

# Problemi di Variazione Invariante (Invariant Variation Problems)

Emmy Noether

Traduzione italiana di “Invariante Variationsprobleme”, *Nachr. d. König. Gesellsch. d. Wiss. zu Göttingen, Math-phys. Klasse*, 235–257 (1918), originariamente apparso in *Transport Theory and Statistical Physics*, **1** (3), 183–207 (1971). <sup>0</sup>

## Sommario

I problemi variazionali qui esposti sono tali da ammettere un gruppo continuo (nel senso di Lie); le conclusioni che emergono dalle corrispondenti equazioni differenziali trovano la loro più generale espressione nei teoremi formulati nella Sezione 1 e dimostrati nelle seguenti sezioni. Riguardo queste equazioni differenziali che nascono da problemi variazionali, affermazioni di gran lunga più accurate sono realizzabili rispetto ad arbitrarie equazioni che ammettono un gruppo, che sono il soggetto delle ricerche di Lie. Ciò che segue, perciò, rappresenta una combinazione dei metodi del formale calcolo delle variazioni con quelli della Teoria dei Gruppi di Lie. Per gruppi e problemi variazionali speciali, questa combinazione di metodi non è nuova. Posso citare Hamel e Herglotz per gruppi finiti speciali, Lorentz e i suoi allievi (per esempio Fokker), Weyl e Klein per i gruppi infiniti speciali.<sup>1</sup> Specialmente la Seconda Nota di Klein e il presente sviluppo si sono reciprocamente influenzati, a tal riguardo potrei riferirmi alle note conclusive di Klein.

## § 1. Osservazioni Preliminari e Formulazione dei Teoremi

Tutte le funzioni che compaiono in seguito devono assumersi analitiche, o almeno continue e continuamente differenziabili un numero definito di volte, e uniche nell'intervallo considerato.

Per “gruppo di trasformazioni”, familiarmente, si intende un sistema di trasformazioni tale che per ciascuna trasformazione, esista una inversa contenuta nel sistema, e tale che la composizione di due qualsiasi trasformazioni del sistema a sua volta appartiene al sistema. Il gruppo sarà chiamato un gruppo continuo finito  $\mathfrak{G}_\rho$  se le sue trasformazioni sono contenute in una più generale (trasformazione) che dipende analiticamente da  $\rho$  parametri essenziali  $\epsilon$  (i.e., i  $\rho$  parametri non sono rappresentabili come  $\rho$  funzioni di meno parametri). Corrispondentemente, un gruppo infinito continuo  $\mathfrak{G}_{\infty\rho}$  si intende essere un gruppo le cui più generali trasformazioni dipendono da  $\rho$  funzioni essenziali arbitrarie  $p(x)$  e dalle loro derivate in

---

<sup>0</sup>Traduzione italiana di G. Voto ([giovanni.voto@yahoo.com](mailto:giovanni.voto@yahoo.com))

<sup>1</sup>Hamel, *Math. Ann.* **59** e *Z. f. Math. u. Phys.* **50**. Herglotz, *Ann. d. Phys.* (4) **36**, esp. § 9, p. 511. Fokker, *Verslag d. Amsterdamer Akad.* Jan. 27, 1917. Per una ulteriore bibliografia, cfr. Klein's second Note, *Göttinger Nachrichten*, July 19, 1918. Il recente lavoro pubblicato da Kneser (*Math. Zschr.* 2) ha a che fare con il problema degli invarianti con un metodo simile.

maniera analitica, o al minimo in modo continuo e molteplicitamente continuamente differenziabile. Un gruppo che dipenda da infiniti parametri ma non da funzioni arbitrarie è un termine intermedio tra i due. Infine, un gruppo dipendente sia da funzioni arbitrarie che da parametri viene chiamato gruppo misto.<sup>2</sup>

Siano  $x_1, \dots, x_n$  variabili indipendenti e  $u_1(x), \dots, u_\mu(x)$  funzioni dipendenti da queste. Se le  $x$ 's e  $u$ 's sono soggette alle trasformazioni di un gruppo, allora, per l'ipotesi di invertibilità delle trasformazioni, devono esserci esattamente  $n$  variabili indipendenti  $y_1, \dots, y_n$  tra le quantità trasformate; siano le altre variabili che dipendono da esse indicate con  $v_1(y), \dots, v_\mu(y)$ . Nelle trasformazioni, le derivate delle  $u$  rispetto a  $x$ 's, cioè  $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots$  possono altresì comparire.<sup>3</sup> Una funzione viene detta un invariante del gruppo se esiste una relazione

$$P\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots\right) = P\left(y, v, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \dots\right).$$

In particolare, allora, un integrale  $I$  sarà un invariante del gruppo se sussiste una relazione

$$I = \int \dots \int f\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \dots\right) dx = \int \dots \int f\left(y, v, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}, \dots\right) dy^4 \quad (1)$$

integrata su un  $x$ -intervallo *arbitrario* reale e il corrispondente  $y$ -intervallo.<sup>5</sup>

Allora, per un, non necessariamente invariante integrale  $I$ , formo la prima variazione  $\delta I$  e la trasformo mediante integrazione parziale in accordo con le regole del calcolo delle variazioni. Come sappiamo, purché  $\delta u$  con tutte le derivate che compaiono si assumono annullarsi al contorno, mentre in altre parti arbitrarie,

$$\delta I = \int \dots \int \delta f dx = \int \dots \int \left( \sum \psi_i \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right) \delta u_i \right) dx, \quad (2)$$

dove  $\psi$  sta per le espressioni di Lagrange, i.e., il lato sinistro (lhs) delle equazioni di Lagrange del corrispondente problema variazionale  $\delta I = 0$ . A questa relazione integrale corrispondono una identità integral-free (libera da integrale) in  $\delta u$  e le sue derivate, generata includendo anche i termini al contorno. Come l'integrazione parziale mostra, questi termini di frontiera sono integrali su delle divergenze, i.e., delle espressioni

<sup>2</sup>Lie, in "Grundlagen für die Theorie der Unendlichen kontinuierlichen Transformationsgruppen" (Fondamenti di teoria dei gruppi di trasformazioni continui infiniti), Ber. d. K. Sachs. Ges. d. Wissensch 1881 (citato come Grundlagen), definisce un gruppo continuo infinito come un gruppo di trasformazioni che sono definite dalla più generale soluzione di un sistema di equazioni differenziali alle derivate parziali, purché queste soluzioni non dipendano solo da un numero finito di parametri. Uno dei su citati tipi che differiscono dal gruppo finito sarà quindi ottenuto; mentre soddisfare al contrario il caso limite di infiniti parametri non deve necessariamente soddisfare un sistema di equazioni differenziali.

<sup>3</sup>Elimino gli indici, laddove è fattibile, anche nelle sommatorie; così,  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  per  $\frac{\partial^2 u_\alpha}{\partial x_\beta \partial x_\gamma}$ , etc.

<sup>4</sup>Come abbreviazione, scrivo  $dx, dy$  per  $dx_1 \dots dx_n, dy_1 \dots dy_n$ .

<sup>5</sup>Tutti gli argomenti  $x, u, \epsilon, p(x)$  che compaiono nelle trasformazioni sono da assumersi reali, mentre i coefficienti possono essere complessi. Ma poichè i risultati finali concernono *identità* nelle  $x$ 's,  $u$ 's, parametri e funzioni arbitrarie, questi valgono anche per valori complessi, purché tutte le funzioni che compaiono si assumano analitiche. Larga parte dei risultati, incidentalmente, può essere giustificata senza integrali, la restrizione ai valori reali non è necessaria, anche per gli argomenti. D'altra parte, gli sviluppi alla fine della Sezione 2 and l'inizio della Sezione 5 non sembrano fattibili senza integrali.

$$\text{Div } A = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial A_n}{\partial x_n},$$

dove  $A$  è lineare in  $\delta u$  e le sue derivate. Quindi

$$\sum \psi_i \delta u_i = \delta f + \text{Div } A. \quad (3)$$

Se in particolare  $f$  contiene solo derivate prime delle  $u$ , allora nel caso di un singolo integrale l'identità (3) è identica con ciò che Heun chiama "l'equazione centrale di Lagrange"

$$\sum \psi_i \delta u_i = \delta f - \frac{d}{dx} \left( \sum \frac{\partial f}{\partial u'_i} \delta u_i \right), \quad \left( u'_i = \frac{du_i}{dx} \right), \quad (4)$$

mentre per l' $n$ -esimo integrale, (3) va in

$$\sum \psi_i \delta u_i = \delta f - \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \sum \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_1}} \delta u_i \right) - \dots - \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \sum \frac{\partial f}{\partial \frac{\partial u_i}{\partial x_n}} \delta u_i \right). \quad (5)$$

Per l'integrale singolo e le  $\kappa$  derivate delle  $u$ 's, (3) è data da

$$\begin{aligned} \sum \psi_i \delta u_i = \delta f - & \\ & - \frac{d}{dx} \left\{ \sum \left( \binom{1}{1} \frac{\partial f}{\partial u_i^{(1)}} \delta u_i + \binom{2}{1} \frac{\partial f}{\partial u_i^{(2)}} \delta u_i^{(1)} + \dots + \binom{\kappa}{1} \frac{\partial f}{\partial u_i^{(\kappa)}} \delta u_i^{(\kappa-1)} \right) \right\} + \\ & + \frac{d^2}{dx^2} \left\{ \sum \left( \binom{2}{2} \frac{\partial f}{\partial u_i^{(2)}} \delta u_i + \binom{3}{2} \frac{\partial f}{\partial u_i^{(3)}} \delta u_i^{(1)} + \dots + \binom{\kappa}{2} \frac{\partial f}{\partial u_i^{(\kappa)}} \delta u_i^{(\kappa-2)} \right) \right\} + \dots \\ & + (-1)^\kappa \frac{d^\kappa}{dx^\kappa} \left\{ \sum \binom{\kappa}{\kappa} \frac{\partial f}{\partial u_i^{(\kappa)}} \delta u_i \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

e una corrispondente identità vale per l' $n$ -fold integrale; in particolare,  $A$  contiene  $\delta u$  fino alla  $(\kappa - 1)$ -esima derivata. Il fatto che (4), (5), e (6) realmente definiscono le espressioni di Lagrange  $\psi_i$  segue dal fatto che le combinazioni dei lati destri eliminano tutte le derivate superiori delle  $\delta u$ , mentre d'altra parte la relazione (2), a cui l'integrazione parziale porta *unicamente*, è soddisfatta.

In seguito avremo a che fare con questi due teoremi:

- I. Se l'integrale  $I$  è invariante rispetto a  $\mathfrak{G}_\rho$ , allora  $\rho$  combinazioni linearmente delle espressioni di Lagrange diventano divergenze — e da questo, inversamente, l'invarianza di  $I$  rispetto a  $\mathfrak{G}_\rho$  segue. Il teorema vale anche nel caso limite di infiniti parametri.
- II. Se l'integrale  $I$  è invariante rispetto a  $\mathfrak{G}_{\infty\rho}$  in cui le funzioni arbitrarie entrano sino all' $\sigma$ -esima derivata, allora sussistono  $\rho$  relazioni di identità tra le espressioni di Lagrange e le loro derivate sino al  $\sigma$ -esimo ordine. Anche in questo caso, l'inverso vale.<sup>6</sup>

Per i gruppi misti, le affermazioni di entrambi i teoremi valgono; cioè, entrambe le relazioni di dipendenza e divergenza indipendentemente occorrono.

Passando da queste identità al corrispondente problema variazionale, i.e., ponendo  $\psi = 0$ ,<sup>7</sup> Il Teorema

<sup>6</sup>Per alcune eccezioni triviali, cfr. Sezione 2, Nota 13.

<sup>7</sup>Piuttosto in modo più generale, possiamo alternativamente porre  $\psi_i = T_i$ ; cfr. Sezione 3, Nota 15.

I nel caso uni-dimensionale — dove la divergenza diventa un differenziale totale — afferma l'esistenza di  $\rho$  integrali primi, tra i quali, tuttavia, una dipendenza non lineare può sussistere;<sup>8</sup> nel caso multidimensionale, le equazioni per le divergenze a cui spesso ci si riferisce come a “leggi di conservazione” sono ottenute; il Teorema II afferma che  $\rho$  delle equazioni di Lagrange sono conseguenza del resto.

L'esempio più semplice del Teorema II — senza l'inverso — è fornito dalla rappresentazione parametrica di Weierstrass; quì l'integrale, con oogeneità del primo ordine, è come sappiamo invariante se la variabile indipendente  $x$  è sostituita da una funzione arbitraria di  $x$  che lascia  $u$  invariata ( $y = p(x)$ ;  $v_i(y) = u_i(x)$ ). Così una funzione arbitraria compare, ma senza derivate, e a ciò corrisponde la nota relazione invariante tra le espressioni di Lagrange stesse  $\sum \psi_i \frac{du_i}{dx} = 0$ . Un altro esempio è fornito dalla “teoria generale della relatività” dei fisici; lì abbiamo il gruppo di *tutte* le trasformazioni  $y_i = p_i(x)$  delle  $x$ , mentre le  $u$  (designate come  $g_{\mu\nu}$  and  $q$ ) sono soggette alle trasformazioni indotte per i coefficienti di una forma quadratica, differenziale e lineare — trasformazioni che contengono le derivate prime della funzione arbitraria  $p(x)$ . A ciò corrisponde la familiare  $n$ -dipendenza tra le espressioni di Lagrange e le loro derivate prime.<sup>9</sup>

Se in particolare specializziamo il gruppo non permettendo derivate delle  $u(x)$  nelle trasformazioni, e inoltre lasciamo che le quantità indipendenti trasformate dipendano solo dalle  $x$ , e non dalle  $u$ , allora (come è mostrato nella Sezione 5) l'invarianza di  $I$  implica la relativa invarianza di  $\sum \psi_i \delta u_i$ ,<sup>10</sup> e in maniera analoga della divergenza che occorre nel Teorema I, una volta che i parametri siano soggetti a trasformazioni appropriate. Per il Teorema II, in modo simile, otteniamo la relativa invarianza del membro sinistro delle dipendenze così associate con l'aiuto di funzioni arbitrarie; a come conseguenza di questo, un'altra funzione la cui divergenza si annulla identicamente e ammette il gruppo — media, nella teoria della relatività dei fisici, la connessione tra le dipendenze e le leggi di conservazione dell'energia.<sup>11</sup> Il Teorema II, infine, in termini di teoria dei gruppi, fornisce la prova di una collegata asserzione Hilbertiana circa il fallimento delle leggi di conservazione dell'energia propria nella “relatività generale.” Con queste osservazioni supplementari, il Teorema I comprende tutti i teoremi sugli integrali primi conosciuti in meccanica etc., mentre il Teorema II può essere descritto come la massima possibile generalizzazione della “teoria generale della relatività” in teoria dei gruppi.

## § 2. Relazioni di Divergenza e Dipendenze

Sia  $\mathfrak{G}$  un — finito o infinito — gruppo continuo; allora è sempre possibile disporre gli zero-valori dei parametri  $\epsilon$ , o le funzioni arbitrarie  $p(x)$ , in modo da corrispondere alla trasformazione identità.<sup>12</sup>

La più generale trasformazione possibile sarà dunque della forma

<sup>8</sup>Cfr. la fine della Sezione 3.

<sup>9</sup>Cfr. e.g., la presentazione di Klein.

<sup>10</sup>Cioè,  $\sum \psi_i \delta u_i$  acquista un fattore nella trasformazione.

<sup>11</sup>Cfr. la seconda nota di Klein.

<sup>12</sup>Cfr. e.g., Lie, Grundlagen, p. 331. Laddove funzioni arbitrarie sono coinvolte, i valori  $a^\sigma$  dei parametri sono sostituiti da funzioni fissate  $p^\sigma$ ,  $\frac{\partial p^\sigma}{\partial x}$ , ...; e corrispondentemente, i valori  $a^\sigma + \epsilon$  da  $p + p(x)$ ,  $\frac{\partial p^\sigma}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial x}$ , etc.

$$v_i(y) = B_i \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right) = u_i + \Delta u_i + \dots$$

dove  $\Delta x_i$ ,  $\Delta u_i$  stanno per i termini del più basso ordine in  $\epsilon$ , o  $p(x)$  e le sue derivate; nelle quali, di fatto, saranno assunte lineari. Come vedremo in seguito, ciò non rappresenta una perdita di generalità.

Ora sia l'integrale  $I$  invariante rispetto a  $\mathfrak{G}$ , soddisfi, cioè, la relazione (1). Allora in particolare  $I$  sarà invariante anche rispetto alla trasformazione infinitesima

$$y_i = x_i + \Delta x_i; \quad v_i(y) = u_i + \Delta u_i;$$

contenuta in  $\mathfrak{G}$ , e per questa relazione (1) diventa

$$0 = \Delta I = \int \dots \int f \left( y, v(y), \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right) dy - \int \dots \int f \left( x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right) dx, \quad (7)$$

dove il primo integrale è esteso all'intervallo  $x + \Delta x$  corrispondente all'intervallo  $x$ . Ma questa integrazione può essere alternativamente trasformata in una integrazione sull'intervallo  $x$ , in virtù della trasformazione, valida per  $\Delta x$  infinitesimo,

$$\int \dots \int f \left( y, v(y), \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right) dy = \int \dots \int f \left( x, u(x), \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right) dx + \int \dots \int \text{Div} (f \cdot \Delta x) dx. \quad (8)$$

Così se in luogo della trasformazione infinitesima  $\Delta u$ , introduciamo la variazione

$$\bar{\delta} u_i = v_i(x) - u_i(x) = \Delta u_i - \sum \frac{\partial u_i}{\partial x_\lambda} \Delta x_\lambda, \quad (9)$$

allora le (7) e (8) diventano

$$0 = \int \dots \int \{ \bar{\delta} f + \text{Div} (f \cdot \Delta x) \} dx. \quad (10)$$

Il membro destro è la formula familiare per la variazione simultanea delle variabili dipendenti e indipendenti. Poichè la relazione (10) è soddisfatta dall'integrazione su qualsiasi intervallo arbitrario, l'integrando deve annullarsi identicamente; perciò l'equazione differenziale di Lie per l'invarianza di  $I$  diventa la relazione

$$\bar{\delta} f + \text{Div} (f \cdot \Delta x) = 0. \quad (11)$$

Se in questa, per la (3),  $\bar{\delta} f$  è espressa in termini delle espressioni di Lagrange, otteniamo

$$\sum \psi_i \bar{\delta} u_i = \text{Div} B \quad (B = A - f \cdot \Delta x), \quad (12)$$

e questa relazione, perciò, per ogni integrale invariante  $I$ , rappresenta una identità in ogni argomento che compare; è la richiesta forma delle equazioni differenziali di Lie per  $I$ .<sup>13</sup>

<sup>13</sup>(12) va in  $0 = 0$  nel caso triviale — il quale può verificarsi solo se  $\Delta x$ ,  $\Delta u$  dipendono anche dalle derivate  $u$  — quando  $\text{Div} (f \cdot \Delta x) = 0$ ,  $\bar{\delta} u = 0$ ; così queste trasformazioni infinitesime devono essere sempre eliminate dai gruppi, e solo il numero dei rimanenti parametri, o delle funzioni arbitrarie, deve essere contato nella formulazione dei teoremi. Se le trasformazioni infinitesime che rimangono formano un gruppo deve essere lasciato discutibile.

Ora per il presente sia  $\mathfrak{G}$  considerato come un gruppo finito continuo  $\mathfrak{G}_\rho$ ; siccome per ipotesi  $\Delta u$  e  $\Delta x$  sono lineari nei parametri  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_\rho$ , per la (9) lo stesso vale per  $\bar{\delta}u$  e le sue derivate; perciò  $A$  e  $B$  sono lineari nelle  $\epsilon$ . Così se ponga

$$B = B^{(1)}\epsilon_1 + \dots + B^{(\rho)}\epsilon_\rho; \quad \bar{\delta}u = \bar{\delta}u^{(1)}\epsilon_1 + \dots + \bar{\delta}u^{(\rho)}\epsilon_\rho,$$

dove, cioè  $\bar{\delta}u^{(1)}, \dots$  sono funzioni di  $x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots$ , le richieste relazioni di divergenza seguono dalla (12):

$$\sum \psi_i \bar{\delta}u_i^{(1)} = \text{Div } B^{(1)}; \quad \dots \quad \sum \psi_i \bar{\delta}u_i^{(\rho)} = \text{Div } B^{(\rho)}. \quad (13)$$

Così  $\rho$  combinazioni linearmente indipendenti delle espressioni di Lagrange diventano divergenze; l'indipendenza lineare segue dal fatto che per la (9),  $\bar{\delta}u = 0, \Delta x = 0$  implicherebbe  $\Delta u = 0, \Delta x = 0$ , o in altri termini una dipendenza tra le trasformazioni infinitesime. Ma per ipotesi, non ne esiste nessuna per qualsiasi valore dei parametri, poichè altrimenti le  $\mathfrak{G}_\rho$  rigenerate per integrazione dalle trasformazioni infinitesime dipenderebbero da meno di  $\rho$  parametri essenziali. Ma l'ulteriore possibilità  $\bar{\delta}u = 0, \text{Div}(f \cdot \Delta x) = 0$  è stata esclusa.

Tali conclusioni valgono anche nel caso limite di infiniti parametri.

Ora sia  $\mathfrak{G}$  un gruppo continuo infinito  $\mathfrak{G}_{\infty\rho}$ ; allora  $\bar{\delta}u$  e le sue derivate, e dunque anche  $B$ , sarà di nuovo lineare nelle funzioni arbitrarie di  $p(x)$  e le loro derivate;<sup>14</sup> indipendentemente dalla (12), inoltre, per sostituzione dei valori di  $\bar{\delta}u$ , sia

$$\sum \psi_i \bar{\delta}u_i = \sum_{\lambda, i} \psi_i \left\{ a_i^{(\lambda)}(x, u, \dots) p^{(\lambda)}(x) + b_i^{(\lambda)}(x, u, \dots) \frac{\partial p^{(\lambda)}}{\partial x} + \dots + c_i^{(\lambda)}(x, u, \dots) \frac{\partial^\sigma p^{(\lambda)}}{\partial x^\sigma} \right\}.$$

Ora, per l'identità

$$\varphi(x, u, \dots) \frac{\partial^\tau p(x)}{\partial x^\tau} = (-1)^\tau \cdot \frac{\partial^\tau \varphi}{\partial x^\tau} \cdot p(x) \quad \text{mod Divergences}$$

e analogamente alla formula dell'integrazione parziale, le derivate di  $p$  possono essere sostituite da  $p$  stessa e dalle divergenze che saranno lineari in  $p$  e le sue derivate; quindi abbiamo

$$\sum \psi_i \bar{\delta}u_i = \sum_\lambda \left\{ (a_i^{(\lambda)} \psi_i) - \frac{\partial}{\partial x} (b_i^{(\lambda)} \psi_i) + \dots + (-1)^\sigma \frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma} (c_i^{(\lambda)} \psi_i) \right\} p^{(\lambda)} + \text{Div } \Gamma \quad (14)$$

e in congiunzione con la (12)

$$\sum \left\{ (a_i^{(\lambda)} \psi_i) - \frac{\partial}{\partial x} (b_i^{(\lambda)} \psi_i) + \dots + (-1)^\sigma \frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma} (c_i^{(\lambda)} \psi_i) \right\} p^{(\lambda)} = \text{Div}(B - \Gamma). \quad (15)$$

Formo ora l' $n$ -fold integrale sulla (15), esteso su ciascun intervallo; e scelgo le  $p(x)$  tali che esse, con tutte le derivate che occorrono in  $(B - \Gamma)$ , si annullano sul confine (contorno). Poichè l'integrale di una divergenza si riduce ad un integrale di frontiera, allora, l'integrale sul lato sinistro della (15) si annullerà anch'esso dato che le  $p(x)$  che sono arbitrarie ad eccezione del fatto che esse e sufficientemente abbastanza delle

<sup>14</sup>Che ciò significhi nessuna restrizione nell'assumere le  $p$  libere dalle  $u, \frac{\partial u}{\partial x}$ , è mostrato dall'inverso.

loro derivate si annullano sulla frontiera; segue dunque, per nota inferenza, l'annullarsi dell'integrando per ogni  $p(x)$ , o in altri termini delle  $\rho$  relazioni

$$\sum \left\{ (a_i^{(\lambda)} \psi_i) - \frac{\partial}{\partial x} (b_i^{(\lambda)} \psi_i) + \dots + (-1)^\sigma \frac{\partial^\sigma}{\partial x^\sigma} (c_i^{(\lambda)} \psi_i) \right\} = 0 \quad (\lambda = 1, 2, \dots, \rho). \quad (16)$$

Queste sono le richieste dipendenze tra le espressioni di Lagrange e le loro derivate per l'invarianza di  $I$  rispetto a  $\mathfrak{G}_{\infty\rho}$ ; l'indipendenza lineare si dimostra come sopra, poichè l'inverso porta indietro alla (12), e poichè possiamo di nuovo risalire alla trasformazione finita da quella infinitesima, come sarà spiegato più esaurientemente nella Sezione 4. Nel caso di un  $\mathfrak{G}_{\infty\rho}$ , vale a dire, anche nelle trasformazioni infinitesime occorrono sempre  $\rho$  trasformazioni arbitrarie. Le equazioni (15) e (16) inoltre implicano  $\text{Div}(B - \Gamma) = 0$ .

Se, come corrisponde a un "gruppo misto",  $\Delta x$  e  $\Delta u$  sono presi lineari nelle  $\epsilon$  e  $p(x)$ , allora vediamo, uguagliando prima le  $p(x)$  e poi le  $\epsilon$  a zero, che entrambe le relazioni di divergenza (13) e le dipendenze (16) valgono.

### § 3. Inverso nel Caso di un Gruppo Finito

Per provare l'inverso, percorreremo essenzialmente i precedenti argomenti in ordine inverso. Dalla (13), moltiplicando per le  $\epsilon$  e sommando, la (12) segue; e quindi, in virtù dell'identità(3)  $\bar{\delta}f + \text{Div}(A - B) = 0$ . Così se poniamo  $\Delta x = \frac{1}{f}(A - B)$ , siamo così arrivati alla (11); da cui infine, per integrazione, segue la (7),  $\Delta I = 0$ , o in altri termini l'invarianza di  $I$  rispetto alla trasformazione infinitesima determinata da  $\Delta x$ ,  $\Delta u$ , dove le  $\Delta u$  in virtù della (9) sono determinate da  $\Delta x$  e  $\bar{\delta}u$ , e  $\Delta x$  e  $\Delta u$  diventa lineare nei parametri. Ma  $\Delta I = 0$  implica, in modo noto, l'invarianza di  $I$  rispetto alle trasformazioni finite generate per integrazione del sistema simultaneo

$$\frac{dx}{dt} = \Delta x_i; \quad \frac{du_i}{dt} = \Delta u_i; \quad (x_i = y, \quad u_i = v_i, \quad \text{per } t = 0). \quad (17)$$

Queste trasformazioni infinite contengono  $\rho$  parametri  $a_1 \dots a_\rho$ , cioè le combinazioni  $t\epsilon_1, \dots, t\epsilon_\rho$ . Dall'assunto che ci sono  $\rho$  e solo  $\rho$  relazioni di divergenze linearmente indipendenti (13), segue inoltre che le trasformazioni finite, una volta che non contengono le derivate  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , formano sempre un gruppo. In caso contrario, almeno per una trasformazione infinitesima generata dal processo di parentesizzazione di Lie fallirebbe dall'essere una combinazione lineare delle altre  $\rho$ ; e poichè  $I$  ammette anche questa trasformazione, ci sarebbero più di  $\rho$  relazioni di divergenza linearmente indipendenti; o altrimenti quella trasformazione infinitesima sarebbe di una forma speciale dove  $\bar{\delta}u = 0$ ,  $\text{Div}(f \cdot \Delta x) = 0$ , ma in quel caso  $\Delta x$  o  $\Delta u$ , contrariamente all'ipotesi, dipenderebbe dalle derivate. Se questo caso può nascere quando derivate occorrono in  $\Delta x$  o  $\Delta u$  deve essere lasciato discutibile; in tal caso,  $\Delta x$  determinato sopra deve essere accresciuta di tutte le funzioni  $\Delta x$  per cui  $\text{Div}(f \cdot \Delta x) = 0$  per ripristinare la proprietà di gruppo, ma come d'accordo i parametri in tal modo aggiunti non sono da contare. Questo completa la prova dell'affermazione inversa.

Da questa inversione, segue inoltre che  $\Delta x$  e  $\Delta u$  possono essere considerate lineari nei parametri. Altrimenti se  $\Delta u$  e  $\Delta x$  fossero di grado superiore in  $\epsilon$ , allora per l'indipendenza lineare dei prodotti di

potenza delle  $\epsilon$ , relazioni piuttosto simili (13) seguirebbero, solo in numero maggiore, dalle quali, per l'inverso, l'invarianza di  $I$  segue rispetto ad un gruppo le cui trasformazioni infinitesime conterrebbero i parametri in modo *lineare*. Se questo gruppo conterrebbe esattamente  $\rho$  parametri, allora delle dipendenze lineari devono sussistere tra le relazioni delle divergenze originariamente ottenute attraverso i termini di grado superiore in  $\epsilon$ .

Aggiungiamo l'osservazione che in caso anche  $\Delta x$  e  $\Delta u$  contenessero derivate delle  $u$ , le trasformazioni finite possono dipendere da infinite derivate delle  $u$ ; dato che in tal caso l'integrazione della (17), nella determinazione di  $\frac{d^2 x_i}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2 u_i}{dt^2}$  porta a  $\Delta \left( \frac{\partial u}{\partial x_\kappa} \right) = \frac{\partial \Delta u}{\partial x_\kappa} - \sum_\lambda \frac{\partial u}{\partial x_\lambda} \frac{\partial \Delta x_\lambda}{\partial x_\kappa}$ , così che il numero delle derivate in generale aumenta a ciascun passo. A mo di esempio, diciamo,

$$f = \frac{1}{2}u'^2; \quad \psi = -u''; \quad \psi \cdot x = \frac{d}{dx}(u - u'x); \quad \bar{\delta}u = x \cdot \epsilon;$$

$$\Delta x = \frac{-2u}{u'^2}\epsilon; \quad \Delta u = \left( x - \frac{2u}{u'} \right) \cdot \epsilon$$

Poichè le espressioni di Lagrange per una divergenza si annullano identicamente, l'inverso mostra, alla fine, ciò che segue: se  $I$  ammette un  $\mathfrak{G}_\rho$ , allora ogni integrale che differisca da  $I$  solo per un integrale di frontiera, i.e., per un integrale su una divergenza, in maniera analoga ammette  $\mathfrak{G}_\rho$  avendo le stesse  $\bar{\delta}u$  le cui trasformazioni infinitesime conterrebbero in generale derivate delle  $u$ . Così per esempio, corrispondentemente all'esempio di cui sopra,  $f^* = \frac{1}{2} \left\{ u'^2 - \frac{d}{dx} \left( \frac{u^2}{x} \right) \right\}$  ammette la trasformazione infinitesima  $\Delta u = x\epsilon$ ,  $\Delta x = 0$ ; mentre le derivate delle  $u$  occorrono nelle trasformazioni infinitesime corrispondenti a  $f$ .

Passando al problema variazionale, i.e., ponendo  $\psi_i = 0$ ,<sup>15</sup> (13) va nell'equazione  $\text{Div } B^{(1)} = 0, \dots, \text{Div } B^{(\rho)} = 0$ , spesso chiamata "legge di conservazione." Nel caso uni-dimensionale, segue da questo che  $B^{(1)} = \text{const.}$ ,  $B^{(\rho)} = \text{const.}$ ; e quì le  $B$  contengono al più  $(2\kappa - 1)$ -sime derivate delle  $u$  (per la (6)), purchè  $\Delta u$  e  $\Delta x$  non contengano derivate superiori alla  $\kappa$ -sima che occorre in  $f$ . Poichè le  $2\kappa$ -sima derivate in generale occorrono in  $\psi$ ,<sup>16</sup> perciò, we abbiamo l'esistenza di  $\rho$  integrali primi. Che possano esserci dipendenze non lineari tra questi è di nuovo mostrato dalla  $f$  di sopra. Alla linearmente indipendente  $\Delta u = \epsilon_1$ ,  $\Delta x = \epsilon_2$  corrisponde relazioni linearmente dipendenti  $u'' = \frac{d}{dx}u'$ ;  $u'' \cdot u' = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (u')^2$ ; dove tra gli integrali primi  $u' = \text{const.}$ ,  $u'^2 = \text{const.}$  esiste una dipendenza non lineare. Questo si collega al caso elementare in cui  $\Delta u$ ,  $\Delta x$  non contengano derivate delle  $u$ .<sup>17</sup>

<sup>15</sup>A  $\psi_i = 0$ , o, più in generale,  $\psi_i = T_i$ , dove  $T_i$  sono nuove funzioni aggiunte, ci si riferisce in fisica come alle "equazioni di campo." Nel caso  $\psi_i = T_i$ , le identità (13) si trasformano nelle equazioni  $\text{Div } B^{(\lambda)} = \sum T_i \delta u_i^{(\lambda)}$ , conosciute in fisica come leggi di conservazione.

<sup>16</sup>Purchè  $f$  sia non lineare nelle derivate  $\kappa$ -sime.

<sup>17</sup>Altrimenti abbiamo anche  $u'^\lambda = \text{const.}$  per ogni  $\lambda$ , corrispondente a

$$u'' \cdot (u')^{\lambda-1} = \frac{1}{\lambda} \frac{d}{dx} (u')^\lambda.$$



## § 4. Inverso nel caso di un Gruppo Infinito

Prima mostriamo che l'assunzione di linearità di  $\Delta x$  e  $\Delta u$  non costituisce alcuna restrizione, conclusione che segue, anche senza l'inverso, dal fatto che  $\mathfrak{G}_{\infty\rho}$  dipende formalmente da  $\rho$  e solamente  $\rho$  funzioni arbitrarie. Risulta infatti che nel caso non lineare, per la composizione delle trasformazioni, laddove i termini di ordine inferiore sono messi insieme, il numero delle funzioni arbitrarie aumenterebbe. Infatti, per dire, sia

$$y = A\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots; p\right) = x + \sum a(x, u, \dots)p^\nu + b(x, u, \dots)p^{\nu-1} \frac{\partial p}{\partial x} + c p^{\nu-2} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \dots + d \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^\nu + \dots \quad (p^\nu = (p^{(1)})^{\nu_1} \dots (p^{(\rho)})^{\nu_\rho});$$

e corrispondentemente  $v = B\left(x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots; p\right)$ ; per composizione con  $z = A\left(y, v, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots; q\right)$ , per i termini di ordine inferiore, otteniamo

$$z = x + \sum a(p^\nu + q^\nu) + b\left\{p^{\nu-1} \frac{\partial p}{\partial x} + q^{\nu-1} \frac{\partial q}{\partial x}\right\} + c\left\{p^{\nu-2} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + q^{\nu-2} \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^2\right\} + \dots$$

Quì, se qualche coefficiente differente da  $a$  e  $b$  è diverso da zero, in altri termini, se un termine  $p^{\nu-\sigma} \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^\sigma + q^{\nu-\sigma} \left(\frac{\partial q}{\partial x}\right)^\sigma$  realmente occorre per  $\sigma > 1$  esso non può essere scritto come quoziente differenziale di una funzione singola o prodotto potenza di una; il numero di funzioni arbitrarie, contrariamente all'ipotesi, è aumentato. Se tutti i coefficienti differenti da  $a$  e  $b$  si annullano, allora, in accordo con i valori degli esponenti  $\nu_1, \dots, \nu_\rho$ , il secondo termine diventerà il quoziente differenziale del primo (come sempre, per esempio, per  $\mathfrak{G}_{\infty 1}$ ), così che non si ha linearità; o anche il numero di funzioni arbitrarie deve di nuovo aumentare. Le trasformazioni infinitesime, allora, a causa della linearità delle  $p(x)$ , soddisfano un sistema lineare di equazioni differenziali parziali; e poichè la proprietà di gruppo è soddisfatta, esse costituiscono un “gruppo infinito di trasformazioni infinitesime” in accordo con la definizione di Lie (Grundlagen, § 10).

Ora all'inverso si giunge in modo simile al caso del gruppo finito. Il fatto che le dipendenze (16) valgono porta, attraverso la moltiplicazione per  $p^{(\lambda)}$  e la somma, in virtù della trasformazione identità (14), a  $\sum \psi_i \bar{\delta} u_i = \text{Div } \Gamma$  e di là, come nella Sezione 3 segue la determinazione di  $\Delta x$  and  $\Delta u$  e l'invarianza di  $I$  rispetto a queste trasformazioni infinitesime, se esse non contengono derivate  $\frac{\partial u}{\partial x}, \dots$ , certamente formano un gruppo, segue, come in Sezione 3, dal fatto che altrimenti, per composizione più funzioni arbitrarie occorrerebbero, mentre per assunzione devono esserci solo  $\rho$  dipendenze (16); quindi esse formano un “gruppo infinito di trasformazioni infinitesime.” Ma tale gruppo consiste (Grundlagen, Theorem VII, p. 391) delle più generali trasformazioni infinitesime di un certo “gruppo infinito  $\mathfrak{G}$  di trasformazioni finite,” nel senso di Lie.

Ciascuna di queste trasformazioni è generata da quelle infinitesime Grundlagen, § 7),<sup>18</sup> e così nasce

<sup>18</sup>Da cui segue in particolare che il gruppo  $\mathfrak{G}$  generato dalle trasformazioni infinitesime  $\Delta x, \Delta u$  di  $\mathfrak{G}_{\infty\rho}$  si riduce a  $\mathfrak{G}_{\infty\rho}$ . Dato che  $\mathfrak{G}_{\infty\rho}$  non contiene trasformazioni infinitesime distinte da  $\Delta x, \Delta u$  dipendenti da funzioni arbitrarie, e non può contenerne nessuna indipendente da loro ma dipendenti da parametri, altrimenti sarebbe un gruppo misto. Ma in accordo con quanto sopra, le trasformazioni infinitesime determinano quelle finite.

dall'integrazione del sistema simultaneo

$$\frac{dx_i}{dt} = \Delta x_i; \quad \frac{du_i}{dt} = \Delta u_i; \quad (x_i = y_i, \quad u_i = v_i, \text{ for } t = 0),$$

dove, tuttavia, potrebbe essere necessario inoltre assumere le arbitrarie  $p(x)$  dipendenti da  $t$ . Così  $\mathfrak{G}$  dipende in realtà da  $\rho$  funzioni arbitrarie; se in particolare fosse sufficiente assumere  $p(x)$  indipendente da  $t$ , allora questa dipendenza diviene analitica nelle funzioni arbitrarie  $q(x) = t \cdot p(x)$ .<sup>19</sup> Se le derivate

$\frac{\partial u}{\partial x}, \dots$ , occorrono, potrebbe essere necessario aggiungere trasformazioni infinitesime  $\bar{\delta}u = 0$ ,  $\text{Div}(f \cdot \Delta x) = 0$  prima di giungere alle stesse conclusioni.

In termini di un esempio di Lie (Grundlagen, § 7), citiamo un caso generale in cui è possibile ricorrere a formule esplicite, che allo stesso tempo mostra che le derivate di funzioni arbitrarie sino al  $\sigma$ -simo ordine occorrono; laddove, in altri termini, l'inverso è completo. Mi riferisco a tali gruppi di trasformazioni infinitesime delle  $u$  come “indotte”; i.e., tali trasformazioni delle  $u$  per cui  $\Delta u$ , e di conseguenza  $u$ , dipendono solo da funzioni arbitrarie che occorrono in  $\Delta x$ ; assumo inoltre che le derivate

$\frac{\partial u}{\partial x}, \dots$  non occorrono in  $\Delta u$ . Abbiamo cioè

$$\Delta x_i = p^{(i)}(x); \quad \Delta u_i = \sum_{\lambda=1}^n \left\{ a^{(\lambda)}(x, u) p^{(\lambda)} + b^{(\lambda)} \frac{\partial p^{(\lambda)}}{\partial x} + \dots + c^{(\lambda)} \frac{\partial^\sigma p^{(\lambda)}}{\partial x^\sigma} \right\}.$$

Poichè la trasformazione infinitesima  $\Delta x = p(x)$  genera ogni trasformazione  $\Delta x = y + g(y)$  con  $g(y)$  arbitrarie, possiamo in particolare determinare  $p(x)$  dipendente da  $t$  in modo tale da generare il gruppo a membro singolo

$$x_i = y_i + t \cdot g_i(y), \tag{18}$$

che diventa l'identità per  $t = 0$  e la richiesta  $x = y + g(y)$  per  $t = 1$ . Dalla differenziazione della (18), segue che

$$\frac{dx_i}{dt} = g_i(y) = p^{(i)}(x, t), \tag{19}$$

dove  $p(x, t)$  è determinata da  $g(y)$  per inversione della (18); e inversamente, la (18) è generata dalla (19) in virtù della condizione ausiliaria  $x_i = y_i$  per  $t = 0$ , dalla quale l'integrale è univocamente determinato. Per mezzo della (18), le  $x$  possono essere sostituite in  $\Delta u$  dalle “costanti di integrazione”  $y$  e da  $t$ ; le  $g(y)$  entrano fino alla  $\sigma$ -esima derivata, le  $\frac{\partial y}{\partial x}$  essendo espresse in termini di  $\frac{\partial x}{\partial y}$  in  $\frac{\partial p}{\partial x} = \sum \frac{\partial g}{\partial y_\kappa} \frac{\partial y_\kappa}{\partial x}$ , e  $\frac{\partial^\sigma p}{\partial x^\sigma}$  essendo in generale sostituite dal loro valore in  $\frac{\partial g}{\partial y}, \dots, \frac{\partial x}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^\sigma x}{\partial y^\sigma}$ . Per la determinazione delle  $u$  otteniamo così il sistema di equazioni

$$\frac{du_i}{dt} = F_i \left( g(y), \frac{\partial g}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^\sigma g}{\partial y^\sigma}, u, t \right) \quad (u_i = v_i \text{ for } t = 0)$$

<sup>19</sup>La questione se forse questo ultimo caso si verifica sempre è stata sollevata in una formulazione differente da Lie (Grundlagen, § 7 e § 13 alla fine).

in cui solo  $t$  e  $u$  sono variabili, mentre le  $g(y)$ , ... sono pertinenti al campo dei coefficienti, così che l'integrazione fornisce

$$u_i = v_i + B_i \left( v, g(y), \frac{\partial g}{\partial y}, \dots, \frac{\partial^\sigma g}{\partial y^\sigma}, t \right)_{t=1},$$

o trasformazioni dipendenti da esattamente  $\sigma$  derivate delle funzioni arbitrarie. L'identità contenuta in questa, per la (18), dato che  $g(y) = 0$ ; e la proprietà di gruppo segue dal fatto che il metodo specificato produce ciascuna trasformazione  $x = y + g(y)$ , per cui la trasformazione indotta delle  $u$  è unicamente determinata, e il gruppo  $\mathfrak{G}$  esaurito.

Dall'inverso segue, tra parentesi, che non costituisce alcuna restrizione assumere che le funzioni arbitrarie siano dipendenti solo da  $x$  e non dalle  $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , .... Pochè nell'ultimo caso, la trasformazione identità(14), e quindi anche la (15) includerebbe non solo le  $p^{(\lambda)}$  ma anche  $\frac{\partial p^{(\lambda)}}{\partial u}$ ,  $\frac{\partial p^{(\lambda)}}{\partial \frac{\partial u}{\partial x}}$ . