U(X)/NU
    TAO=MU*(18*u(2,2)-9*u(2,3)+2*u(2,4))/(6*dY)
    Cf=TAO/(0.5*RHO*FUNC_U(X)**2)
    WRITE(5,1010) X,REX, FUNC_Vw(X), FUNC_U(X), TAO, Cf*DSQRT(REX)

    write(*,*) X,Cf*DSQRT(REX)
  ELSE
    Imp=Imp+1
  END IF
  IF (u(2,2).LT.0.0D0) THEN
    WRITE(*,*) 'INVERSION DE FLUJO'
    WRITE(5,*) 'INVERSION DE FLUJO'
    GOTO 2
  END IF
END DO
!! Distribución de velocidades u y v
2  WRITE(3,1000) X,(u(2,n),n=1,Nmax,NYimp)
   WRITE(4,1000) X,(v(2,n),n=1,Nmax,NYimp)

1000 FORMAT(500F10.5)
1010 FORMAT(F10.5,F10.1,2F10.4,F10.4,F10.7)
1020 FORMAT(3F10.6)
1030 FORMAT(/'      X              REX              Vx              Uinf      TAO',
. ' Cf*raiz(REX)')
END
```



ANEXO B

PROGRAMA CLexp

MANUAL DE USUARIO

INTRODUCCION

CLexp.FOR es un código computacional escrito en FORTRAN que permite resolver las ecuaciones de Capa Límite Laminar Incompresible Bidimensional el esquema de solución explícito presentado en el Cap. 3.1.1.1.

El único objetivo de este programa es validar los resultados obtenidos con el programa CaLi del ANEXO A.

Los datos de entrada y las funciones que definen las condiciones de contorno del problema son iguales a las presentadas en el ANEXO A.

LISTADO FUENTE DEL PROGRAMA

! Un modelo de Capa Límite Laminar para flujo plano
! Método de solución explícita
! NAVIER-STOKES bidimensional estacionario

! Autores: Alejandra Rizzo, Gustavo Scarpin

```
PROGRAM CLexp
```

```
IMPLICIT INTEGER (I-N), REAL*8 (A-H,O-Z)  
DOUBLE PRECISION u(2,5001), v(2,5001), MU, Lmax, NU
```

```
NAMelist/DATOS/Nmax,Ymax,Lmax,dX,dFp,RHO,MU,Nimp  
namelist/salida/dY,dX,NU,x
```

```
OPEN(UNIT=1, FILE='CLexp.DAT', STATUS='OLD')  
OPEN(UNIT=3, FILE='VELOC_u2.OUT', STATUS='UNKNOWN')  
OPEN(UNIT=4, FILE='VELOC_v2.OUT', STATUS='UNKNOWN')  
OPEN(UNIT=5, FILE='CLexp.OUT', STATUS='UNKNOWN')
```

```
! Parámetros iniciales  
READ(1,DATOS)
```



Maestría en Ciencias de la Ingeniería
Mención Aeroespacial
MECANICA DE LOS FLUIDOS AVANZADA



```
WRITE(5,DATOS)

Imp=1
dY=Ymax/(Nmax-1)
NU=MU/RHO
X=0.0D0

! Perfil de velocidad inicial
DO n=1,Nmax
  Y=dY*(n-1)
  u(1,n)=FUNC_u0(Y)
  v(1,n)=FUNC_v0(Y)
END DO
  u(1,1)=0.0D0 !EVITA EL PUNTO DE IMPACTO EN 0,0

! Impresión de las condiciones iniciales
  WRITE(3,1000) X,(Y,Y=0,Ymax,dY)
  WRITE(4,1000) X,(Y,Y=0,Ymax,dY)
!! Distribución de velocidades u y v
  WRITE(3,1000) X,(u(1,n),n=1,Nmax)
  WRITE(4,1000) X,(v(1,n),n=1,Nmax)
!! Impresión del archivo principal
!!! Cálculo de REX, TAO y Cf
  REX=X*FUNC_U(X)/NU
  TAO=MU*u(1,2)/dY
  Cf=TAO/(0.5*RHO*FUNC_U(X)**2)
  WRITE(5,1010) X,REX,FUNC_Vw(X),FUNC_U(X),TAO,Cf

! Loop de cálculo
DO WHILE (X.LT.Lmax)
  dX1=dX
  M=1
! Condiciones de contorno
  u(2,1)=0.0D0
  v(2,1)=FUNC_Vw(X+dX1)
  u(2,Nmax)=FUNC_U(X+dX1)

! Cálculo de factores
  DO n=2,Nmax-1
    Alfa=NU*dX1/(u(1,n)*dY**2)
    Beta=v(1,n)*dX1/(2*u(1,n)*dY)
    u(2,n)=(Alfa-Beta)*u(1,n+1)+(1-2*Alfa)*u(1,n)+(Alfa+Beta)*
      u(1,n-1)+(FUNC_U(X+dX1)**2-FUNC_U(X)**2)/(2*u(1,n))
  END DO

