Capítulo Vigesimoséptimo
LA ARITMÉTICA, LO SEGUNDO

KUMMER Y DEDEKIND

Vemos, por tanto, que los factores primos ideales revelan la esencia de los números complejos, los hacen, por así decir, transparentes, y descubren su estructura cristalina interna.

E. E. Kummer.

Muchos de mis lectores quedarán grandemente disgustados al saber que por esta vulgar observación se revela el secreto de la continuidad.

R. Dedekind

Es un hecho curioso que aunque la Aritmética, la teoría de números, ha sido la madre fecunda de problemas más profundos y de métodos más poderosos que cualquier otra disciplina de la Matemáticas ha sido de ordinario considerada al margen del progreso principal, como un espectador más o menos indiferente de las grandes conquistas de la Geometría y del Análisis, particularmente en sus servicios a la ciencia física, y son pocos, relativamente, los grandes matemáticos de los últimos dos mil años que han dedicado sus más grandes esfuerzos al progreso de la ciencia del "número puro".

Muchas causas han determinado este extraño desprecio de lo que al fin y al cabo es la Matemática por excelencia. Entre éstas, tan sólo haremos notar las siguientes: la Aritmética actual está sobre un plano superior de dificultades intrínsecas respecto a los otros grandes campos de la Matemática; las aplicaciones inmediatas de la teoría de números a la ciencia son escasas y no fácilmente perceptibles en el razonamiento ordinario de los matemáticos creadores, aunque alguno de los más grandes se han dado cuenta de que la Matemática de la naturaleza será encontrada en definitiva en el comportamiento de los números enteros comunes; y, finalmente, es humano entre los matemáticos, al menos en algunos, incluyendo los más grandes, buscar la reputación y la popularidad dentro de su propia generación al cosechar los frutos más fáciles de un triunfo espectacular en el Análisis, la Geometría o la Matemática aplicada. Hasta Gauss sucumbió en la edad media de su vida.

La Aritmética moderna, después de Gauss, comenzó con Kummer. El origen de la teoría de Kummer en su intento para demostrar el último teorema de Fermat ya ha sido mencionado en otro lugar (Capítulo XXV). Algo más de la larga vida del hombre puede ser referido, antes de que nos ocupemos de Dedekind. Kummer era un típico alemán de la antigua escuela, con toda la tenaz simplicidad, bonachona naturaleza y buen humor que caracterizó una especie a punto de desaparecer. Ejemplares de museo podrán encontrarse aún, hace una generación, en cualquier jardín de una cervecería alemana de San Francisco.

Aunque Ernst Eduard Kummer (29 de junio 1810 - 14 de mayo 1893) nació cinco años antes de la declinación de Napoleón, el glorioso emperador de Francia desempeñó un importante, aunque inconsciente papel, en la vida de Kummer. Hijo de un médico de Sorau (perteneciente al principado de Brandenburgo, Alemania), Kummer perdió a su padre cuando tenia tres años. Los restos del gran ejército de Napoleón, al pasar a través de Alemania en su retirada, dejaron en ella el característico azote ruso del tifus, que se extendió fácilmente entre los higiénicos alemanes. El médico, sobrecargado de trabajo, contrajo la enfermedad, murió de ella y dejó a Ernst y a un hermano mayor al cuidado de su viuda. El joven Kummer creció en una terrible pobreza, pero su madre pudo lograr que su hijo ingresara en el Instituto local. La arrogancia y los abusos de la Francia napoleónica, no menos que el recuerdo de su padre, que la madre mantuvo vivo, hizo del joven Kummer un patriota extraordinariamente práctico, y con extraordinario placer dedicó gran parte de su soberbio talento científico a enseñar balística a los oficiales del ejército alemán en la Escuela de Guerra de Berlín. Muchos de sus discípulos dieron muestra de los conocimientos adquiridos en la guerra franco-prusiana.

Teniendo 18 años (1828), Kummer fue enviado por su madre a la Universidad de Halle para estudiar teología. Debido a su pobreza, Kummer no residía en la Universidad, sino que tenía que trasladarse a pie todos los días desde Sorau a Halle, llevando sus libros en una mochila. Respecto a sus estudios teológicos Kummer hace la interesante observación de que es más o menos una cuestión de casualidad o del ambiente que una mente con dotes para la especulación abstracta se dirija a la filosofía o a la Matemática. La casualidad en este caso fue la presencia en Halle de Heinrich Ferdinand Scherk (1798-1885) como profesor de Matemática. Scherk era más bien un hombre montado a la antigua, pero tenía entusiasmo por el Álgebra y por la teoría de números, que contagió al joven Kummer. Guiado por Scherk, Kummer pronto abandonó sus estudios morales y teológicos en favor de la Matemática. Repitiendo las palabras de Descartes, Kummer dijo que prefería la Matemática a la filosofía debido a que "los simples errores y los falsos conceptos no pueden intervenir en la Matemática". Si Kummer hubiera vivido actualmente quizá habría modificado su juicio, pues era un hombre de mente amplia, y las presentes tendencias filosóficas en la Matemática son algunas veces residuos curiosos de la teología medieval. En su tercer año de la Universidad Kummer resolvió un problema de Matemática para el que se había concedido un premio, y obtuvo su título de doctor (10 de septiembre de 1831) a la edad de 21 años. Como a la sazón no había cargos universitarios vacantes, Kummer comenzó su carrera como profesor en su antiguo Instituto.

