## *Capítulo Cuarto*
## El Príncipe de los Aficionados

### FERMAT

*He encontrado gran número de teoremas extraordinariamente bellos.*
*P. Fermat*

No todos nuestros patos pueden ser cisnes; así, después de haber mostrado a Descartes como uno de los grandes matemáticos de todas las épocas, debemos justificar la afirmación, frecuentemente hecha y rara vez discutida, de que el más grande matemático del siglo XVII fue el contemporáneo de Descartes, Fermat (1601? 1665). Como es natural, dejamos aparte a Newton (1642 1727). Puede afirmarse que Fermat fue al menos igual a Newton como matemático puro, pero, de todos modos, casi un tercio de la vida de Newton corresponde al siglo XVIII, mientras que toda la vida de Fermat se desenvolvió en el siglo XVII.

Newton parece haber considerado su Matemática como un instrumento para la exploración científica, y puso su mayor esfuerzo en esta última. Fermat, en cambio, era más atraído por la Matemática pura, aunque también hizo notables trabajos en las aplicaciones de la Matemática a la ciencia, particularmente a la óptica. La Matemática entró en su fase moderna con la publicación de Descartes de la Geometría analítica en 1637 y fue aún durante muchos años de tan modesto desarrollo que un hombre de talento podía esperar hacer grandes cosas tanto en la forma pura como en la forma aplicada.

Como matemático puro, Newton alcanzó su culminación con la invención del Cálculo infinitesimal, que también se debe, independientemente, a Leibniz. Más adelante nos detendremos sobre estas cuestiones, pero ahora haremos notar que Fermat concibió y aplicó la idea directriz del Cálculo diferencial trece años antes de que naciera Newton y diecisiete antes de que naciera Leibniz, aunque no llegó a reducir, como hizo Leibniz, su método a una serie de reglas comunes, que hasta un bobo puede aplicar a fáciles problemas.

Del mismo modo, Descartes y Fermat inventaron la Geometría analítica independientemente uno de otro. La mayor parte del esfuerzo de Descartes corresponde a la investigación científica del tipo más variado, a la elaboración de su filosofía y a su disparatada "teoría de los torbellinos" del sistema solar, que aun en Inglaterra fue durante largo tiempo una seria rival de la más bella, más sencilla y no metafísica teoría newtoniana de la gravitación universal. Parece que Fermat jamás fue tentado, como Descartes y Pascal, a filosofar, por una engañosa seducción acerca de Dios, del hombre y del Universo como un todo; así, después de haber realizado su labor en el Cálculo y la Geometría analítica y de haber vivido una vida serena, de arduo trabajo, con el que ganó lo necesario para su vida, tuvo tiempo para dedicar el resto de sus energías a su distracción favorita, la Matemática pura, y cumplir su más grande obra, la fundación de la teoría de números, sobre la cual reposa indiscutido y única su inmortalidad.

Recordaremos también que Fermat participó con Pascal en la creación de la teoría matemática de la probabilidad. Si todas estas adquisiciones de primera categoría no son suficiente para ponerle a la cabeza de sus contemporáneos en la Matemática pura, podemos preguntarnos: ¿quién hizo más? Fermat era creador ingénitamente. Era

también, en el estricto sentido de la palabra, en lo que se refiere a su ciencia de la matemática, un aficionado. Sin duda es uno de los más grandes aficionados en la historia de la ciencia, y quizá "Sea el primero". La vida de Fermat fue tranquila y laboriosa, pues tuvo una extraordinaria suerte. Los hechos esenciales de su pacífica carrera pueden ser rápidamente referidos. Hijo del comerciante en pieles Dominique Fermat, segundo cónsul de Beaumont, y Claire de Long, hija de una familia de juristas parlamentarios, el matemático Pierre Fermat nació en Beaumont de Lomagne, Francia, en el mes de agosto de 1601 (la fecha exacta es desconocida, el día del bautismo fue el 20 de agosto). Su primera educación la recibió en el hogar, en su ciudad nativa; sus estudios posteriores para la preparación a la magistratura fueron continuados en Toulouse. Como Fermat vivió tranquilo y reposadamente, evitando las disputas sin provecho, y como no tuvo una cariñosa hermana como Gilberte, la hermana de Pascal, que recordara sus prodigios de adolescente para la posteridad, poco es lo que se sabe de sus años de estudio. Deben haber sido brillantes, pues los descubrimientos de su madurez dan prueba de ello. Ningún hombre sin un sólido fundamento en sus estudios previos pudo haber sido el conocedor de los clásicos y el notable literato que Fermat fue. Su maravillosa obra en la teoría de números y en la Matemática en general no puede ser referida a la Instrucción que recibió, pues los campos donde hizo su máximo descubrimiento no estaban abiertos cuando era estudiante.

Los únicos acontecimientos dignos de mención en su vida privada son su instalación en Toulouse, a la edad de 30 años (14 de mayo de 1631, como magistrado); su matrimonio el 1° de junio del mismo año, con Louise de Long, prima de su madre, que le dio tres hijos, uno de ellos, Clément Samuel, que llegó a ser el albacea científico de su padre, y dos hermanas que fueron monjas; su ascenso en 1648 a la Conserjería Real en el Parlamento local de Toulouse, cargo que desempeñó con dignidad y gran talento durante 17 años; toda la obra de su vida, durante 34 años, dedicada al fiel servicio del Estado, y, finalmente, su muerte en Castres, el 12 de enero de 1665, a los 65 años. ¿"Historia"? Fermat podía haber dicho: "Os bendigo señor, no tengo ninguna". Y con esta tranquila, honesta y escrupulosa vida, a este hombre corresponde una de las más preclaras historias en la historia de la Matemática.

