

Problemas sobre verificación de programas
Profesor Jonatan Gómez

1. Sea C el siguiente segmento de código:

```
a := a + 1
j := a * j
a := j + a
```

Determine cuáles de las siguientes ternas son válidas, en tal caso demuestrelo, sino muestre un contra ejemplo:

1. $\{a = 3 \wedge j = 1\} C \{a = 8 \vee j = 3\}$

$\{a0 = 3 \wedge j0 = 1\} \quad a1 = a0 + 1 \quad \{a1 = 4 \wedge j0 = 1\}$
 $\{a1 = 4 \wedge j0 = 1\} \quad j1 = a1 * j0 \quad \{a1 = 4 \wedge j1 = 4\}$
 $\{a1 = 4 \wedge j1 = 4\} \quad a2 = a1 + j1 \quad \{a2 = 8 \wedge j1 = 4\}$

Como se cumple que $a2 = 8$ entonces la terna es válida.

2. $\{a \geq 3 \wedge j = 2\} C \{j > 8\}$

$\{a0 = 3 \wedge j0 = 2\} \quad a1 = a0 + 1 \quad \{a1 = 4 \wedge j0 = 2\}$
 $\{a1 = 4 \wedge j0 = 2\} \quad j1 = a1 * j0 \quad \{a1 = 4 \wedge j1 = 8\}$
 $\{a1 = 4 \wedge j1 = 8\} \quad a2 = a1 + j1 \quad \{a2 = 12 \wedge j1 = 8\}$

Para probar que esta terna no es válida demostramos que con $a0 = 3 \wedge j0 = 2$ no se cumple la poscondición $j1 > 8$.

3. $\{a > 3 \wedge a < 5 \wedge j = 2\} C \{j > 8 \wedge j < 12\}$

$\{3 < a0 < 5 \wedge j0 = 2\} \quad 3 + 1 < a0 + 1 < 5 + 1 \quad \{4 < a1 < 6 \wedge j0 = 2\}$
 $\quad \quad \quad a1 = a0 + 1$
 $\{4 < a1 < 6 \wedge j0 = 2\} \quad 4 * j0 < a1 * j0 < 6 * j0 \quad \{3 < a1 < 5 \wedge 8 < j1 < 12\}$
 $\quad \quad \quad 8 < a1 * j0 < 12$
 $\quad \quad \quad j1 = a1 * j0$

Como demostramos que se cumple $8 < j1 < 12$ entonces la terna es válida.

4. $\{a > 5 \wedge j < 3\} C \{a < 40 \vee j < 40\}$

$\{a0 = 20 \wedge j0 = 2\} \quad a1 = a0 + 1 \quad \{a1 = 21 \wedge j0 = 2\}$
 $\{a1 = 21 \wedge j0 = 2\} \quad j1 = a1 * j0 \quad \{a1 = 21 \wedge j1 = 42\}$
 $\{a1 = 21 \wedge j1 = 42\} \quad a2 = a1 + j1 \quad \{a2 = 63 \wedge j1 = 42\}$

Para que probar que la terna no es válida demostramos que $a0 = 20 \wedge j0 = 2$ no cumple la poscondición, por lo tanto nos sirve como contra ejemplo.

5. **$pre C \{a = 10\}$**

$$\begin{aligned}
 &\{a0 = 10\} a2 = a1 + j1 \{ j1 = 10 - a1 \} \\
 &\quad 10 = a1 + j1 \\
 &\{ j1 = 10 - a1 \} \quad j1 = a1 * j0 \quad \{ (a0 + 1)(j0 + 1) \} \\
 &\quad 10 - a1 = a1 * j0 \\
 &\quad 10 = a1 (j0 + 1) \\
 &\quad a1 = a0 + 1 \\
 &\{ (a0 + 1)(j0 + 1) \} C \{a0 = 10\} \quad \mathbf{R.}
 \end{aligned}$$

6. **$\{a = 3 \wedge j > 1 \wedge j < 5\} C post$**

$$\begin{aligned}
 &\{ a0 = 3 \wedge 1 < j0 < 5 \} a1 = a0 + 1 \{ a1 = 4 \wedge 1 < j0 < 5 \} \\
 &\{ a1 = 4 \wedge 1 < j0 < 5 \} \quad 1 < j0 < 5 \quad \{ a1 = 4 \wedge 4 < j1 < 20 \} \\
 &\quad j1 = a1 * j0 \\
 &\quad a1 < a1 * j0 < 5a1 \\
 &\quad 4 < j1 < 20 \\
 &\{ a1 = 4 \wedge 4 < j1 < 20 \} \quad a2 = a1 + j1 \quad \{ 8 < a2 < 24 \wedge 4 < j1 < 20 \} \\
 &\quad 4 < j1 < 20 \\
 &\quad a1 + 4 < a1 + j1 < a1 + 20 \\
 &\quad 8 < a2 < 24 \\
 &\{ a0 = 3 \wedge 1 < j0 < 5 \} C \{ 8 < a2 < 24 \wedge 4 < j1 < 20 \} \quad \mathbf{R.}
 \end{aligned}$$

2. Si $x + y \leq z$ entonces

$$x = y + z \quad \text{sino}$$

$$y = x + z$$

fin_si

Determine cuales de las siguientes ternas son válidas, en tal caso demuéstrelas, sino muestre un contra ejemplo:

1. **$\{x = 3 \wedge y = 6 \wedge z = 9\} D \{x = 15 \wedge y = 6 \wedge z = 9\}$**

$$\begin{aligned}
 &\{ x = 3 \wedge y = 6 \wedge z = 9 \} \text{ si } (x + y \leq z) \{ x = 15 \wedge y = 6 \wedge z = 9 \} \\
 &\quad 3 + 6 \leq 9 \\
 &\quad x = y + z \\
 &\quad x = 9 + 6
 \end{aligned}$$

La terna es valida pues la poscondición se cumple para la entrada dada.

2. **$\{x = 3 \wedge y = 4 \wedge z = 3\} D \{x = 3 \wedge y = 6 \wedge z = 3\}$**

$$\{ x = 3 \wedge y = 4 \wedge z = 3 \} \text{ si } (x + y \leq z) \{ x = 3 \wedge y = 6 \wedge z = 3 \}$$

$$\begin{aligned}
&3 + 4 \leq 3 \\
&x = y + z \text{ no se ejecuta} \\
&\text{sino} \\
&y = x + z \\
&y = 3 + 3 \\
&y = 6
\end{aligned}$$

La terna es valida pues se cumple la poscondición para la entrada dada.

3. $\{x > z \wedge y > 0\} D \{y > x\}$

La terna no es valida y lo podemos demostrar con el siguiente contra ejemplo:

$$\begin{aligned}
\{x = 5 \wedge y = 2 \wedge z = -4\} \text{ si } (x + y \leq z) \{x = 5 \wedge y = 1 \wedge z = -4\} \\
5 + 2 \leq -4 \\
x = y + z \text{ no se ejecuta} \\
\text{sino} \\
y = x + z \\
y = 5 + (-4) \\
y = 1
\end{aligned}$$

Como podemos notar no se cumple la condición $y > x$.

Complete las siguientes ternas en las cuales hace falta la precondition o la poscondición:

4. $\text{pre } D \{x = 4 \wedge y = 10 \wedge z = 6\}$

$$\begin{aligned}
\{x = 4 \wedge y = 10 \wedge z = 6\} y = x + y \vee x = y + z \{y > 2\} \\
x + y > z \\
\{x = 4 \wedge y = 10 \wedge z = 6\} D \{x = 4 \wedge y > 2 \wedge z = 6\}
\end{aligned}$$

5. $\{x = 10 \wedge y = 20 \wedge z = -5\} D \text{post}$

$$\begin{aligned}
\{x = 10 \wedge y = 20 \wedge z = -5\} \text{ si } (x + y \leq z) \{x = 10 \wedge y = 5 \wedge z = -5\} \\
10 + 20 \leq -5 \\
x = y + z \text{ no se ejecuta} \\
\text{sino} \\
y = 10 + (-5) \\
y = 10 + (-5) \\
y = 5
\end{aligned}$$

6. $\text{pre } D \{x = y\}$

3. Encuentre un segmento de código C que cumpla con la siguiente especificación:

$$\{ \} C \{ a = a_{\alpha} + b_{\alpha} \wedge b = a_{\alpha} - b_{\alpha} \}$$

La terna que cumple con la especificación es la siguiente:

$$\{ \} \quad \{ a = a_{\alpha} + b_{\alpha} \wedge b = a_{\alpha} - b_{\alpha} \}$$

temp = a; a = a+b; b = temp-b;

La demostración es la siguiente:

$$\{ \} \quad \{ temp = a_{\alpha} \}$$

temp = a; (regla de asignación)

$$\{ temp = a_{\alpha} \} \quad \{ temp = a_{\alpha} \wedge a = a_{\alpha} + b_{\alpha} \}$$

a = a+b; (regla de asignación)

$$\{ temp = a_{\alpha} \wedge a = a_{\alpha} + b_{\alpha} \}$$

b = temp-b;

$$\{ temp = a_{\alpha} \wedge a = a_{\alpha} + b_{\alpha} \wedge b = temp - b_{\alpha} \}$$

(regla de asignación)

$$(temp = a_{\alpha} \wedge a = a_{\alpha} + b_{\alpha} \wedge b = temp - b_{\alpha}) \rightarrow$$

$$(a = a_{\alpha} + b_{\alpha} \wedge b = a_{\alpha} - b_{\alpha})$$

(simplificación, igualdad)

$$\{ temp = a_{\alpha} \wedge a = a_{\alpha} + b_{\alpha} \}$$

b = temp-b;

$$\{ a = a_{\alpha} + b_{\alpha} \wedge b = a_{\alpha} - b_{\alpha} \}$$

(debilitamiento post. 3,4)

$$\{ \} \quad \{ temp = a_{\alpha} \wedge a = a_{\alpha} + b_{\alpha} \}$$

temp = a; a = a+b; (encadenamiento 1,2)

$$\{ \} \quad \{ a = a_{\alpha} + b_{\alpha} \wedge b = a_{\alpha} - b_{\alpha} \}$$

temp = a; a = a+b; b = temp-b;

(encadenamiento 6,5)

La notación a_{α} puede ser dispendiosa y complicada, existe una notación más sencilla: la idea es usar constantes (las cuales se representan por letras mayúsculas) para indicar

los valores iniciales de las variables. Por ejemplo este problema se puede plantear de la siguiente forma:

$$\{a = A \wedge b = B\} \quad \text{temp} = a; a = a+b; b = \text{temp}-b; \\ \{a = A + B \wedge b = A - B\}$$

A y B son constantes y representan los valores iniciales de las variables a y b respectivamente. La demostración de esta terna quedaría así:

$$\{a = A \wedge b = B\} \quad \{temp = A\} \\ \text{temp} = a; \quad \text{(regla de asignación)}$$

$$\{temp = A\} \quad \{temp = A \wedge a = A + B\} \\ a = a+b; \quad \text{(regla de asignación)}$$

$$\{temp = A \wedge a = A + B\} \\ b = \text{temp}-b; \\ \{temp = A \wedge a = A + B \wedge b = temp - B\} \\ \text{(regla de asignación)}$$

$$(temp = A \wedge a = A + B \wedge b = temp - B) \rightarrow \\ (a = A + B \wedge b = A - B) \\ \text{(simplificación, igualdad)}$$

$$\{temp = A \wedge a = A + B\} \quad \{a = A + B \wedge b = A - B\} \\ b = \text{temp}-b; \\ \text{(debilitamiento post. 3,4)}$$

$$\{a = A \wedge b = B\} \quad \{temp = A \wedge a = A + B\} \\ \text{temp} = a; a = a+b; \\ \text{(encadenamiento 1,2)}$$

$$\{a = A \wedge b = B\} \\ \text{temp} = a; a = a+b; b = \text{temp}-b; \\ \{a = A + B \wedge b = A - B\} \\ \text{(encadenamiento 6,5)}$$

4. Encuentre un segmento de código C que cumpla con la siguiente especificación:

$$\{a \neq b\} C \{(m = a_\alpha - b_\alpha \vee m = b_\alpha - a_\alpha) \wedge m > 0\}$$