Capítulo Primero
INTRODUCCIÓN

Hemos titulado esta sección introducción y no prefacio (como realmente es) con la esperanza de que lo lean quienes habitualmente pasan por alto los prefacios, pues, al menos, en los siguientes párrafos, se encontrará el lector con la primera fila de estrellas antes de entrar a conocer algunos de los grandes matemáticos. Debemos hacer notar en primer término que este libro no es en modo alguno una historia de la Matemática, ni siquiera una parte de esa historia.

Las vidas de los matemáticos aquí presentados están dirigidas al lector común y a aquellos otros que quieren saber qué tipo de seres humanos son los hombres que han creado la Matemática moderna. Nuestro objeto es dar a conocer algunas de las ideas dominantes que gobiernan amplios campos de las Matemáticas y hacerlo a través de las vidas de los hombres autores de estas ideas.

Para seleccionar los nombres se han seguido dos criterios: la importancia para la Matemática moderna de la obra de un hombre y el sentido humano de la vida y carácter del hombre. Algunos matemáticos pueden ser estudiados siguiendo esos dos criterios, por ejemplo: Pascal, Abel y Galois; otros, como Gauss y Cayley, principalmente atendiendo al primero, aunque ambos tienen vidas interesantes. Cuando estos criterios chocan o se superponen, como es el caso cuando hay varios pretendientes al recuerdo de un progreso particular, se ha dado preferencia al segundo criterio, pues aquí nos interesan los matemáticos, en primer término, como seres humanos.

En los últimos años se ha despertado un enorme interés general por la ciencia, particularmente por la ciencia física y su influencia sobre nuestro esquema filosófico del Universo rápidamente cambiante.

Numerosos y excelentes resúmenes de las conquistas de la ciencia, escritos en el lenguaje menos técnico posible, han servido para salvar la laguna entre el científico profesional y quienes dedican sus vidas a otras tareas. En muchas de estas exposiciones, especialmente las que se refieren a la relatividad y a la teoría moderna de los cuantos, surgen nombres que no puede esperarse sean familiares al lector común, Gauss, Cayley, Riemann y Hermite, por ejemplo. Conociendo quiénes eran estos hombres, el papel que han desempeñado para preparar el crecimiento explosivo de la ciencia física desde el año 1900, y apreciando sus ricas personalidades, las magníficas conquistas de la ciencia caen en la perspectiva del lector común y adquieren una nueva significación.

Los grandes matemáticos han desempeñado un papel en la evolución del pensamiento científico y filosófico comparable al de los filósofos y hombres de ciencia. Retratar los rasgos esenciales de esa evolución a través de las vidas de los grandes matemáticos, mencionando: al mismo tiempo algunos de los problemas dominantes en su época, constituyen el propósito de los capítulos siguientes. Haremos resaltar la importancia de la Matemática moderna, es decir, esas grandes y simples ideas directrices del pensamiento matemático, que son aún de tal importancia en la vida, en la ciencia creadora y en la Matemática.

No debemos creer que la única función de la Matemática,"la sirvienta de las ciencias", es servir a la ciencia. La Matemática también ha sido denominada "la reina de las ciencias". Si alguna vez la reina ha parecido mendigar de las ciencias, ha mendigado en forma muy orgullosa, ni ha pedido ni ha aceptado favores de ninguna de sus ciencias, hermanas más influyentes. Lo que ella adquiere ella lo paga. Los matemáticos tienen una visión y una sabiduría particular, por encima de cualquier aplicación posible a la ciencia, y suficientemente premiada cuando cualquier ser humano inteligente llega a vislumbrar lo que la Matemática significa por sí misma. No se trata de la vieja doctrina del arte por el bien del arte, sino del arte para el bien de la humanidad. En realidad, el propósito de la ciencia no es la tecnología y Dios sabe que ya hemos divagado bastante. La ciencia explora también profundidades de un Universo que ni siquiera con la

imaginación será visitado por los seres humanos, ni afectará nuestra existencia material. Así, nos ocuparemos también de algunas cosas que los grandes matemáticos han considerado dignas de una cordial comprensión, por su belleza intrínseca.
Se dice que Platón hizo escribir en la entrada de su academia las Siguientes palabras: "*Que ningún ignorante de la Geometría entre aquí*". En este lugar no necesitamos hacer una advertencia semejante y bastará una palabra de aviso para salvar de innecesarias angustias a algunos lectores excesivamente concienzudos... Lo principal de esta historia es la vida y personalidad de los creadores de la Matemática moderna y no la serie de formas y diagramas esparcidos en el texto. Las ideas básicas de la Matemática moderna, con las cuales se ha tejido por millares de investigadores la vasta e intrincada complejidad, son simples, de ilimitados alcances y pueden ser comprendidas por cualquier ser humano de inteligencia normal.
Lagrange (del que nos ocuparemos más tarde) creía que un matemático no llegaba a comprender totalmente su obra hasta que quedaba tan clara que podía ser explicada fácilmente al primer hombre que encontrara en la calle.
Como es natural, esto es un ideal que no siempre se alcanza. Pero haremos notar que pocos años antes que Lagrange pronunciara esas palabras, la "ley" newtoniana de gravitación era un incomprensible misterio hasta para las personas instruidas. En la actualidad la "ley" newtoniana es un lugar común que todas las personas educadas aceptan como sencilla y verdadera. Hoy la teoría relativista de la gravitación de Einstein se halla donde estaba la "ley" de Newton en las primeras décadas del siglo XVIII. Mañana la teoría de Einstein parecerá "tan natural", como la "ley" de Newton parece hoy. Con la ayuda del tiempo el ideal de Lagrange no es inalcanzable.
Otro gran matemático francés, consciente de sus dificultades no menos que sus lectores, aconsejaba a los hombres concienzudos no prestar demasiado tiempo a las cuestiones difíciles sino "seguir adelante y ya acudirá la fe". En breve, si alguna vez una fórmula, diagrama o un párrafo parece demasiado técnico, pasarlo por alto. Los estudiantes de la Matemática están familiarizados con el fenómeno del "desarrollo lento" o asimilación subconsciente. Cuando algo nuevo se estudia por primera vez, los detalles parecen numerosos y confusos, y no queda fijada en la mente una impresión lógica del conjunto. Después de un tiempo insistamos en el estudio y encontraremos que todo ha ido ocupando un lugar según su importancia, igual que cuando se revela una placa fotográfica. La mayoría de los que abordan seriamente por Primera vez la Geometría analítica experimentan dificultades de ese tipo. En cambio, el Cálculo, con sus fines claramente establecidos desde el comienzo, es de ordinario rápidamente comprendido. Hasta los matemáticos profesionales muchas veces pasan rozando sobre la obra de otros, para obtener un concepto amplio y comprensivo, antes de concentrarse sobre los detalles de interés para ellos. Pasar por alto no es un vicio como algunos de nosotros han creído, debido a nuestros profesores puritanos, sino una virtud del sentido común.
Yo creo que puede decirse honradamente que basta un curso de Matemática en una Escuela superior para tener los conocimientos matemáticos necesarios que permiten comprender muchas cosas que algunos cautamente pasan por alto. Con frecuencia son mencionadas cuestiones que están más allá de ese curso, pero siempre se acompañan de una descripción que capacita para comprenderlas a quienes lo han seguido. Para algunas de las ideas más importantes expuestas en relación con sus creadores grupos, espacio de muchas dimensiones, Geometrías no euclidianas y lógica simbólica, por ejemplo, basta menos que un curso de Escuela superior para comprender los conceptos básicos. Todo lo que se necesita es interés y capacidad de concentrarse. La asimilación de algunas de estas ideas de la Matemática moderna es tan refrescante como beber agua fría en una cálida jornada e inspira como inspira cualquier arte.

Para facilitar la lectura se han repetido donde era necesario las definiciones más importantes, y de tiempo en tiempo se hacen referencias a los primeros capítulos.
No es necesario leer los capítulos consecutivamente. En efecto, quienes estén dotados de una estructura mental especulativa o filosófica pueden preferir leer finalmente el primer capítulo.
Con algunos ligeros desplazamientos para satisfacer las condiciones sociales, los capítulos seguirán el orden cronológico.
Sería imposible describir toda la obra de incluso los menos prolíficos de los hombres que vamos a estudiar, aunque sería provechoso intentar hacerlo en un libro para el lector común. De todos modos, gran parte de la obra de los más grandes matemáticos del pasado ahora tiene únicamente interés histórico y queda englobada en los puntos de vista más generales. En consecuencia, sólo se describirán los hechos más notables de cada uno de los matemáticos, haciendo una selección según su originalidad e importancia en el pensamiento moderno.
De los temas seleccionados para la descripción podemos mencionar, entre otros, los siguientes por tener interés para el lector general:

- la doctrina moderna del infinito (capítulos 2, 29);
- el origen de la probabilidad matemática (capítulo 5);
- el concepto e importancia de un grupo (capítulo 15);
- la significación de la invariancia (capítulo 21);
- las Geometrías no euclidianas (capítulo 16 y parte del 14);
- el origen de la Matemática de la relatividad general (última parte del capítulo 26);
- las propiedades de los números enteros comunes (capítulo 4) y su moderna generalización (capítulo 25);
- la significación y utilidad de los llamados números imaginarios, como $\sqrt{-1}$ (capítulos 14, 19);
- el razonamiento simbólico (capítulo 23).

Pero cualquiera que desee tener una rápida visión de la capacidad del método matemático especialmente aplicado a la ciencia debe dirigirse al Cálculo (capítulos 2, 6).
Los matemáticos modernos comenzaron con dos grandes progresos, la Geometría analítica y el Cálculo. La primera tomó una forma definida en 1637 y el último hacia el año 1666, aunque no llega a ser de propiedad pública hasta una década más tarde. Aunque la idea que hay tras él es infantilmente simple, el método de la Geometría analítica, tiene tanta importancia que cualquier muchacho de 17 años puede utilizarlo para obtener resultados que escaparían a los más grandes geómetras griegos, Euclides, Arquímedes y Apolonio. El hombre, Descartes, que finalmente hizo cristalizar este gran método tiene una vida particularmente interesante.
Al decir que Descartes fue quien creó la Geometría analítica no queremos decir que el nuevo método saliera tan sólo de su cabeza armado de todas las armas. Muchos antes que él hicieron progresos significativos hacia el nuevo método, pero Descartes fue quien dio el paso final e hizo del método un motor en función para la prueba, descubrimientos e invenciones geométricos. Pero Descartes debe compartir este honor con Fermat.
Análogas observaciones pueden hacerse a la mayor parte de los otros progresos realizados por la Matemática moderna. Un nuevo concepto puede estar "en el aire" durante generaciones hasta que algún hombre algunas veces dos o tres al mismo tiempo, ve claramente el detalle esencial que no habían apreciado sus predecesores y el nuevo invento llega a ser una realidad. Dícese, por ejemplo, que la relatividad ha sido la gran invención reservada por el tiempo para el genio de

Minkoswski. Sin embargo, la realidad es que Minkoswski no creó la teoría de la relatividad y que Einstein lo hizo. Carece de sentido decir que tal o cual cosa pudo haber sido hecha si las circunstancias no hubieran sido las que fueron. Cualquiera de nosotros podría sin duda saltar hasta la Luna si nosotros y el universo físico fuéramos diferentes de lo que somos, y la verdad es que no podemos dar ese salto.

En otros ejemplos, sin embargo, el mérito de algún gran progreso no es siempre justamente atribuido y el hombre que utilizó por primera vez el nuevo método de un modo más fructífero que su inventor obtiene algunas veces un galardón mayor del que merece. Tal parece ser el caso, por ejemplo, en una cuestión tan importante como es el Cálculo. Arquímedes tuvo el concepto fundamental de las sumas límites de las cuales surge el Cálculo integral y no sólo tuvo ese concepto sino que también demostró que podía aplicarse. Arquímedes también utilizó el método del Cálculo diferencial en uno de sus problemas. Cuando nos acercamos a Newton y Leibniz, en el siglo XVII, la historia del Cálculo se desenvuelve extraordinariamente. El nuevo método estaba ya más que "en el aire" antes de que Newton y Leibniz le hicieran descender a la tierra; Fermat, en realidad, ya lo hizo. También inventó el método de la geometría cartesiana independientemente de Descartes. A pesar de estos hechos indudables seguiremos la tradición y atribuiremos a cada gran matemático lo que la mayoría dice que a él se debe, arriesgando darle algo más de lo que es justo. La prioridad, al fin y al cabo, pierde gradualmente su importancia a medida que nos alejamos en el tiempo de los hombres causantes de las batallas verbales mientras ellos y sus partidarios vivieron.

Quienes jamás conocieron a un matemático profesional podrán quedar sorprendidos al tropezar con alguno, pues los matemáticos, como clase, son probablemente menos familiares para el lector en general que cualquier otro grupo de intelectuales. En la ficción el matemático aparece con un carácter mucho más raro que su primo el hombre de ciencia, y cuando se le encuentra en las páginas de la novela o en la pantalla sólo se ve en él un soñador andrajoso totalmente desprovisto de sentido común, cómica representación. ¿Qué tipo de mortal es el matemático en la vida real? Tan sólo investigando detalladamente qué clase de hombres fueron algunos de los grandes matemáticos y cómo vivieron, podemos reconocer la ridícula falsedad del retrato tradicional de un matemático.

Por muy extraño que parezca, no todos los grandes matemáticos han sido profesores en colegios o universidades. Algunos fueron militares de profesión; otros llegaron a la Matemática desde la Teología, el Derecho y la Medicina, y uno de los más grandes fue un astuto diplomático que llegó a mentir para el bien de su país. Algunos no han tenido profesión conocida. Todavía más extraño es que no todos los profesores de Matemática hayan sido matemáticos. Esto no debe sorprendernos cuando pensamos en la sima que existe entre el profesor de poesía que recibe un buen sueldo y el poeta que muere de hambre en un desván.

Las vidas que vamos a, estudiar demuestran, al menos, que un matemático es un ser humano como cualquier otro y algunas veces más afectivo. En el trato social ordinario la mayoría de ellos ha sido normal. Como es natural, se encuentran excéntricos entre los matemáticos, pero la proporción no es más elevada que en el comercio o entre las diversas profesiones. Como grupo, los grandes matemáticos son hombres de inteligencia integral, vigorosos, vigilantes, vivamente interesados por muchos problemas ajenos a la Matemática, y en sus luchas, hombres como cualquier otro. De ordinario los matemáticos tienen la particularidad de ser capaces de devolver lo que han recibido con interés compuesto. Por lo demás son individuos de extraordinaria inteligencia, que se diferencian de los restantes hombres de talento en su irresistible impulso hacia la Matemática. En ocasiones los matemáticos han sido (y algunos son aún en Francia) administradores extraordinariamente capaces.