Su historia es su obra, su recreo más bien, dado el gran amor que tuvo por ella, y lo mejor es su simplicidad, que permite a cualquier escolar de una inteligencia normal comprender su naturaleza y apreciar su belleza. La obra de este príncipe de los aficionados matemáticos ha ejercido una irresistible atracción para los aficionados a la Matemática en todos los países civilizados, durante los últimos tres siglos. Esta obra, la teoría de números, como se llama, es probablemente un campo de la Matemática donde cualquier aficionado de talento puede aún esperar el hallazgo de algo interesante. Echaremos una ojeada sobre sus otras contribuciones, después de mencionar de pasada su "erudición singular" en lo que muchos llaman humanidades. Sus conocimientos de las principales lenguas europeas y de la literatura de la Europa continental eran muy grandes y completos, y la filología griega y latina le son deudoras de diversas e importantes correcciones. En la composición de versos latinos, franceses y españoles, una de las tareas galantes de su época, mostró gran habilidad y fino gusto. Podemos comprender su vida tranquila pensando que se trataba de un hombre afable sin crítica aguda ni violenta (como Newton en sus últimos días) y sin orgullo aunque con cierta vanidad, que Descartes, su opuesto en todos los respectos, caracterizaba diciendo: "Mr. de Fermat es un gascón; yo no lo soy". La alusión a los gascones puede, posiblemente, referirse a cierto tipo amable de fanfarronería que algunos escritores franceses. (por ejemplo, Rostand, en *Cyrano de Bergerac*, acto II, escena 7), atribuyen a los hombres de Gascuña. Puede ser que se encuentre este tipo de fanfarronería en las cartas de Fermat, pero siempre sencillas, e inofensivas. En cuanto a Descartes, hay que reconocer que no era exactamente un juez imparcial. En efecto, recordaremos que su tozudez, propia del soldado, fue la causa de que ocupara un mal segundo puesto en su prolongada lucha con el "gascón" acerca de un problema de extraordinaria importancia, el problema de las tangentes.

Considerando la naturaleza de, los deberes oficiales de Fermat y la importancia de los hallazgos de Matemática que realizó, algunos se asombran de cómo pudo encontrar tiempo para todo. Un crítico francés sugiere una probable solución: que el trabajo de Fermat como consejero del Rey fue una ayuda más que un obstáculo a sus actividades intelectuales. A diferencia de otros empleados públicos, los consejeros parlamentarios debían mantenerse apartados de sus conciudadanos y abstenerse de actividades sociales innecesarias que podían dar lugar a corrupciones y soborno en las actividades de su oficio. Así Fermat dispuso de gran cantidad de horas para dedicarse a sus trabajos.

Nos ocuparemos ahora brevemente, del papel desempeñado por Fermat en la evolución del Cálculo. Como hemos hecho notar en el capítulo sobre Arquímedes, un equivalente geométrico del problema fundamental del Cálculo diferencial es trazar la tangente a un arco continuo de una curva en un punto dado cualquiera.

Brevemente puede definirse el "continuo" como "uniforme, sin, rotura o repentinos saltos", y dar una definición matemática exacta requeriría numerosas páginas de definiciones y sutiles distinciones que seguramente dejarían asombrados a los inventores del Cálculo, incluyendo a Newton y Leibniz. Y también puede sospecharse que si todas esas sutilezas, que los modernos estudiosos exigen, se hubieran presentado a los inventores, el Cálculo jamás habría sido inventado.

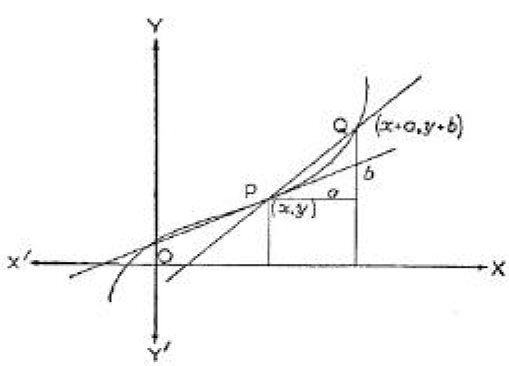


*Figura 4.1*

Los creadores del Cálculo, incluso Fermat, confiaban en la intuición geométrica y física (en su mayor parte cinemática y dinámica) para marchar adelante: Expresaban lo que pasaba por sus imaginaciones para hacer la *gráfica* de una "curva continua" mediante el proceso de trazar una línea recta, tangente a la curva, en cualquier punto P en la curva, y tomando otro punto Q también en la curva y trazar la línea recta PQ para unir P *y* Q. Luego, con la imaginación, dejar que el punto Q se mueva a lo largo del arco de la curva desde Q a P, hasta que Q coincida con P, cuando la cuerda PQ en la *posición límite*, justamente descrita, venga a ser la tangente *PP* a la curva en el punto P, que es lo que estamos considerando.