En 1832 se trasladó a Liegnitz, donde enseñó durante diez años en el Instituto. Fue aquí donde inició a Kronecker en su revolucionaria carrera. Por fortuna Kummer no estaba en condiciones tan difíciles como aquéllas en que se encontró Weierstrass en circunstancias similares, y pudo ser capaz de pagar el franqueo para su correspondencia científica. Los matemáticos eminentes (incluyendo Jacobi), a quienes Kummer participó sus descubrimientos matemáticos, vieron que el joven genio profesor de Instituto, debería ser llevado a un cargo más elevado en la primera oportunidad, y en 1842 Kummer fue nombrado profesor de Matemática en la Universidad de Breslau. Allí enseñó hasta 1855, cuando la muerte de Gauss ocasionó una extensa modificación en el mapa matemático de Europa.

Se ha dicho que Dirichlet se hallaba contento en Berlín, entonces la capital matemática del mundo. Pero cuando Gauss murió, Dirichlet no pudo resistir la tentación de suceder al príncipe de los matemáticos, su primer maestro, como profesor en Göttingen. Hasta hoy la gloria de ser "un sucesor de Gauss" ha ejercido una atracción casi irresistible para los matemáticos, que podían ganar más en otros cargos, y hasta hace muy poco tiempo Göttingen era elegido por los mejores.

La estimación de que gozaba Kummer entre sus compañeros puede juzgarse por el hecho de que fue propuesto unánimemente para suceder a Dirichlet en Berlín. Desde que tenía 29 años había sido miembro correspondiente de la Real Academia de Berlín. Ahora (1855), sucedió a Dirichlet en la Universidad y en la Academia, y fue también nombrado profesor en la Escuela de Guerra de Berlín.

Kummer fue uno de esos raros genios científicos que muestran su capacidad para la Matemática más abstracta, para sus aplicaciones de los problemas prácticos, incluyendo la guerra, que es la menos práctica de todas las tonterías humanas y, finalmente, para la física experimental. Su obra más importante pertenece a la teoría de números, donde su profunda originalidad le llevó a invenciones de una importancia de primer orden, pero en otros campos, el Análisis, la Geometría y la física aplicada, su labor fue también sobresaliente.

Aunque las conquistas de Kummer en la Aritmética superior fueron de un tipo que justifica compararle con los creadores de la Geometría no euclidiana, tenemos la impresión, al examinar su larga vida de 83 años, que aunque sus investigaciones fueran espléndidas, no llegó a realizar todo lo que podía haber hecho. Posiblemente, su falta de ambición personal (un ejemplo será mencionado ahora), su genialidad tranquila y su amplio sentido del humor evitó que intentara batir su propio récord.

Mucho de lo que Kummer hizo en la teoría de números lo hemos dicho en el capítulo sobre Kronecker: *restituyó el teorema fundamental de Aritmética a aquellos campos numéricos algebraicos que surgen era el intento de probar el último teorema de Fermat y en la teoría gaussiana de la ciclotomía, y efectuó esta restitución mediante la creación de una especie de números completamente nueva, los llamados "números ideales".* Continuó también la obra de Gauss sobre la ley de reciprocidad bicuadrática, y buscó las leyes de reciprocidad para grados superiores al cuarto.

Como se ha mencionado en capítulos precedentes, los "números ideales" de Kimznier han sido ahora ampliamente desplazados por los "ideales" de Dedekind, que explicaremos cuando lleguemos a ellos, de modo que no es necesario intentar aquí la casi imposible proeza de explicar en lenguaje no técnico lo que son los "números" de Kummer. Pero lo que consiguió gracias a ellos puede ser expuesto con suficiente exactitud en un libro como el presente. Kummer *demostró* que

$$x^p + y^p = z^p$$

donde p es un primo, es imposible en enteros x, y, z diferentes de cero, para toda una clase muy extensa de primos p. No consiguió demostrar el teorema de Fermat para *todos los* primos; ciertos primos excepcionales escapaban de las redes de Kummer, y siguen escapando. De todos modos, el paso que dio superó en mucho a todos los dados por los predecesores de Kummer, y éste se hizo famoso casi a pesar suyo. Recibió un premio al cual no se había presentado.

El informe de la Academia Francesa de Ciencias para el concurso al "Gran Premio" en 1857 es el siguiente. "Informe sobre el concurso para el Gran Premio en Ciencia Matemática. El concurso fue abierto para el año 1853 y prorrogado para 1856. No habiendo encontrado la comisión una obra que sea digna del premio entre los que lo solicitaron propone a la Academia premiar a M. Kummer por sus bellas investigaciones sobre los números complejos compuestos de raíces de la unidad[1] y números enteros." La Academia aceptó esta proposición.