! Cálculo de la velocidad v para el paso m+1
  DO n=2,Nmax
    v(2,n)=v(2,n-1)-dY/(2*dX1)*(u(2,n)-u(1,n)+u(2,n-1)-u(1,n-1))
  END DO
!! Avanzar un paso las condiciones iniciales
  DO n=1,Nmax
    u(1,n)=u(2,n)
    v(1,n)=v(2,n)
  END DO
  X=X+dX1
! Salida de resultados
!! Distribución de velocidades u y v
```



Maestría en Ciencias de la Ingeniería
Mención Aeroespacial
MECANICA DE LOS FLUIDOS AVANZADA



```
IF (Imp.GE.Nimp) THEN
  WRITE(3,1000) X,(u(2,n),n=1,Nmax)
  WRITE(4,1000) X,(v(2,n),n=1,Nmax)
  Imp=1
!! Impresión del archivo principal
!!! Cálculo de REX, TAO y Cf
  REX=X*FUNC_U(X)/NU
  TAO=MU*u(2,2)/dY
  Cf=TAO/(0.5*RHO*FUNC_U(X)**2)
  WRITE(5,1010) X,REX,FUNC_Vw(X),FUNC_U(X),TAO,Cf
ELSE
  Imp=Imp+1
END IF
write(*,*) X,Cf,Cf*DSQRT(REX)
! Control de paso e inversión de flujo
  IF (dY.GE.DABS(2*MU/v(1,Nmax))) THEN
    WRITE(*,*) 'dY mayor que el mínimo necesario'
    GOTO 2
  END IF
  IF (dX1.LT.dXmax) THEN
    WRITE(*,*) 'dX menor que dXmáximo'
    GOTO 2
  END IF
  IF (u(2,2).LT.0.0D0) THEN
    WRITE(*,*) 'INVERSION DE FLUJO'
    GOTO 2
  END IF
END DO
!! Distribución de velocidades u y v
2      WRITE(3,1000) X,(u(2,n),n=1,Nmax)
      WRITE(4,1000) X,(v(2,n),n=1,Nmax)

1000  FORMAT(500F10.5)
1010  FORMAT(F10.7,F10.2,2F10.4,F10.4,F10.7)
END
```



ANEXO C

PROGRAMA FImp

MANUAL DE USUARIO

INTRODUCCION

FImp.FOR es un código computacional escrito en FORTRAN que permite resolver las ecuaciones de Capa Límite Laminar Incompresible Bidimensional el esquema de solución implícito presentado en el Cap. 3.1.1.2.

El único objetivo de este programa es validar los resultados obtenidos con el programa CaLi del ANEXO A.

Los datos de entrada y las funciones que definen las condiciones de contorno del problema son iguales a las presentadas en el ANEXO A.

LISTADO FUENTE DEL PROGRAMA

! Un modelo de Capa Límite Laminar para flujo plano
! Método de solución implícito con inversion de matriz tridiagonal
! NAVIER-STOKES bidimensional estacionario

! Autores: Alejandra Rizzo, Gustavo Scarpin

```
PROGRAM FImp
```

```
IMPLICIT INTEGER (I-N), REAL*8 (A-H,O-Z)  
DOUBLE PRECISION Alfa(5001), Beta(5001), A(5001), B(5001), C(5001)  
.      ,u(2,5001), v(2,5001), MU, Lmax, NU,R(5001),  
.      SA(5001)
```

```
NAMELIST/DATOS/Nmax,Ymax,Lmax,dX,dFp,RHO,MU,NXimp,NYimp  
namelist/salida/dY,dX,NU,x
```

```
OPEN(UNIT=1, FILE='FImp.DAT', STATUS='OLD')  
OPEN(UNIT=3, FILE='VELOC_u.OUT', STATUS='UNKNOWN')  
OPEN(UNIT=4, FILE='VELOC_v.OUT', STATUS='UNKNOWN')  
OPEN(UNIT=5, FILE='FImp.OUT', STATUS='UNKNOWN')
```



Maestría en Ciencias de la Ingeniería
Mención Aeroespacial
MECANICA DE LOS FLUIDOS AVANZADA



```
! Parámetros iniciales
  READ(1,DATOS)
  WRITE(5,DATOS)

  Imp=1
  dY=Ymax/(Nmax-1)
  NU=MU/RHO
  X=0.0D0
! Perfil de velocidad inicial
  DO n=1,Nmax
    Y=dY*(n-1)
    u(1,n)=FUNC_u0(Y)
    v(1,n)=FUNC_v0(Y)
  END DO
  u(1,1)=0.0D0 !EVITA EL PUNTO DE IMPACTO EN 0,0