El siguiente paso fue trasladar esto al lenguaje algebraico o analítico. Conociendo las coordenadas $x, y$ del punto P en la gráfica, y las $x + a, y + b$, de Q antes de que Q se haya movido hasta coincidir con P, basta examinar la gráfica para ver que la inclinación de la cuerda *PQ* es igual a $b/a$: evidentemente una medida de la "pendiente" de la curva con relación al eje de las $x$ (la línea a lo largo de la cual se miden las distancias $x$); esta "pendiente" es, precisamente, lo que se entiende por inclinación.

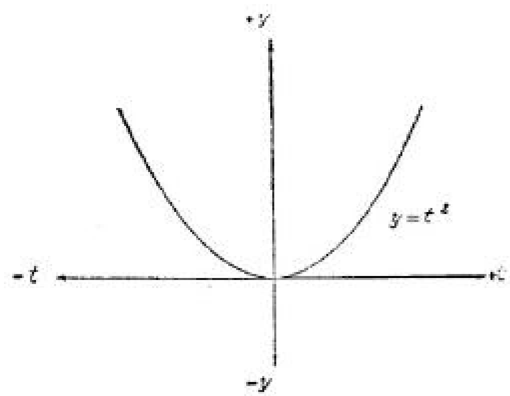


*Figura 4.2*

Es, pues, evidente que la *inclinación requerida de la tangente en P* (después que Q se haya movido hasta coincidir con P) será el valor límite de $b/a$, cuanto, tanto $b$ como $a$, se aproximan simultáneamente al valor cero; para $x + a$, $y + b$, las coordenadas de Q, serán en último término $x$, y, las coordenadas de P. Este valor límite es la inclinación pedida. Teniendo la inclinación y el punto P puede trazarse ahora la tangente.

Este no es exactamente el proceso de Fermat para trazar tangentes, pero su método es muy semejante al que acabamos de explicar.

¿Por qué es digno todo esto de que cualquier hombre racional o práctico le preste seria atención? Se trata de una larga historia, y sólo haremos aquí una ligera mención, reservándonos ampliarla al hablar de Newton. Una de las ideas fundamentales en dinámica es la de velocidad de una partícula en movimiento. Si establecemos en una gráfica el número de unidades de longitud que recorre la partícula en una unidad de tiempo frente al número de unidad de tiempo, trazaremos una línea, recta o curva, que describa simplemente el movimiento, de la partícula y la pendiente de esta línea en un punto dado de ella, tendremos la *velocidad* de la partícula en el instante correspondiente al punto; mientras más rápidamente se mueva la partícula, tanto más escarpada será la inclinación de la línea tangente. Esta inclinación debe, en efecto, medir la velocidad de la partícula en cualquier punto de su camino. El problema del movimiento, cuando se lleva a la *Geometría*, es el de hallar la inclinación de la línea tangente en un punto determinado de una curva. Existen problemas similares que están en relación con los *planos tangentes* a las superficies (que también tiene importantes interpretaciones en la mecánica y en la física matemática) y todos ellos deben ser tratados por el Cálculo diferencial, cuyo problema fundamental hemos intentado describir, tal como se presentó a Fermat y sus sucesores.

De lo ya dicho puede deducirse otro uso de este Cálculo. Suponga que cierta cantidad *y* es una "función" de otra, *t*, y se expresa $y = f(t)$, lo que significa que cuando cualquier número dado, por ejemplo 10, sustituye a *t*, es $f(10)$ "función f de 10" podemos deducir, de la *expresión algebraica de f* dada, el valor correspondiente de *y*, o sea $y = f(10)$. Para ser explícitos supongamos que $f(t)$ es esa particular "función" de *t* que se expresa en Álgebra por $t^2$, o $t*t$. Entonces, cuando $t = 10$, tendremos $y = f(10)$, y, por tanto, $y = 10^2 = 100$, para este valor de *t*; cuando $t = 1/2$, $y = 1/4$ así sucesivamente, para cualquier valor de *t*.

Todo esto es familiar para quien haya recibido su educación media en una época que no se remonte a más de 30 ó 40 años, pero algunos pueden haber olvidado lo que estudiaron en Aritmética siendo niños, lo mismo que otros no pueden declinar el latín "mensa" para salvar sus almas. Pero incluso el más olvidadizo verá que podemos hacer una gráfica de $y = f(t)$ para cualquier forma particular de *f* (cuando $f(t)$ es $t^2$, la gráfica es una parábola parecida a un arco invertido. Imaginemos la gráfica trazada. Si se hallan en ésta el punto *máximo* o el *mínimo*, el punto más superior o el más inferior que los que se hallan en sus *inmediatas proximidades*, observaremos que la tangente en cada uno de estos *máximos* o *mínimos* es paralela al eje *t*. Es decir, *la inclinación* de la tangente en tal *extremo* (máximo o mínimo) de *f (t) es cero.*

Así, si estamos buscando el extremo de una función determinada $f(t)$, debemos resolver también nuestro problema de inclinación para la curva particular $y = f(t)$, y habiendo encontrando la inclinación para el punto general *t, y*, igualar a cero la expresión algebraica de esta inclinación para encontrar los valores de *t* correspondientes al *extremo*. Esto es, sustancialmente, lo que Fermat hizo con su método de máximos y mínimos inventado en 1628 - 29, aunque no fue hecho semipúblico hasta 10 años más tarde, cuando Fermat envió su exposición a Descartes a través de Mersenne.