La primera obra de Kummer sobre el último teorema de Fermat está fechada en octubre de 1835. Esta obra fue seguida por nuevos trabajos en 1844 a 1847, el último de los cuales se tituló *Demostración del teorema sobre la imposibilidad de* $x^p + y^p = z^p$ *para un número infinito*[2]*, de primos p.* Continuó añadiendo perfeccionamientos a su teoría, incluyendo su aplicación a las leyes de reciprocidad superior, hasta 1874, cuando ya tenía 64 años.

Aunque estas investigaciones notablemente abstractas fueron el campo de su máximo interés, y aunque Kummer decía de sí mismo "para describir más exactamente mi actitud científica personal más exactamente, puedo considerarla como *teorética...;* me he dedicado particularmente a ese conocimiento matemático que encuentra su propia esfera en la Matemática, sin referencia a las aplicaciones". Kummer no era un estrecho especialista. Lo mismo que Gauss, parecía obtener igual placer en la ciencia pura que en la ciencia aplicada. Gauss, en efecto, fue, a través de sus obras, el maestro real de Kummer y el distinguido discípulo demostró su capacidad extendiendo la obra del maestro a las series hipergeométricas, añadiendo a lo que Gauss había hecho mejorías sustanciales que hoy son de gran utilidad en la teoría de las ecuaciones diferenciales que se presentan más frecuentemente en la física matemática.

Además, la magnífica obra de Hamilton sobre los sistemas de rayos (en óptica) inspiró a Kummer una de sus invenciones más bellas, la de la superficie de cuarto grado, que es conocida con su nombre, y que desempeña un papel fundamental en la Geometría del espacio euclidiano, cuando ese espacio es de cuatro dimensiones (en lugar de tres, como ordinariamente lo imaginamos), tal como sucede cuando se admite que los elementos irreductibles de que está constituido el espacio son líneas rectas en lugar de puntos. Esta superficie (y sus generalizaciones a espacios superiores) ocupó el centro del escenario en la Geometría del siglo XIX; encontrándose (por Cayley) que era representable (paramétricamente, véase capítulo sobre Gauss) por medio de las funciones periódicas cuádruples, a las cuales Jacobi y Hermite dedicaron sus mejores esfuerzos.

Muy recientemente (1934) Sir Arthur Eddington observó que la superficie de Kummer es una especie de pariente de la ecuación ondulatoria de Dirac en la mecánica cuántica (ambas tienen el mismo grupo finito; la superficie de Kummer es la superficie ondulatoria en el espacio de cuatro dimensiones).

Para completar el círculo, Kummer fue llevado, por su estudio de la sistemática de los rayos, a la física, e hizo importantes contribuciones a la teoría de la refracción atmosférica. En la Escuela de Guerra asombró al mundo científico al aparecer como un experimentador de primera categoría en

[1] Si $x^p + y^p = z^p$, entonces $x^p = z^p - y^p$, y descomponiendo $z^p - y^p$, en sus factores p de primer grado, tendremos

$$x^p = (z - y)(z - ry)(z - r^2 y) \ldots (z - r^{p-1} y)$$

en la que r es una raíz p-sima de unidad (diferente de l), o sea $t^p - 1 = 0$, con r no igual a 1. Los enteros algebraicos en el campo del grado p engendrado por r son los que Kummer introdujo en el estudio de la ecuación de Fermat, y que le llevó a la invención de sus "números ideales" para restablecer la factorización única en el campo; un entero en tal campo no es únicamente el producto de primos en el campo para todos los primos p.

[2] El "infinito" en el título de Kummer está aún (1936) injustificado; la palabra "gran" debe sustituir a la palabra "infinito".

su obra sobre balística. Coa su característico humor, Kummer se excusó por esta desviación a sus aficiones matemáticas. "Cuando abordo un problema experimentalmente, dijo a un joven amigo, es una prueba de que el problema es matemáticamente inexpugnable".

Recordando sus propias luchas de los primeros años, así como los sacrificios de su madre, Kummer no sólo fue un padre para sus discípulos, sino un hermano para los padres de sus alumnos. Millares de jóvenes agradecidos que habían recibido la ayuda de Kummer en la Universidad de Berlín y en la Escuela de Guerra, le recordaron siempre como un gran maestro y un gran amigo. En una ocasión, un joven matemático que se trasladaba a Berlín para obtener su título de doctor, se vio atacado de viruela, y tuvo que volver a su hogar, en Posen, cerca de la frontera rusa. Nada se sabía de él, pero era evidente que estaba sumido en la mayor pobreza. Cuando Kummer oyó decir que el pobre joven probablemente no podría lograr asistencia buscó a un amigo del estudiante, le dio el dinero necesario, y le envió a Posen para que hiciera lo que le fuera posible. En la enseñanza Kummer era famoso por recurrir a símiles vulgares y graciosos. Así, para dar importancia a un factor particular en una cierta frase dijo: "si descuidáis este factor sería como si un hombre que está comiendo una ciruela se tragase el hueso y escupiera la pulpa".

Los últimos nueve años de la vida de Kummer transcurrieron en completo aislamiento. "Nada se encontrará en mis trabajos póstumos", dijo, pensando en las numerosas obras que Gauss dejó para que fueran publicadas después de su muerte. Rodeado por su familia (,nueve hijos le sobrevivieron), Kummer abandonó la Matemática en su retiro, y, salvo algunos viajes a los lugares donde transcurrió su adolescencia, vivió en el más estricto aislamiento. Murió después de un breve ataque de gripe el 14 de mayo de 1893, cuando tenía 83 años.

El sucesor de Kummer en Aritmética fue Julius Wilhelm Richard Dedekind (más tarde prescindió de los dos primeros nombres), uno de los más grandes matemáticos y uno de los más originales que Alemania o cualquier otro país ha producido. Igual que Kummer, Dedekind tuvo una larga vida (6 de octubre de 1831 a 12 de febrero de 1916), y permaneció matemáticamente activo hasta poco antes de su muerte. Cuando murió, en 1916, Dedekind había sido una autoridad en Matemática durante toda una generación. Como Edmund Landau (un amigo y continuador de Dedekind en una parte de su obra) dijo en su discurso conmemorativo ante la Real Sociedad de Göttingen en 1917, "Richard Dedekind no sólo fue un gran matemático, sino uno de los más grandes en la historia de la Matemática, ahora y en el pasado, el último héroe de una gran época, el último discípulo de Gauss, que durante cuatro décadas fue el ejemplo no sólo de los que ahora trabajamos sino también de nuestros maestros y de los maestros de nuestros maestros".

Richard Dedekind, el menor de los cuatro hijos de Julius Levin Ulrich Dedekind, profesor de leyes, nació en Brunswick, el lugar del nacimiento de Gauss[3]. Desde la edad de siete años hasta los dieciséis, Richard estudió en la escuela secundaria de su ciudad natal. No dio pruebas precoces de su extraordinario genio matemático, pues sus primeros amores fueron la física y la química, y consideró la Matemática como la sirvienta o la fregona de las ciencias. Pero realmente no caminó en la oscuridad. Cuando tenía diecisiete años, al encontrar errores en los razonamientos de la física, se dirigió a la Matemática para hallar una lógica menos objetable. En 1848 ingresó en el Colegio Carolino, la misma institución que dio al joven Gauss una oportuni-

[3] No ha aparecido aún una buena biografía de Dedekind. Su vida debía haber sido incluida en el tercer volumen de sus obras completas (1932), pero no ocurrió así a consecuencia de la muerte del editor principal Robert Fricke. El relato que aquí aparece está basado sobre el discurso conmemorativo de Landau. Obsérvese que siguiendo la buena y vieja costumbre teutónica de algunos biógrafos alemanes, Landau omite toda mención de la madre de Dedekind. No hay duda de que de acuerdo con la teoría de las "tres k", defendida por el Káiser alemán y cordialmente admitida por Adolf Hitler, "todo el deber de una mujer está definido por las tres grandes k, Kissin, Kookin y Kids" [besos, cocina y niños]. Me agradaría conocer, al menos, el nombre de soltera de la madre del gran hombre.

dad para instruirse por sí mismo en Matemática. En el colegio, Dedekind aprendió los elementos de Geometría analítica, del Álgebra, del Cálculo y de la mecánica "superior". Estaba, pues, bien preparado para comenzar un estudio serio cuando ingresó en la Universidad de Göttingen en 1850, teniendo 19 años. Sus maestros principales fueron Moritz Abraham Stern (1807-1894), quien escribió ampliamente sobre la teoría de números, Gauss y Wilhelm Weber, el físico. De estos tres hombres Dedekind aprendió la base para el estudio del Cálculo infinitesimal, la Aritmética superior, los mínimos cuadrados, la geodesia superior y la física experimental.

En su vida posterior, Dedekind se lamentó que la instrucción matemática que se daba durante sus años de estudiante en Göttingen, aunque adecuada a las escasas exigencias necesarias para lograr el certificado de maestro, era pobre como preparación para una carrera matemática. Temas de vital interés no eran tocados, y Dedekind tuvo que emplear dos años de ardua labor después de obtener su título para instruirse por sí mismo en las funciones elípticas, la Geometría moderna, el Álgebra superior y la física matemática, materias todas que en aquel tiempo eran brillantemente explicadas en Berlín por Jacobi, Steiner y Dirichlet. En 1852 Dedekind obtuvo su título de doctor (a los 21 años) de manos de Gauss, por una breve disertación sobre integrales eulerianas. No hay necesidad de explicar qué son estas integrales; la disertación fue un trabajo útil e independiente, pero no delataba el genio como lo delata cualquier otra página de los muchos trabajos posteriores de Dedekind. La opinión de Gauss sobre la disertación tiene cierto interés: "La memoria preparada por Herr Dedekind se refiere a una investigación en el Cálculo integral, y no es en modo alguno una cosa vulgar. El autor muestra no sólo un buen conocimiento de estas importantes cuestiones, sino también una independencia de juicio que es un anuncio favorable de sus seguros triunfos. Como ensayo para ser admitido al examen encuentro esta memoria completamente satisfactoria". Evidentemente Gauss vio más en esta disertación que lo que descubrieron algunos de los críticos posteriores; posiblemente, su íntimo contacto con el joven autor le capacitó para leer entre líneas. De todos modos, el informe es más o menos el habitual y cortés documento para aceptar una disertación pasable, y no sabemos si Gauss realmente previó la penetrante originalidad de Dedekind.

En 1854 Dedekind fue nombrado *Privatdozent* en Göttingen, cargo que mantuvo durante cuatro años. A la muerte de Gauss, en 1855, Dirichlet se trasladó desde Berlín a Göttingen. Durante los tres años restantes de su permanencia en Göttingen, Dedekind asistió a las más importantes conferencias de Dirichlet. Más tarde, colaboró en el famoso tratado de Dirichlet sobre la teoría de números añadiendo a él el importantísimo "Suplemento undécimo", que contiene un esquema de su propia teoría de los números algebraicos. Fue también amigo del gran Riemann, que entonces comenzaba su carrera. Las conferencias universitarias de Dedekind fueron en su mayor parte elementales, pero en 1857-1858, dio un curso (a dos estudiantes, Selling y Auwers) sobre la teoría de Galois de las ecuaciones. Esta fue probablemente la primera vez que la teoría de Galois apareció formalmente en un curso universitario. Dedekind fue uno de los primeros en apreciar la importancia fundamental del concepto de grupo en Álgebra y Aritmética. En su primera obra Dedekind ya mostró dos de las principales características de su pensamiento, la abstracción y la generalización. En lugar de considerar un grupo finito desde el punto de vista de su representación mediante sustituciones (véase capítulo sobre Galois y Cauchy) Dedekind definió los grupos por medio de sus postulados (sustancialmente descritos en el capítulo XV), y buscó derivar sus propiedades de esta destilación de su esencia. A la manera moderna esto es abstracción, y por tanto, generalización. La segunda característica, la generalización, es justamente una consecuencia de la primera.

A la edad de 26 años Dedekind fue nombrado (en 1857) profesor ordinario en el Politécnica de Zurich, donde permaneció cinco años, volviendo en 1862 a Brunswick como profesor de la

Escuela Técnica Superior. Allí estuvo durante medio siglo. La tarea más importante para el biógrafo oficial de Dedekind, si es que llega tener alguno, será explicar el hecho singular de que Dedekind haya ocupado un cargo relativamente oscuro durante cincuenta años, mientras hombres muy inferiores a él desempeñaron cátedras importantes en la Universidad. Decir que Dedekind prefirió la oscuridad es una explicación como cualquier otra.

Hasta su muerte (1916), cuando tenía 85 años, Dedekind permaneció con la mente fresca y robusto de cuerpo. Jamás se casó, y vivió con su hermana Julie, conocida novelista, hasta su muerte en 1914. Su otra hermana Mathilde murió en 1860; su hermano fue un distinguido jurista.

Tales son los hechos de mayor importancia en la carrera material de Dedekind. Vivió tanto tiempo que aunque algunas de sus obras (su teoría del número irracional, que ahora explicaremos) ha sido familiar a todos los estudiosos del análisis durante una generación antes de su muerte, el propio Dedekind constituyó casi una figura legendaria, que muchos consideraron como una sombra. Doce años antes de su muerte, en el *Calendario para Matemáticos* de Teubner se dijo que Dedekind había muerto el 4 de septiembre de 1899, provocando el regocijo del supuesto muerto. "Quizá resulte exacto el día 4 de septiembre, escribía Dedekind, pero seguramente está equivocado el año. Me parece recordar que he pasado ese día en perfecta salud, gozando de una agradable conversación sobre "sistema y teoría" con mi huésped y excelente amigo George Cantor de Halle".

La actividad matemática de Dedekind se desarrolló casi completamente en el dominio de los números en su más amplio sentido. Sólo tenemos espacio para dos de sus grandes contribuciones, y describiremos primeramente su trabajo fundamental, el de la "cortadura de Dedekind", la teoría del número irracional, y por tanto los fundamentos del Análisis. Por ser de esencial importancia recordaremos brevemente la naturaleza de la cuestión. Si *a, b* son números enteros comunes, la fracción *a/b* se llama un *número racional; si* no existen números ent*eros m, n* tales que cierto "número" *N* sea expresable como *m/n,* entonces *N* se llama un *número irracional.* Así $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ son números, irracionales. Si se expresa un número irracional en forma decimal, los dígitos que siguen al punto decimal no presentan regularidades: no hay período que se repita, como en las representaciones decimales de un número racional, o sea 13/11 = 1.181818... donde el "18" se repite indefinidamente. Como entonces, si la representación carece completamente de ley ¿tenemos acaso una clara concepción de lo que es un número irracional? Eudoxio pensaba que la tenía y la definición de Dedekind de la igualdad de dos números, racionales o irracionales, es idéntica a la de Eudoxio (véase Capítulo II).

Si dos números racionales son iguales, no hay duda de que sus raíces cuadradas son iguales. Así, 2×3 y 6 son iguales, así, también, lo son $\sqrt{2\times 3}$ y $\sqrt{6}$. Pero *no* es evidente que

$$\sqrt{2}\times\sqrt{3} = \sqrt{2\times 3}$$

y por tanto que $\sqrt{2}\times\sqrt{3} = \sqrt{6}$. La no evidencia de esta simple igualdad aceptada, $\sqrt{2}\times\sqrt{3} = \sqrt{6}$, dada por admitida en la Aritmética elemental, es evidente si nos representamos lo que la igualdad implica: se extraen las raíces cuadradas "sin ley" de 2, 3, 6, las dos primeras se multiplican entre sí, y el resultado obtenido será igual a la tercera. Como ninguna de estas tres raíces se puede extraer exactamente, por muy grande que sea el número de cifras decimales que calculemos, es evidente que la comprobación por multiplicación jamás será completa. Toda la raza humana podría trabajar incesantemente durante toda su existencia, y jamás *probaría* de esta forma que $\sqrt{2} \times \sqrt{3} = \sqrt{6}$. Aproximaciones cada vez mayores a la igualdad podrían ser alcanzadas con el tiempo, pero nunca se llegaría al fin. Precisar estos conceptos de "aproximación" e "igualdad" y reemplazar nuestros primeros y toscos conceptos de los irracionales por descripciones más exactas que salven las dificultades indicadas, fue la tarea a que Dedekind se dedicó en el año 1870. Su trabajo sobre *Continuidad y Números irracionales* fue publicado en 1872.

El núcleo de la teoría de Dedekind de los números *irracionales* es su concepto de "cortadura". Una cortadura es una separación de *todos los* números racionales en *dos* clases, de modo que cada número de la *primera* clase sea *menor* que cada número de la *segunda* clase. Cada cortadura que no "corresponde" a un número racional "define" un número irracional. Este escueto enunciado necesita una elaboración, particularmente por el hecho de que incluso una exposición exacta, encierra ciertas dificultades sutiles enraizadas en la teoría del infinito matemático, que reaparecerán cuando consideremos la vida de Cantor, amigo de Dedekind.

Acéptese que se ha dado alguna regla tal que todos los números racionales se puedan agrupar en dos clases, o sea una clase "superior" y una clase "inferior", tales que todo número en la clase *inferior* es *menor que* todo número de la clase *superior.* (Tal suposición no pasaría actualmente sin ser discutida por las escuelas de filosofía matemática. Sin embargo, por el momento puede ser considerada como inobjetable).

Sobre esta suposición es posible una de las tres situaciones que se excluyen recíprocamente:

A. Puede haber un número en la clase *inferior* que sea mayor que cualquier otro número en esa clase.
B. Puede haber un número en la clase *superior* que sea menor que cualquier otro número en esa clase.
C. (C) Ninguno de los números *(mayor* en A, *menor* en B) descritos en (A), (B) puede existir.

La posibilidad que conduce a los números irracionales es (C). Si se mantiene (C), la regla admitida "define" una cortadura en el campo de todos los números racionales. Las clases superior e inferior se esfuerzan, por así decir, en encontrarse. Pero para que las clases se encuentren, hay que llenar la cortadura con algún "número", y por (C) no es posible ese relleno.

Aquí recurriremos a la intuición. Todas las distancias y medidas desde cualquier punto fijo a lo largo de una línea recta dada "corresponden" a "números" que "miden" las distancias. Si la cortadura se deja sin llenar, debemos describir la línea recta, que podemos concebir trazada por el movimiento continuo de un punto, como teniendo en ella una sima infranqueable. Esto viola nuestros conceptos intuitivos, de modo que decimos, por definición, que cada cortadura *define* un número. El número así definido no es racional; es irracional. Para proporcionar un esquema utilizable para actuar con los *irracionales* así *definidos por cortaduras* del tipo (C) consideraremos ahora la *clase inferior de los racionales* en (C) como equivalentes al irracional que define la cortadura.

Un ejemplo bastará. La raíz cuadrada *irracional* de 2 se define por la cortadura cuya clase superior contiene *todos los* números racionales positivos cuyos cuadrados son mayores que 2, y cuya clase inferior contiene *todos los* restantes números *racionales.*

Si el concepto algo ilusorio de la cortadura no agrada pueden ser sugeridos dos remedios: idear una definición de irracionales que sea menos mística que la de Dedekind y perfectamente utilizable; seguir a Kronecker y negar que exista números irracionales, reconstruyendo la

Matemática sin ellos. En el presente estado de la Matemática es conveniente alguna teoría de irracionales. Pero dada la naturaleza de un número irracional, parecería necesario comprender totalmente el infinito matemático antes de que sea posible una adecuada teoría de irracionales. El recurso de apelar a las clases infinitas es evidente en la definición de la cortadura de Dedekind. Tales clases conducen a graves dificultades lógicas.

Depende del nivel del refinamiento del matemático como individuo que considere estas dificultades como importantes o como triviales para el desarrollo consecuente de la Matemática. El valeroso análisis marcha audazmente a la cabeza, acumulando una Babel sobre otra, y confiando en que ningún Dios de la razón ultrajado le confundirá a él y a sus obras, mientras el lógico crítico, examinando cínicamente los cimientos del imponente rascacielos de su hermano, hace un rápido cálculo mental para predecir la fecha del derrumbe. Mientras tanto todos están atareados y gozosos. Pero una conclusión parece ser inevitable: Sin una teoría coherente del infinito matemático no hay teoría de irracionales; sin una teoría de irracionales no hay Análisis matemático en una forma que se parezca en algo al que ahora tenemos; y, finalmente, sin Análisis la mayor parte de la Matemática, incluyendo la Geometría y la mayor parte de la Matemática aplicada, tal como ahora existe cesaría de existir.

La tarea más importante con que se enfrentan los matemáticos parece ser, por tanto, la construcción de una teoría satisfactoria del infinito. Cantor intentó esto con el resultado que más tarde veremos. Por lo que se refiere a la teoría de Dedekind de los irracionales, su autor parece haber tenido algunos escrúpulos, pues dudó durante más de dos años antes de aventurarse a publicarla. Si el lector examina la definición de Eudoxio de "igual razón" (Capítulo II) verá que se presentan "dificultades infinitas", particularmente en la frase "equimúltiplos cualesquiera". De todos modos, se han hecho algunos progresos desde Eudoxio; estamos, al fin, comenzando a comprender la naturaleza de nuestras dificultades.

La otra contribución sobresaliente que Dedekind hizo al concepto del "número" fue en la dirección de los números algebraicos. Por lo que se refiere a la naturaleza del problema fundamental debemos recordar lo dicho en el capítulo sobre Kronecker respecto de los campos numéricos algebraicos y a la descomposición de *enteros* algebraicos en sus factores *primos.* La esencia del problema es que en alguno de tales campos la descomposición en factores primos *no es única,* como en Aritmética elemental. Dedekind restableció esta unicidad tan deseable por la invención de los que llamó *ideales.* Un ideal no es un número, sino una clase infinita de números, de modo que Dedekind venció también sus dificultades buscando refugio en el infinito.

El concepto de un ideal no es difícil de comprender, aun cuando exista una dificultad, *la clase más inclusiva divide a la menos inclusiva,* como ahora veremos que está en contra del sentido común. Sin embargo, el sentido común ha sido hecho para sufrir conmociones. Un ideal debe cumplir al menos dos cosas: debe dejar la Aritmética (racional) común substancialmente como es, y debe obligar a los recalcitrantes enteros algebraicos a obedecer esa ley fundamental de Aritmética, la descomposición *única* en primos, que esos números desafían.

El punto acerca de que una clase más inclusiva divida a una menos inclusiva se refiere al siguiente fenómeno (y a su generalización como veremos ahora). Consideremos el hecho de que 2 divide a 4, *aritméticamente,* es decir, *sin resto.* En lugar de este hecho evidente que no conduce a nada si es seguido en campos numéricos algebraicos, reemplazaremos 2 por la clase de *todos* sus múltiplos enteros..., - 8, - 6, - 4, - 2, 0, 2, 4, 6, 8... Por conveniencia denotaremos esta clase por (2). En la misma forma (4) denota la clase de *todos* los múltiplos enteros de 4. Algunos de los números en (4) son... - 16, - 12, - 8, - 4, 0, 8, 12, 16... Ahora es evidente que (2) es la clase más inclusiva; en efecto (2) contiene *todos* los números de (4), y además (para mencionar sólo dos) -6 y 6. El hecho que (2) contiene (4) se simboliza escribiendo (2)/(4). Puede apreciarse muy

fácilmente que si m, n son números enteros comunes cualesquiera, tendremos que *(m)/(n) cuando m, divide a n y sólo en este caso.*
Lo dicho puede sugerir que el concepto de divisibilidad aritmética común queda sustituido por el de inclusión de clase, tal como lo hemos explicado. Pero esta sustitución sería vana si no llegara a conservar las propiedades características de la divisibilidad aritmética. Podríamos observar detalladamente que las conserva, pero un ejemplo bastará. Si m divide n y n divide l, entonces m divide l; por ejemplo, 12 divide 24 y 24 divide 72, y 12 divide, en efecto, 72. Transferido a clases como antes, resulta: si *(m)/(n) y (n)/(l),* entonces *(m)/(l), o* sea, si la clase *(m)* contiene la clase *(n), y si* la clase (n) contiene la clase (l), entonces la clase *(m)* contiene la clase (l), lo que evidentemente es cierto. El resultado es que la sustitución de números por sus clases correspondientes responde a lo requerido cuando ampliamos la definición de "multiplicación": *(m) ´ (n)* se define como la clase *(mn);* (2) × (6) = (12). Obsérvese que lo último es una definición.
Los ideales de Dedekind para los números algebraicos son una generalización de lo que precede. Siguiendo su costumbre habitual, Dedekind dio una definición *abstracta*, es decir, una definición basada sobre propiedades esenciales más que sobre un modo contingente o particular de representar, o describir, la cosa definida.
Consideremos la serie (o clase) de *todos los enteros* algebraicos en un determinado campo numérico algebraico. En esta serie que todo lo incluye habrá subseries. Una subserie se llama un *ideal si* tiene las dos propiedades siguientes:

A. La *suma y diferencia* de dos enteros cualesquiera en la subserie están también en la subserie.
B. Si cualquier entero de la subserie se multiplica por cualquier entero de la serie que todo lo incluye, el entero resultante está en la subserie.

Un ideal es, pues, una clase infinita de enteros. Se apreciará fácilmente que *(m), (n),...* anteriormente definidos, son ideales de acuerdo con A, B. Como antes, si un ideal contiene otro, se dice que el primero divide al segundo.
Puede demostrarse que todo ideal es una clase de enteros todos los cuales son de la forma

$$x_1 a_1 + x_2 a_2 + x_3 a_3 + \ldots + x_n a_n$$

donde $a_1, a_2, .. a_n$ son enteros fijos del campo del grado n respectivo, y cada uno de los $x_1, x_2, \ldots x_n$ puede ser un entero cualesquiera siempre en el campo. Siendo así, es conveniente simbolizar un ideal mostrando sólo los enteros $a_1, a_2, .. a_n$, y esto se hace escribiendo $(a_1, a_2, .. a_n)$ como el símbolo del ideal. El orden en que $a_1, a_2, .. a_n$ están escritos en el símbolo carece de importancia.
Debemos ahora definir la "multiplicación" de ideales: el producto de los dos ideales: $(a_1, a_2, .. a_n)$, $(b_1, b_2, .. b_n)$, es el ideal cuyo símbolo es $(a_1 b_1, ..., a_1 b_n, ..., a_n b_n)$, en el cual se obtienen todos los productos posibles $a_1 b_1$, etc., multiplicando un entero del primer símbolo por un entero del segundo. Por ejemplo, el producto de (a_1, a_2) *y* $b_1, b_2)$ es $(a_1 b_1, a_1 b_2, a_2 b_1, a_2 b_2)$. Siempre es posible reducir tal símbolo-producto (para un campo de grado n) a un símbolo que contenga a lo sumo n enteros.
Una breve observación final completará el resumen de la historia. Un ideal cuyo símbolo *sólo contenga* un entero, tal como (a_1), se llama un ideal *principal*. Usando como antes la notación $(a_1)/(b_1)$ para significar que (a_1) *contiene* (b_1), podemos ver sin dificultad que $(a_1)/(b_1)$ *cuando, y sólo cuando,* el entero *al divide* el entero b_1. Como antes, pues, el concepto de divisibilidad

aritmética es aquí, para los enteros algebraicos, completamente equivalente al de la inclusión de clase. Un ideal *primo* es aquel que no es "divisible por", incluido en cualquier ideal, salvo el ideal que todo lo incluye compuesto de *todos* los enteros algebraicos en el campo dado. Los enteros algebraicos son reemplazados ahora por sus ideales principales correspondientes, lo que demuestra que un ideal dado es un producto de ideales primos tan solo en una forma, precisamente como en el "teorema fundamental de la Aritmética" un entero racional es el producto de primos tan solo en una forma. Por la equivalencia antes mencionada de la divisibilidad aritmética para enteros algebraicos e inclusión de clase, el teorema fundamental de la Aritmética ha sido restablecido para los números enteros en campos numéricos algebraicos. Quien se detenga a meditar sobre las líneas generales de la creación de Dedekind podrá ver lo que este autor hizo, exige una visión penetrante y un talento superior por lo que se refiere a la capacidad de abstracción. Dedekind fue un matemático según la expresión de Gauss: "*At nostro quidem judicio hujusmodi veritates ex notionibus potius quam ex notationibus hauriri debeant*". (Pero en nuestra opinión tales verdades [aritméticas] deben ser derivadas de conceptos más que de notaciones). Dedekind confió más en su cabeza que en un ingenioso simbolismo y en las expertas manipulaciones de fórmulas para seguir adelante. Si hubo alguien que introdujera nuevos conceptos a la Matemática ese alguien fue Dedekind, y sus sabias preferencias para las ideas creadoras sobre los símbolos estériles se aprecian ahora mejor de lo que se apreció durante su vida. Cuando más tiempo viva la Matemática, más abstracta y, posiblemente también, más práctica se hará.