Desde el punto de vista político los matemáticos presentan todo el espectro, desde el conservadurismo reaccionario hasta el liberalismo radical. Probablemente puede decirse que como clase han tendido ligeramente hacia la izquierda en sus opiniones políticas. En sus creencias religiosas se encuentran todos los matices, desde la más estrecha ortodoxia, que algunas veces, es el más negro fanatismo, hasta el completo escepticismo. Algunos eran dogmáticos y positivos en sus afirmaciones referentes a cosas de que nada sabían, pero de ordinario han sido el eco de las palabras del gran Lagrange: "yo no sé".

Otra característica merece ser mencionada en este lugar, pues diversos escritores y artistas (algunos desde Hollywood) se han interesado por la vida sexual de los grandes matemáticos. Particularmente, estos curiosos desean saber si algunos de los grandes matemáticos han sido pervertidos, una cuestión algo delicada, pero legítima en estos tiempos de preocupación por tales temas. La respuesta es negativa. Algunos fueron célibes, de ordinario debido a incapacidad económica, pero la mayoría fueron esposos felices que trajeron al mundo sus hijos en una forma inteligente y civilizada. De pasada haremos notar que los niños tenían una inteligencia superior al tipo medio. Algunos de los grandes matemáticos de los siglos pasados mantenían amantes cuando era la costumbre y moda de sus épocas. El único matemático cuya vida puede ofrecer cierto interés a los freudianos es Pascal.

Volviendo por un momento a la idea que se tiene de los matemáticos, recordaremos que los vestidos andrajosos no han constituido la invariable preferencia de los grandes matemáticos. Siguiendo la larga historia de la Matemática, y siempre que se tienen conocimientos detallados, se observa que los matemáticos han prestado la misma atención a su cuidado personal que cualquier otro grupo igualmente numeroso de hombres. Algunos han sido petimetres, otros desaliñados; la mayoría decentemente vestidos. Si en la actualidad algún grave caballero con trajes espectaculares, largo cabello, sombrero negro y cualquier otro signo de exhibicionismo nos asegura que es un matemático, podemos apostar que se trata de un psicópata transformado en numerólogo.

Las peculiaridades psicológicas de los grandes matemáticos son otro tema que ha despertado considerable interés. Poincaré nos narrará en un capítulo posterior algunas cosas acerca de la sicología de la creación matemática. En su conjunto los grandes matemáticos han tenido una vida más rica y más viril que la mayor parte de los mortales ordinarios. Su riqueza no se refiere exclusivamente a la aventura intelectual. Algunos de los grandes matemáticos han participado de peligros y conmociones y algunos de ellos han sido implacables enemigos, o como se dice ahora, expertos polemistas. Muchos han gustado de las satisfacciones de la batalla en su juventud, cosa sin duda censurable pero también humana, lo que indica que no han tenido sangre de pato; han podido hacer suyas las palabras: "Maldecir fortifica, bendecir relaja", que el devoto Christian William Blake escribe en sus Proverbios del infierno.

Esto nos lleva a lo que a primera vista (teniendo en cuenta la conducta de varios de los hombres aquí estudiados) parece ser un rasgo significativo de los matemáticos el de ser pendencieros. Sin embargo, estudiando las vidas de algunos de esos hombres se tiene la impresión de que un gran matemático no parece preocuparse de que otros le roben su obra, le desprecien o no le consideren suficientemente, e inicie una lucha para recobrar sus imaginarios derechos. Los hombres que se hallan por encima de estas luchas no parece que estén expuestos a lidiar batallas sobre la prioridad, y a acusar a sus competidores de plagiarios. No estaríamos en lo cierto si negásemos la superstición de que la persecución de la verdad hace necesariamente, veraces a los hombres, y en realidad no encontramos pruebas indudables de que la Matemática haga a los hombres malhumorados y pendencieros.

Otro detalle "psicológico" de tipo análogo es causa de mayores trastornos. La envidia es llevada al más alto nivel. El estrecho nacionalismo y los celos internacionales, aun en la Matemática pura impersonal, han modificado la historia de los descubrimientos y las invenciones hasta un grado tal que es casi imposible, en algunos casos importantes, estimar, de modo justo, la significación de la obra de un determinado individuo en el pensamiento moderno. El fanatismo racial, especialmente en los últimos tiempos, ha complicado también la tarea de quien intente hacer una exposición sin prejuicios de la vida y obra de los hombres de ciencia que no pertenezcan a su propia raza o nación.

Una exposición imparcial de la Matemática occidental, incluyendo la importancia que cada hombre y cada nación han tenido en el intrincado desarrollo de esta ciencia, sólo podría hacerla un historiador chino. Tan sólo él tendría la paciencia y serenidad necesarias para desentrañar la estructura curiosamente alterada y descubrir dónde se halla la verdad en nuestra polimorfa jactancia occidental.

Aunque limitáramos nuestra atención a la fase moderna de la Matemática nos enfrentaríamos con un problema de selección que debe ser resuelto de algún modo. Antes de llegar a esta solución tiene interés determinar la cuantía de la labor necesaria para escribir una historia, detallada de la Matemática, en una escala similar a la de una historia política para cualquier acontecimiento importante, por ejemplo la Revolución Francesa o la Guerra Civil Americana.

Cuando comenzamos a desenredar un hilo particular en la historia, de la Matemática, pronto tenemos la desalentadora sensación de que la Matemática es comparable a una vasta necrópolis a la que constantemente se van haciendo adiciones para la conservación eterna de los nuevos muertos. Los recién llegados, igual que algunos pocos que allí arribaron para el perpetuo recuerdo hace 5.000 años, deben estar de tal modo exhibidos que parezcan conservar el completo vigor de las horas en que ellos vivieron; en efecto, debe crearse la ilusión de que no han cesado de vivir. Y la ilusión debe ser tan natural que hasta los arqueólogos más escépticos que visiten los mausoleos tengan que exclamar, como los matemáticos que hoy viven, que las verdades matemáticas son inmortales, imperecederas; lo mismo ayer que hoy y que mañana. La esencia de esas verdades eternas tiene que ser adaptable, pero puede vislumbrarse el destello de invariabilidad detrás de todos los ciclos repetidos del nacimiento, de la muerte y de la declinación de nuestra raza.

Mas el simple espectador de la historia de la Matemática queda pronto agobiado por el asombroso cúmulo de invenciones matemáticas que aun mantienen su vitalidad e importancia para la obra moderna, en un grado superior que en cualquier otro campo del trabajo científico, después de centurias y decenas de centurias.

Un lapso de menos de 100 años abarca todos los acontecimientos de significación en la Revolución Francesa o en la Guerra Civil Americana, y menos de 500 hombres superiores han desempeñado un papel suficientemente memorable que exija el recuerdo. Pero el ejército de quienes han hecho alguna contribución a la Matemática, constituye una muchedumbre a medida que nos remontamos en la historia; 6.000 u 8.000 hombres nos piden algunas palabras que les salve de ser olvidados, y una vez que los más audaces han sido reconocidos sería un problema de selección arbitraria e ilógica juzgar, entre aquella multitud clamorosa, quiénes deben sobrevivir y quiénes han de ser condenados al olvido.

Este problema apenas se presenta cuando se describe el desarrollo de las ciencias físicas. También hay que remontarse a la antigüedad, pero para la mayor parte de ellas bastan 350 años para abarcar todos los hechos de importancia para el pensamiento humano. Pero quien intente hacer justicia humana a la Matemática y a los matemáticos tendrá que tener en cuenta 6.000 años, plazo en el que han actuado tales talentos, y enfrentarse con una multitud de 6.000 a 8.000 reclamantes que esperan les sea hecha justicia.

El problema se hace aún más difícil cuando nos aproximamos a nuestros tiempos. Esto no se debe a la más íntima proximidad con los hombres que nos han precedido en los dos últimos siglos, sino al hecho universalmente reconocido entre los matemáticos profesionales que el siglo XIX, prolongándose en el XX, fue y es la edad más grande de la Matemática que el mundo ha conocido. Comparado con lo que hizo la gloriosa Grecia en Matemática, el siglo XIX es una hoguera al lado de una modesta bujía.

¿Qué hilos seguiremos para guiarnos a través de este laberinto de invenciones matemáticas? Ya ha sido indicado cuál es el camino principal: el que conduce desde el pasado semiolvidado a algunos de los conceptos dominantes que ahora gobiernan imperios ilimitados de la Matemática, pero que pueden a su vez ser destronados mañana para dejar espacio a generalizaciones aún más vastas. Siguiendo este camino principal concederemos lugar secundario a los perfeccionadores en favor de los inventores.

Tanto los inventores como los perfeccionadores son necesarios para el progreso de cualquier ciencia. Toda exploración debe tener, además de sus primeros exploradores, sus continuadores para que informen al mundo de lo que ha sido descubierto. Pero para la mayoría de los seres humanos el explorador que muestra por primera vez la nueva senda es la personalidad más atractiva, aunque haya tropezado a la mitad del camino. Estudiaremos, pues, los inventores con preferencia a los perfeccionadores. Por fortuna para la justicia histórica muchos de los grandes inventores en la Matemática han sido también perfeccionadores sin par.

Hasta con esta restricción la senda desde el pasado hasta el presente no siempre será clara para quienes no la han seguido. Podemos resumir aquí brevemente lo que ha sido la clave principal que nos conduce a través de toda la historia de la Matemática.

Desde los primeros tiempos dos opuestas tendencias, que algunas veces se han ayudado una a otra, han gobernado el desarrollo de la Matemática. Tales tendencias son las hacia lo discontinuo y hacia lo continuo.

El concepto de discontinuo describe toda la naturaleza y toda la Matemática atomísticamente en función de elementos de individuos reconocibles como elementos individuales diferentes, como los ladrillos en una pared, o los números, 1, 2, 3,...; El concepto de continuo busca comprender los fenómenos naturales, el curso de un planeta en su órbita, el paso de una corriente de electricidad, el ascenso y descenso de las mareas y una multitud de fenómenos que nos hacen creer que conocemos la naturaleza, en la forma mística de Heráclito: "Todas las cosas fluyen". En la actualidad (como veremos en el último capítulo), "fluir" o su equivalente ser continuo es una cosa tan incierta que casi está desprovista de significación. Sin embargo, dejémoslo por el momento.

Intuitivamente nosotros sentimos que conocemos lo que quiere decir movimiento continuo", el de un pájaro o una bala a través del aire o la caída de una gota de lluvia. El movimiento es uniforme y no procede por saltos, es ininterrumpido. En el movimiento continuo, o más generalmente en el concepto de continuidad misma, los números individualizados 1, 2, 3,... no son la imagen matemática apropiada. Todos los puntos de un segmento de una línea recta, por ejemplo, no tienen individualidades separadas como la tienen los números de la sucesión 1, 2, 3,..., donde el paso de un término de la sucesión al siguiente es el mismo (especialmente 1; 1 + 2 = 3; 1 + 3 = 4, y así sucesivamente). Pero entre dos puntos de la línea, sin importar que los puntos puedan estar muy juntos, podemos siempre encontrar o al menos imaginar otro punto: no existe el paso "más corto" desde un punto al "siguiente". En efecto, no existe en modo alguno punto siguiente.

La última: la concepción de continuidad, cuando se desarrolla en la forma de Newton, Leibniz y sus sucesores, conduce al ilimitado dominio del Cálculo infinitesimal y sus innumerables aplicaciones a la ciencia y a la tecnología y a todo lo que actualmente se llama Análisis matemático. La otra, la concepción discontinua basada sobre 1, 2, 3,... es el dominio del Álgebra, la teoría de números y la Lógica simbólica. La Geometría participa de ambos conceptos, el continuo y el discontinuo.

En la actualidad es una tarea esencial de la Matemática armonizar esos dos conceptos englobándolos en una Matemática comprensiva, eliminando la oscuridad que existe tanto en uno como en otro.

Es una injusticia de nuestros predecesores hacer resaltar el pensamiento matemático moderno haciendo tan sólo ligeras referencias a los precursores que dieron el primero y, posiblemente, el paso más difícil. Pero casi todas las cosas útiles debidas a la Matemática anterior al siglo XVII han tenido uno de estos dos destinos: se han simplificado grandemente, de modo que ahora constituyen una parte de cualquier curso escolar regular, o han sido absorbidas como un detalle en la obra de mayor generalización.

Las cosas que ahora parecen tan simples como el sentido común, nuestra forma de escribir los números con su "sistema de posición" de los valores y la introducción de un símbolo para el cero que dio el toque final a dicho sistema, costó increíble trabajo inventarlas. Incluso las cosas más sencillas que contienen la verdadera esencia del pensamiento matemático, la abstracción y la generalización, deben haber costado siglos de lucha hasta que fueron descubiertas, y sus inventores se han desvanecido sin dejar un indicio de sus vidas y personalidades. Como Bertrand Russell observa, "debe de haber pasado largo tiempo hasta descubrir que una pareja de faisanes y un par de días son ejemplos del número dos". En efecto, han pasado 25 siglos de civilización hasta desarrollar la definición lógica de Russell referente al "dos" o a cualquier otro número cardinal (véase el último capítulo). Por otra parte, la concepción de un punto, que nosotros creemos (erróneamente) comprenderla totalmente cuando comenzamos la Geometría escolar, debe haber aparecido muy tardíamente en el desarrollo del hombre. Horace Lamb, un físico matemático inglés, quería "erigir" un monumento al inventor matemático desconocido del punto matemático como el tipo supremo de esa abstracción que ha sido una condición necesaria del trabajo científico desde el comienzo.

¿Quién, de qué modo fue inventado el punto matemático? En un sentido, el hombre olvidado de Lamb; en otro, Euclides con su definición: "un punto es aquello que no tiene partes y que no tiene magnitud"; en un tercer sentido, Descartes con su invención de las "coordenadas de un punto"; hasta que finalmente en Geometría, como el técnico la practica hoy, el "punto" misterioso une al hombre desconocido y a todos sus dioses en un eterno olvido, siendo reemplazado por algo más útil: una sucesión de números escritos en un cierto orden.

Esto último es un ejemplo moderno de la abstracción y precisión hacia las cuales la Matemática tiende constantemente, y tan sólo cuando se alcanza la abstracción y la precisión nos damos cuenta de que para una clara comprensión se necesita un mayor grado de abstracción y una precisión mayor. Nuestra concepción de "punto" no hay duda que evolucionará hacia algo más abstracto. En efecto, los "números", en función de los cuales se describen hoy los puntos, se han disuelto a comienzos de este siglo en la vaga luz de la lógica pura, que a su vez se desvanecerá en algo más difuso y hasta menos sustancial.

No es una verdad necesaria la de que seguir paso a paso a nuestros predecesores sea la forma más segura de comprender tanto su concepción de la Matemática como la nuestra. Esta vuelta por el camino que nos ha conducido a nuestro concepto actual tiene, sin duda, gran interés por sí misma. Pero es más rápido lanzar una ojeada hacia atrás desde la cima en la cual estamos ahora. Los pasos falsos, las sendas complicadas y los caminos que a nada han conducido se difuminan a la distancia; únicamente vemos las amplias rutas que conducen directamente hacia el pasado, donde las perdemos en las nieblas de la inseguridad y de la conjetura. Ni el espacio, ni el número, ni siquiera el tiempo, tienen la misma significación para nosotros que la que tuvieron para los hombres cuyas grandes figuras aparecen confusamente a través de la niebla. Un pitagórico del siglo VI antes de Cristo puede entonar: "Bendícenos, divino Número, tú que engendraste dioses, y hombres"; un kantiano del siglo XIX podría referirse confiadamente al "espacio" como una forma de "intuición pura"; un astrónomo matemático podría anunciar hace unas décadas que el Gran Arquitecto del Universo es un matemático puro. Lo más notable de todas estas profundas expresiones es que seres humanos no más insensatos que nosotros pensaron una vez, que tenían sentido.

Para un matemático moderno estas generalidades que todo lo abarcan significan menos que nada. De todos modos, dada su pretensión de ser la engendradora universal de dioses y hombres, la Matemática ha obtenido algo más sustancial, una fe en sí misma y en su capacidad para crear valores humanos.

Nuestro punto de vista ha cambiado y aún está cambiando. A las palabras de Descartes: "dadme espacio y movimiento y yo os daré un mundo", Einstein podría contestar que esa demanda carece de significación: "Sin un "mundo", materia, no hay "espacio" ni "movimiento". Y para moderar el turbulento misticismo de Leibniz en el siglo XVII acerca de la misteriosa $\sqrt{-1}$, podría responderse: "el espíritu divino encuentra una sublime salida en que la maravilla del Análisis, el portentoso ideal, se halla entre el ser y el no ser, que nosotros llamamos la raíz cuadrada imaginaria de la unidad negativa". Hamilton en el año 1840 construye una pareja de números que cualquier niño inteligente puede comprender y manipular, y que para la Matemática y la ciencia sirve para lo que sirvió el mal denominado "imaginario". El místico "no ser" del siglo XVII de Leibniz se ve que tiene un "ser" tan sencillo como ABC.

¿Significa esto una pérdida? Debe un matemático moderno perder algo de valor cuando, a través del método de los postulados, intenta seguir la pista de ese ilusorio "sentimiento" descrito por Heinrich Hertz, el descubridor de las ondas que llevan su nombre ¿Podemos escapar del sentimiento de que esas fórmulas matemáticas tienen una existencia independiente y una inteligencia por sí mismas más sabias que nosotros, más sabias aún que sus descubridores, y que nosotros obtenemos de ellas más de lo que originariamente se expuso en ellas? Cualquier matemático competente comprenderá el sentimiento de Hertz, pero también se inclinará a la creencia de que mientras se descubren continentes y ondas hertzianas, se inventan dínamos y matemáticas, que hacen lo que nosotros queremos que hagan. Podemos aún soñar, pero no necesitamos deliberadamente provocar las pesadillas. Si es cierto, como Charles Darwin afirmó, que "la Matemática parece dotar al individuo de algo semejante a un nuevo sentido", ese sentido es el sentido común sublimado que el físico e ingeniero Lord Kelvin declaró que era la Matemática.

¿No está más cercano a nuestros hábitos de pensar aceptar temporalmente, con Galileo, que "el gran libro de la naturaleza está escrito en símbolos matemáticos" y que como afirma Platón: "Hasta Dios geometriza", o como dice Jacobi: "Hasta Dios aritmetiza"? Si inspeccionamos los símbolos en el gran libro de la naturaleza con los ejes críticos de la ciencia moderna pronto percibiremos que somos nosotros los que los hemos escrito y que hemos usado esa escritura particular porque la hemos inventado para facilitar nuestra comprensión. Algún día encontraremos una abreviatura más expresiva que la Matemática para relacionar nuestras experiencias del Universo físico, a no ser que aceptemos el credo de la mística científica de que todo es Matemática y que no se trata de una descripción, para nuestra conveniencia, en el lenguaje matemático. Si "el Número gobierna el Universo" como Pitágoras afirmó, el Número es simplemente nuestro delegado en el trono, pues nosotros gobernamos el Número.