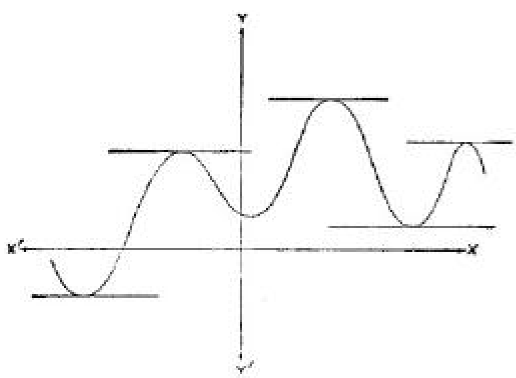


*Figura 4.3*

Las aplicaciones científicas de estas simples ideas, convenientemente elaboradas, para explicar problemas mucho más complicados que el antes descrito, son numerosas y de gran alcance. En mecánica, por ejemplo, como Lagrange descubrió, existe una cierta función de las posiciones (coordenadas) y velocidades de los cuerpos referentes a un problema, el cual, llevado a un "extremo" nos proporciona las "ecuaciones de movimiento" del sistema considerado, y éstas, a su vez, nos capacitan para determinar el movimiento, para describirlo completamente, en cualquier instante dado. En Física existen muchas funciones similares, cada una de las cuales resume la mayor parte de una extensa rama de la Física matemática con la simple exigencia de que la función en cuestión debe tener un "extremo". Hilbert, en 1916, encontró una para la relatividad general. Fermat no perdió, pues, su tiempo cuando empleó las horas de ocio que le dejaban sus trabajos, legales abordando los problemas de máximos y mínimos. Hizo una bella y asombrosa aplicación de sus principios a la óptica. De pasada puede notarse que este descubrimiento ha sido el germen de la reciente teoría de los quanta en su aspecto matemático, el de la "mecánica ondulatoria" propuesta en el año 1926. Fermat descubrió lo que de ordinario se denomina "el principio del tiempo mínimo", aunque sería más exacto decir "extremo" (mínimo o máximo) en lugar de "mínimo"'.

Según este principio, si un rayo de luz pasa desde un punto A a otro punto B reflejándose y refractándose (refracción significa el cambio de dirección al pasar desde el aire al agua o a través de una gelatina de densidad variable) durante su paso, el camino que sigue puede ser calculado (todos los quiebros y desviaciones debidos a la refracción y todas sus vueltas debidas a la reflexión) gracias a la *simple* exigencia de que el tiempo empleado para pasar desde A a B será un "extremo". [1]

De este principio Fermat dedujo las conocidas leyes de la reflexión y de la refracción: el ángulo de incidencia (en la reflexión) es igual al ángulo de reflexión; el seno del ángulo de incidencia (en la refracción) es una constante igual al número de veces el seno del ángulo de refracción al pasar desde un medio a otro.

La cuestión de la Geometría analítica ya ha sido mencionada; Fermat fue el primero que la aplicó al espacio de tres dimensiones. Descartes se contentó con dos dimensiones. La extensión, familiar a todos los estudiantes actuales, ya no aparece evidente por sí misma, incluso para un hombre de talento, desde los desarrollos de Descartes. Puede decirse que existe de ordinario mayor dificultad para encontrar una extensión significativa de un tipo particular de Geometría desde el espacio de dos dimensiones al de tres, que las que existen al pasar desde tres a cuatro o cinco... o *n* dimensiones. Fermat corrigió a Descartes en un punto esencial (el de la clasificación de las curvas por sus grados). Parece, pues, natural que el agrio Descartes luchara contra el imperturbable "gascón" Fermat. El soldado era muchas veces irritable y áspero en sus controversias sobre el método de las tangentes de Fermat, y el equilibrado jurista siempre se manifestaba serenamente cortés. Como ocurre de ordinario, el hombre que mantiene la calma encuentra mejores argumentos. Pero Fermat obtuvo la victoria no porque fuera un polemista más hábil, sino porque tenia razón.

De pasada diremos que Newton tuvo que haber oído hablar del empleo del Cálculo hecho por Fermat. Hasta el año 1934 no había sido publicada ninguna prueba de que así haya ocurrido, pero en ese año el profesor L. T. More recuerda en su bibliografía de Newton una carta, hasta entonces desconocida, en la que Newton dice explícitamente que el método de Fermat de trazar tangentes le sugirió el método del Cálculo diferencial.

Volvamos ahora a la máxima obra de Fermat, inteligible a todos los matemáticos y aficionados, la llamada "teoría de números", o "Aritmética superior", o finalmente, para usar el nombre sencillo que era suficiente para Gauss, Aritmética.

Los griegos separaron todo lo que hoy reunimos en los textos elementales bajo el nombre de Aritmética en dos diferentes secciones, *Logística* y *Aritmética*; la primera se refiere a las

[1] Este juicio es suficientemente exacto para la exposición presente. En realidad, lo que se requiere son los valores de las variables (coordenadas y velocidades) que hacen la función en cuestión *estacionaria* (que no aumenta ni disminuye). Un extremo es *estacionario*; pero un *estacionario* no es necesariamente un extremo.

aplicaciones prácticas para el comercio y la vida diaria general; la segunda, la Aritmética, en el sentido de Fermat y de Gauss, intenta descubrir las propiedades de los números como tales.