! Impresión de las condiciones iniciales
  WRITE(3,1000) X,(Y,Y=0,Ymax,dY*NYimp)
  WRITE(4,1000) X,(Y,Y=0,Ymax,dY*NYimp)
!! Distribución de velocidades u y v
  WRITE(3,1000) X,(u(1,n),n=1,Nmax,NYimp)
  WRITE(4,1000) X,(v(1,n),n=1,Nmax,NYimp)
!! Impresión del archivo principal
!!! Cálculo de REX, TAO y Cf
  REX=X*FUNC_U(X)/NU
  TAO=MU*(18*u(1,2)-9*u(1,3)+2*u(1,4))/(6*dY)
  Cf=TAO/(0.5*RHO*FUNC_U(X)**2)
  WRITE(5,1010) X,REX,FUNC_Vw(X),FUNC_U(X),TAO,Cf
! Loop de cálculo
  DO WHILE (X.LT.Lmax+dX)
    dX1=dX
    M=1
1    DO i=1,M
! Condiciones de contorno
      u(2,1)=0.0D0
      v(2,1)=FUNC_Vw(X+dX1)
      u(2,Nmax)=FUNC_U(X+dX1)

! Cálculo de factores
c    write(6,salida)
      DO n=2,Nmax-1
        Alfa(n)=NU*dX1/(u(1,n)*dY**2)
        Beta(n)=v(1,n)*dX1/(2*u(1,n)*dY)
        A(n-1)=-v(1,n)/2/dY-NU/dY**2
        B(n-1)=u(1,n)/dX1+2*NU/dY**2
        C(n-1)=v(1,n)/2/dY-NU/dY**2
        R(n-1)=u(1,n)**2/dX1+FUNC_U(X)*(FUNC_U(X+dX1)-
          .      FUNC_U(X))/dX1
      END DO
c    write(6,1000) x,(alfa(n),n=1,Nmax)
c    write(6,1000) x,(beta(n),n=1,Nmax)
c    write(6,1000) x,(C(n),n=1,Nmax)
c    write(6,1000) x,(P(n),n=1,Nmax)
c    write(6,1000) x,(Q(n),n=1,Nmax)

! Cálculo de la velocidad u para el paso m+1
```



Maestría en Ciencias de la Ingeniería
Mención Aeroespacial
MECANICA DE LOS FLUIDOS AVANZADA



```
CALL TRIDAG(A,B,C,R,SA,Nmax-2)
DO n=2,Nmax-1
  u(2,n)=SA(n-1)
END DO
! Adaptación de la grilla
IF (u(2,2).ge.1.and.DABS((u(2,2)-u(1,2))/u(1,2)*100.).GT.dFp)
. THEN
  dX1=dX1/2.
  M=M*2
  GOTO 1
END IF
! Cálculo de la velocidad v para el paso m+1
DO n=2,Nmax
  v(2,n)=v(2,n-1)-dY/(2*dX1)*(u(2,n)-u(1,n)+u(2,n-1)-u(1,n-1))
END DO
!! Avanzar un paso las condiciones iniciales
DO n=1,Nmax
  u(1,n)=u(2,n)
  v(1,n)=v(2,n)
END DO
X=X+dX1
END DO
! Salida de resultados
!! Distribución de velocidades u y v
IF (Imp.GE.NXimp) THEN
  WRITE(3,1000) X,(u(2,n),n=1,Nmax,NYimp)
  WRITE(4,1000) X,(v(2,n),n=1,Nmax,NYimp)
  Imp=1
!! Impresión del archivo principal
!!! Cálculo de REX, TAO y Cf
  REX=X*FUNC_U(X)/NU
c    TAO=MU*(48*u(2,2)-36*u(2,3)+u(2,4)-3*u(2,5))/(12*dY)
    TAO=MU*(18*u(2,2)-9*u(2,3)+2*u(2,4))/(6*dY)
    Cf=TAO/(0.5*RHO*FUNC_U(X)**2)
    WRITE(5,1010) X,REX,FUNC_Vw(X),FUNC_U(X),TAO,Cf
write(*,*) X,Cf
ELSE
  Imp=Imp+1
END IF
  IF (u(2,2).LT.0.0D0) THEN
    WRITE(*,*) 'INVERSION DE FLUJO'
    GOTO 2
  END IF
END DO
!! Distribución de velocidades u y v
2    WRITE(3,1000) X,(u(2,n),n=1,Nmax,NYimp)
    WRITE(4,1000) X,(v(2,n),n=1,Nmax,NYimp)

1000  FORMAT(500F10.5)
1010  FORMAT(F10.7,F10.2,2F10.4,F10.4,F10.7)
1020  FORMAT(3F10.6)
END
```



SUBROUTINA DE INVRESION DE MATRIZ TRIDIAGONAL TRIDAG.FOR

```
SUBROUTINE tridag(a,b,c,r,u,n)
INTEGER n,NMAX
REAL*8 a(n),b(n),c(n),r(n),u(n)
PARAMETER (NMAX=5001)
INTEGER j
REAL*8 bet,gam(NMAX)
if(b(1).eq.0.)pause 'tridag: rewrite equations'
bet=b(1)
u(1)=r(1)/bet
do 11 j=2,n
    gam(j)=c(j-1)/bet
    bet=b(j)-a(j)*gam(j)
    if(bet.eq.0.)pause 'tridag failed'
    u(j)=(r(j)-a(j)*u(j-1))/bet
11 continue
do 12 j=n-1,1,-1
    u(j)=u(j)-gam(j+1)*u(j+1)
12 continue
return
END
```