Cuando un matemático moderno abandona por un momento sus símbolos para comunicar a otros el sentimiento que la Matemática e inspira, no es un eco de Pitágoras y Jeans, pero puede citar las palabras que Bertrand Russell dijo hace un cuarto de siglo aproximadamente: "la Matemática estrictamente considerada posee no sólo verdad sino también suprema belleza, una belleza fría y sobria como la escultura, que no recurre a alguna parte de nuestra naturaleza más débil, sin la magnificencia engañosa de la pintura o de la música, sino sublimemente pura y capaz de una perfección austera, como sólo el más grande arte puede hacer".

Otros, familiarizados con lo que ha sucedido a nuestra concepción de la "verdad matemática" desde los aires en que Russell alababa la belleza de la Matemática, pueden referirse a la "resistencia del hierro" que algunos adquieren en sus intentos por comprender lo que la Matemática significa y pueden citar las líneas de James Thomson (conque finaliza este libro) en la descripción de la Melancolía de Durero (el frontispicio). Y si se reprocha a algunos devotos haber gastado su vida en lo que a muchos puede parecer la egoísta persecución de una belleza que no se refleja de modo inmediato en la vida del prójimo, aquéllos pueden repetir las palabras de Poincaré: "La Matemática por la Matemática. Las gentes han quedado sorprendidas por esta fórmula, que, sin embargo, es tan buena como la de la vida por la vida, aunque la vida sea una desventura".

Para calcular lo que se debe a la moderna Matemática en comparación con la antigua debemos en primer término contemplar la obra total en el período posterior a 1800 comparada con la llevada a cabo antes de 1800. La historia más extensa de la Matemática es la de Moritz Cantor, *Geschichte der Mathematik*. En tres grandes volúmenes (un cuarto debido a colaboradores complementan los tres primeros). Los cuatro volúmenes tienen en total 3.600 páginas. Cantor tan sólo expone el esquema del desarrollo no intentando entrar en detalles referentes a las contribuciones descritas, ni explica los términos técnicos para que un lego pueda comprender lo que significa toda la historia, y las biografías son lo más sucintas posible; su historia va dirigida a quien tiene ya alguna instrucción técnica. Esta historia termina con el año 1799, justamente cuando los modernos matemáticos comenzaron a sentir su libertad. ¿Qué sería si se intentara hacer en una escala similar el esquema de la historia de la Matemática en el siglo XIX? Se ha calculado que se necesitarían 19 ó 20 volúmenes del tamaño de los de la historia de Cantor, con un total de 17.000 páginas. El siglo XIX, en esta escala, ha contribuido al conocimiento matemático en cinco veces lo debido a todos los años precedentes.

El período, sin comienzo, anterior a 1800 se descompone bruscamente en dos. Esta ramificación tiene lugar el año 1700, y es debida principalmente a Isaac Newton (1642-1727). El rival más grande de Newton en Matemática fue Leibniz (1646-1716). Según Leibniz, de toda la Matemática hasta el tiempo de Newton inclusive, la mitad más importante es debida a éste. Este cálculo se refiere a la importancia de los métodos generales de Newton más que a la totalidad de su obra; los *Principia* son considerados como la contribución más importante al pensamiento científico que ha podido hacer un hombre.

Retrogradando en el tiempo más allá del año 1700 no encontramos alto de nada comparable hasta alcanzar la edad de oro de Grecia: un salto de casi 2000 años. Remontándonos más allá del año 600 a. de J. C. tenernos que pasar por la sombra antes de que nuevamente se haga la luz por un momento en el antiguo Egipto. Finalmente, llegamos a la primera gran edad de la Matemática alrededor del año 2000 a. de J. C. en el valle del Eúfrates. Los descendientes de los sumerios, en Babilonia, parecen haber sido los primeros "modernos" en Matemática. Ciertamente, su forma de plantear ecuaciones algebraicas está más en el espíritu del Álgebra que conocemos que cualquier otra cosa hecha por griegos en su Edad de Oro. Más importante que el Álgebra técnica: de estos antiguos babilonios es su reconocimiento, como lo muestra su obra, de la necesidad de la prueba en Matemática. Hasta hace poco se suponía que fueron los griegos los primeros en reconocer la necesidad de la prueba en una proposición matemática. Éste es uno de los pasos más importantes dado por los seres humanos. Desgraciadamente ha transcurrido tan largo tiempo que somos llevados tan lejos como lejos remonta nuestra civilización.

La Matemática ha tenido cuatro grandes edades: la babilónica, la griega, la newtoniana (para dar un nombre al período alrededor del año 1700) y la reciente que comienza hacia el año 1800 y continúa hasta los días actuales. Jueces competentes han llamado a esta última la Edad de Oro de la Matemática.

En la actualidad la invención (descubrimiento, si el lector prefiere) matemática marcha hacia adelante más vigorosamente que nunca. Lo único que al parecer podría detener su progreso es un colapso general de lo que llamamos civilización. Si se produce, la Matemática quedará olvidada durante siglos, como ocurrió después de la declinación de Babilonia; pero si la historia se repite, como se dice, podemos creer que brotará nuevamente más fresca y más clara que nunca, después de que, nosotros y nuestra insensatez hayan pasado al olvido.