La Aritmética en sus esenciales y, probablemente, más difíciles problemas, investiga las relaciones mutuas de los números naturales 1, 2, 3, 4, 5,... que nosotros enumeramos casi tan pronto como aprendemos a hablar. Al esforzarse por dilucidar estas razones, los matemáticos han sido llevados a la invención de sus sutiles y abstrusas teorías, cuyas selvas de problemas técnicos oscurece los problemas iniciales, los que se refieren a 1, 2, 3, 4, 5,... con la real justificación de que así se encuentra la solución de estos problemas. Mientras tanto los resultados secundarios de esas investigaciones al parecer inútiles recompensan ampliamente a quienes emprendieron la tarea de encontrar numerosos métodos útiles aplicables a otros campos de la Matemática que tiene contacto directo con el universo físico. Para mencionar un ejemplo, la última fase del Álgebra, que en la actualidad es cultivada por los algebristas y que lanza una luz completamente nueva sobre la teoría de ecuaciones algebraicas, encuentra origen directo en los ensayos de Fermat para establecer el simple último teorema (que será, expuesto cuando hayamos preparado el camino).

Comenzamos con un famoso juicio que Fermat hizo acerca de los números primos. Un número natural primo o, brevemente, un número primo es cualquier número mayor que 1 que tiene como divisores exactos (sin dejar resto) únicamente 1 y al mismo número. Por ejemplo, 2, 3, 5, 7, 13, 17 son primos, y también los son 257, 65, 537. Pero, 4294967297 no es primo, porque admite el divisor 641, ni tampoco lo es el número 18446744073709551617, que es exactamente divisible por 274177; ambos números 641 y 274177 son primos. Cuando en Aritmética decimos que un número tiene como divisor otro número, o es divisible por otro, queremos decir que es *exactamente divisible* (el resto es cero). Así 14 es divisible por 7; 15 no lo es. Los dos números grandes que hemos mencionado antes premeditadamente deben esa mención a una razón que rápidamente encontraremos. Recordaremos además otra definición: la potencia **n**-ésima de un número, por ejemplo $N$, es el resultado de multiplicar $n$ veces $N$ y se escribe $N^n$ ; así $5^2 = 5 * 5 = 25$; $8^4 = 8 * 8 * 8 * 8 = 4.096$. Por razones de uniformidad $N$ se puede escribir $N^1$ [potencia primera].

Por otra parte, una "pagoda" como $((2)^3)^5$ significa que primero debemos calcular $3^5 = 243$, y entonces "elevar" 2 a esta potencia, $2^{243}$; el número resultante tiene 74 cifras.

El siguiente punto es de gran importancia en la vida de Fermat y también en la historia de la Matemática. Consideremos los números 3, 5, 17, 257, 65537. Todos ellos pertenecen a una "sucesión" de un tipo especial debido a que todos están engendrados (con 1 y 2), por el mismo simple proceso que aquí puede verse:

$$3 = 2 + 1;\ 5 = 2^2 + 1;\ 17 = 2^4 + 1;\ 257 = 2^8 + 1;\ 65537 = 2^{16} + 1;$$

y si tenemos el cuidado de comprobar el cálculo podemos fácilmente ver que los dos grandes números mencionados antes son $2^{32} + 1$ y $2^{64} + 1$, también números de la sucesión. Tenemos así siete números pertenecientes a esta sucesión; y los cinco *primeros de estos números son primos, mientras los dos últimos no lo son.*

Observando cómo se compone la sucesión, notaremos que los "exponentes" (los números escritos superiormente que indican a qué potencia se eleva 2) son 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, y veremos que son 1 (que se puede escribir $2^0$, como en Álgebra, si queremos hacerlo por uniformidad), $2^1$, $2^2$, $2^3$, $2^4$, $2^5$, $2^6$. Efectivamente, nuestra sucesión es $((2)^2)^n + 1$ donde $n$ toma los valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. No es preciso detenerse en $n = 6$; cuando $n = 7, 8, 9...$, podemos continuar indefinidamente la sucesión obteniendo números cada vez más enormes.

Supongamos ahora que deseamos descubrir si un determinado número de esa sucesión es primo. Aunque existan muchos cálculos abreviados, y numerosos divisores de ensayo puedan ser rechazados por inspección, y aunque la moderna Aritmética limita los tipos de divisores de ensayo que es necesario someter a prueba, nuestro problema requiere la misma laboriosidad que requeriría dividir el número dado por los primos 2, 3, 5, 7.... que son menores que la raíz cuadrada entera del número. Si ninguno de ellos divide exactamente al número, éste será primo. No es necesario decir que el trabajo que significa ese ensayo, aunque se utilicen las formas abreviadas conocidas, es prohibitivo, incluso para valores de $n$ tan pequeños como 100. (El lector puede asegurarse por sí mismo de esto intentando estudiar el caso $n = 8$).

Fermat afirmó que estaba convencido de que *todos los números de la sucesión son primos*. Los números mencionados (correspondientes a $n = 5, 6$) le contradicen, según hemos visto. Éste es el punto de interés histórico que nosotros deseamos mostrar: Fermat hizo erróneas conjeturas, *pero* jamás pretendió haber *probado* su conjetura. Algunos años más tarde emitió un confuso juicio, referente a lo que él había hecho, del que algunos críticos infieren que se había engañado. La importancia de este hecho se verá más adelante.

Como una curiosidad psicológica podemos mencionar que Zerah Colburn, el muchacho calculador americano a quien se preguntó si el sexto número de Fermat (4294967297) era o no primo, replicó, después de un breve cálculo mental, que no lo era, y que tenía por divisor 641. Fue incapaz de explicar el proceso en virtud del cual había llegado a esta conclusión correcta. Más tarde volveremos a ocuparnos de Colburn (en relación con Hamilton).

Antes de terminar con los "números de Fermat" $((2)^2)^n + 1$, volveremos la mirada hacia el siglo XVIII, época en que estos misteriosos números fueron en parte responsables de uno de los dos o tres acontecimientos más importantes en toda la larga historia de la Matemática. Por algún tiempo, un muchacho de 18 años había dudado, según la tradición, si dedicaría su soberbio talento a la Matemática 0 a la Filología. Tenía igual aptitud para ambas. Lo que le decidió fue un bello descubrimiento en relación con un simple problema de Geometría elemental, que es familiar a todos los escolares.

Un polígono *regular* de $n$ lados tiene todos sus $n$ lados iguales y todos sus $n$ ángulos también iguales. Los antiguos griegos encontraron pronto la manera de construir polígonos regulares de 3, 4, 5, 6, 8, 10, y 15 lados, por el uso, tan sólo, de la regla y el compás, y es fácil, con los mismos instrumentos, construir partiendo de un polígono regular que tenga un número determinado de lados otro polígono regular que tenga doble número de lados. El paso siguiente fue construir con eso mismos instrumentos polígonos regulares de 7, 9, 11, 13,... lados. Muchos buscaron el método, pero no llegaron a encontrarlo, debido a que tales construcciones son imposibles, aunque no lo sabían. Después de un intervalo de más de 2200 años, el muchacho que dudaba entre las Matemática y la Filología dio el siguiente paso hacia adelante.

Como ya se ha indicado, es suficiente considerar tan sólo polígonos que tengan un número impar de lados. El muchacho demostró que la construcción con regla y compás de un polígono regular que tenga un número impar de lados tan sólo es posible cuando el número es o bien un número primo de Fermat (es decir, un primo de la forma $((2)^2)^n + 1$), o se obtiene multiplicando entre sí diferentes primos de Fermat. Por tanto, la construcción es posible para 3, 5, ó 15 lados como los griegos sabían, pero no para 7, 9, 11, ó 13 lados, y es también posible para 17, ó 257 ó 65537 o para el primo siguiente en la sucesión de Fermat 3, 5, 17, 257, 65537, ... *si existe*, si bien nadie lo conoce todavía (1936), y la construcción es también posible para 3* 17 ó 5 *257 * 65537 lados, y así sucesivamente. Este descubrimiento, anunciado el 1° de junio de 1796, aunque hecho el 30 de marzo, fue el que indujo al muchacho a elegir la Matemática en lugar de la Filología como la obra de su vida. Su nombre era Gauss.

Un descubrimiento de otro tipo que Fermat hizo respecto a los números es el llamado "Teorema de Fermat" (*no* su "último teorema"). Si $n$ es cualquier número entero y $p$ cualquier primo, entonces, $n^p - n$ es divisible por $p$. Por ejemplo, tomando $p = 3$ y $n = 5$, tendremos $5^3 - 5$, ó 125-5, que es 120, o también 3 * 40; para $n = 2$, $p = 11$, tendremos $2^{11} - 2$, o sea 2048 - 2, que es 2046 = 11*186.

Es difícil o quizá imposible saber por qué algunos teoremas en Aritmética se consideran "importantes", mientras otros igualmente difíciles de probar son considerados triviales. Un criterio, aunque no necesariamente concluyente, es que el teorema pueda usarse en otros campos de la Matemática. Otro criterio es el de que sugiera investigaciones en Aritmética o en Matemática en general, y un tercer criterio es que en algún respecto sea universal. El teorema de Fermat justamente satisface todas esas algo arbitrarias exigencias: es de uso indispensable en muchas partes de la Matemática, incluyendo la teoría de grupos (véase capítulo XV) que, a su vez, es la raíz de la teoría de ecuaciones algebraicas; ha sugerido muchas investigaciones, entre las cuales puede mencionarse como un ejemplo importante todo el estudio de las raíces primitivas; finalmente, es universal, en el sentido, de que juzga una propiedad de todos los números primos, esas propiedades generales son extremadamente difíciles de encontrar y se conocen muy pocos casos.

Como de ordinario en él, Fermat expuso su teorema $n^p - n$ sin prueba. La primera fue dada por Leibniz en un manuscrito sin fecha, pero parece que descubrió la demostración antes de 1683. El lector puede igualmente ensayar su capacidad intentando obtener una prueba. Todo lo necesario se reduce a los siguientes datos, que pueden ser probados o supuestos para ese fin: Un número entero determinado puede ser construido tan sólo de un modo, aparte de las alteraciones de los factores, multiplicando números primos; si un primo divide al producto (resultante de la multiplicación) de dos números enteros, dividirá al menos uno de ellos. Por ejemplo: 24 = 2 * 2 * 2 * 3, y 24 no puede ser obtenido por la multiplicación de primos en ninguna, forma esencialmente diferente: por ejemplo,

2 * 2 * 2 * 3
2 * 2 *3 * 2
2 * 3 * 2 * 2
3 * 2 * 2 * 2

lo que es lo mismo;

7 divide a 42, y 42 igual 2 * 21 = 3 * 14 = 6 * 7

en cuyas operaciones 7 divide al menos uno de los números que se multiplican para obtener 42; del mismo modo, 98 es divisible por 7, y 98 = 7 * 14, en cuyo caso 7 divide tanto a 7 como a 14, y, por tanto, al menos uno de ellos. Partiendo de estos dos hechos puede obtenerse la prueba en menos de media página. Se halla dentro de la comprensión de cualquier muchacho normal de 14 años, pero se puede apostar que de un millón de seres humanos de inteligencia normal de cualquier edad, menos de 10, entre los que no han aprendido más Matemática que la Aritmética escolar, conseguirán encontrar una prueba dentro de un tiempo razonable es decir, un año.

Éste parece ser el lugar adecuado para citar algunas famosas observaciones de Gauss, que se refieren al campo favorito de los estudios de Fermat. La traducción al inglés se debe al aritmético irlandés H. J. S. Smith (1826 - 1863) correspondiente a la introducción de Gauss a los trabajos matemáticos de Eisenstein publicado en 1847.

"La Aritmética superior nos presenta una inagotable serie de verdades interesantes, de verdades que no están aisladas, sino que se encuentran en una íntima conexión interna, y entre las cuales, a medida que nuestro conocimiento aumenta, vamos descubriendo continuamente nuevos e inesperados vínculos. Una gran parte de estas teorías presenta, además, la peculiaridad de que proposiciones importantes que tienen el sello de la simplicidad son muchas veces fácilmente descubribles por inducción, y sin embargo, tienen un carácter tan profundo que no podemos encontrar su demostración hasta después de muchos ensayos, y aun entonces, cuando conseguimos triunfar, ha sido muchas veces mediante procesos penosos y artificiales, mientras los métodos más simples pueden permanecer gran tiempo ocultos."

Una de estas interesantes verdades que Gauss menciona es considerada por algunos como la más bella (pero no lo más importante) que Fermat ha descubierto acerca de los números: todo número primo de la forma $4n + 1$ es suma de dos cuadrados. Es fácil demostrar que ningún número de la forma $4n + 1$ es suma de dos cuadrados. Como todos los primos mayores que 2 corresponden a una u otra de estas formas, no hay nada que añadir. Por ejemplo, cuando 37 es dividido por 4 deja el resto 1, de modo que 37 debe ser la suma de dos cuadrados de números enteros. Por tanteos (existen otros caminos mejores) encontramos, en efecto, que $37 = 1 + 36 = 1^2 + 6^2$, y que no hay otros cuadrados $x^2$ e $y^2$ tales que $37 = x^2+ y2$. Para el primo 101 nosotros tenemos $1^2 + 10^2$; para 41 tenemos $4^2 + 5^2$. En cambio $19 = 4 * 5 - 1$, no es la suma de dos cuadrados.

Como en casi todos sus trabajos aritméticos, Fermat no dio la prueba de este teorema, que fue encontrada por el gran Euler en 1749 después de haber trabajado *siete años.* Pero Fermat describe el ingenioso método que inventó mediante el cual demuestra éste y algunos otros de sus maravillosos resultados. Se trata del llamado "descenso infinito", que es infinitamente más difícil de cumplir que la ascensión de Elías al cielo. Su exposición es concisa y clara, como veremos en una traducción libre al inglés de su carta del mes de agosto de 1659 a Carcavi.

"Durante largo tiempo he sido incapaz de aplicar mi método a las proposiciones afirmativas, debido a que las tretas que hay que emplear en ellas son mucho más difíciles que las que uso para las proposiciones negativas. Así, cuando debo probar que *todo* número primo que *supere* a un múltiplo *de 4* en *1 se compone de dos cuadrados,* me encontraba ante un tormento. Pero, al fin, una larga y repetida meditación me ha dado la luz que me faltaba, y ahora someto proposiciones afirmativas a mi método, con la ayuda de ciertos nuevos principios que necesariamente deben ser añadidos. El curso de mi razonamiento en las proposiciones afirmativas es éste: Si un primo arbitrariamente elegido de la forma $4n + 1$ no es suma de dos cuadrados, (pruebo que) existirá otro de la misma naturaleza, menor que el elegido, y (por tanto) un tercero aún menor, y así sucesivamente. Haciendo un "infinito descenso" de esta forma, llegamos finalmente al número 5, el menor de todos los números de este tipo ($4n$ + l). Por la prueba mencionada y el precedente argumento de ella, se deduce que 5 no es una suma de dos cuadrados. Pero como lo es, debemos inferir por *reductio ad absurdum* que todo los números de la forma $4n + 1$ son sumas de dos cuadrados».

Toda la dificultad para aplicar el "descenso" a nuevos problemas está en el primer paso, el de probar que si la proposición aceptada o supuesta es verdadera para cualquier número elegido al azar, será también verdadera para un número *más pequeño del mismo tipo.* No existe un método general aplicable a todos los problemas para dar ese paso.

Algo más raro que la paciencia del pordiosero o que la muy encarecida "infinita capacidad para sufrir dolores" es necesario para encontrar un camino a través del desierto. A quienes se imaginan genios, aunque no sean otra cosa que hábiles tenedores de libros, se les puede recomendar que desarrollen su infinita paciencia en el último teorema de Fermat.. Antes de exponer el teorema mencionaremos otro ejemplo de los problemas sagazmente simples que Fermat trató y resolvió. Llegamos ahora al tema del *Análisis diofántico* en que Fermat sobresalió. Cualquiera que sepa algo de números puede detenerse sobre el curioso hecho de que 27 = 25 + 2; la cuestión de interés aquí es que tanto 27 como 25 son potencias exactas, $27 = 3^3$ y $25 = 5^2$ . Así observamos que $y^3 = x^2 + 2$ tiene una solución en números enteros *x, y*; la solución es y = 3, *x* = 5. Como una especie de prueba de superinteligencia el lector puede ahora demostrar que *y* = 3, *x* = 5, son los únicos números enteros que satisfacen la ecuación. No es fácil. En efecto, este juego aparentemente infantil requiere mayor innata capacidad intelectual que para comprender la teoría de la relatividad.

La ecuación $y^3 = x^2 + 2$ *con la limitación de qué la solución y, x debe ser en números enteros, es indeterminada* (debido a que hay dos incógnitas *x, y*, y una ecuación que las relaciona) o *diofántica*, porque fue el griego Diofanto uno de los primeros en insistir sobre las soluciones de ecuaciones en números *enteros*, o, con menos inflexibilidad, soluciones racionales (fraccionarias). No es difícil describir un infinito número de soluciones sin la restricción de los números enteros: así, podemos dar a *x* el valor que nos plazca, y entonces determinar *y*, añadiendo 2 a esta $x^2$ y extrayendo la raíz cúbica del resultado. Pero el problema *diofántico* de encontrar todas las soluciones con números enteros es otra cuestión diferente. La solución *y* = 3, *x* = 5, se aprecia "por inspección"; la dificultad del problema es probar que no existen otros números enteros *y, x* que satisfagan la ecuación. Fermat probó que no existe ninguno, pero, como de ordinario, suprimió su demostración, y todavía, después de muchos años de su muerte, no se ha encontrado.

Cuando Fermat afirmó tener una prueba, esa prueba fue más tarde encontrada. Y así ocurrió para todas sus afirmaciones positivas con la única excepción de la al parecer simple solución de su último teorema, que, los matemáticos se han esforzado por encontrar durante casi 300 años. Siempre que Fermat afirmó que había probado algo, luego se ha confirmado la exactitud, excepto para ese caso en que no ha sido encontrada la prueba. Su honradez escrupulosa y su penetración sin rival justifican que muchos, aunque no todos, acepten su afirmación de que poseía la demostración de su teorema.

Era costumbre de Fermat, al leer el Diophantus de Bachet, apuntar los resultados de sus meditaciones en breves notas marginales hechas en su ejemplar. El margen no era suficiente para escribir las demostraciones. Así, al comentar el octavo problema del segundo libro de la Aritmética de Diofanto, referente a la solución en números racionales (fracciones o números enteros) de la ecuación

$$x^2 + y^2 = a^2 ,$$

Fermat hace el siguiente comentario:

"Por el contrario, es imposible descomponer un cubo en dos cubos, una cuarta potencia en dos cuartas potencias, o, de un modo general, cualquier potencia superior a la segunda en dos potencias del mismo grado. Yo he descubierto una demostración maravillosamente exacta (de este teorema general), pero este margen es demasiado estrecho para desarrollarlo" (Fermat, Oeuvres, III, pág. 241). Éste es su famoso último teorema, que descubrió hacia el año 1637.

Traduciendo todo esto al lenguaje moderno, el problema de Diofanto es encontrar números enteros o fraccionarlos *x, y, a*, tales que $x^2 + y^2 = a^2$; Fermat asegura que no existen números enteros o fracciones tales que $x^3 + y^3 = a^3$ o $x^4 + y^4 = a^4$ o, de un modo general, que

$$x^n + y^n = a^n$$

si $n$ es un número entero mayor que 2.
En el problema de Diofanto tiene una infinidad de soluciones; por ejemplo, $x = 3$, $y = 4$, $a = 5$; $x = 5$, $y = 12$, $a = 13$. Fermat mismo dio una prueba, mediante su método del "descenso infinito", de la imposibilidad de $x^4 + y^4 = a^4$. Desde entonces se ha demostrado que es imposible en números enteros (o fracciones) $x^n + y^n = 0$ para muchos números $n$ (sobre todo para todos los primos[2] menores que $n = 14000$, si ninguno de los números $x$, $y$, $a$ es divisible por $n$), pero esto no es lo que se pedía. Lo que se pide es que abarque *todos los n* mayores que 2. Fermat dijo que poseía una "maravillosa prueba".

Después de todo lo que se ha dicho, ¿es posible que se haya engañado? Un gran aritmético, Gauss, vota en contra de Fermat. Sin embargo, la zorra que no podía alcanzar las uvas afirmó que estaban verdes. Otros votaron a su favor. Fermat era un matemático de primera fila, un hombre de impecable honradez y un aritmético que no reconoce superior en la historia[3].

---

[2] El lector puede fácilmente ver que basta tratar el caso en que $n$ sea un número impar, ya que en Álgebra $u^{ab} = (u^a)^b$ donde $u$, $a$, $b$ son cualquier número.

[3] En 1903 el profesor alemán Paul Wolfskehl legó 100.000 marcos para premiar a la primera persona que diera una prueba *completa* del último teorema de Fermat. La inflación después de la primera guerra mundial, redujo este premio a una fracción de centavo.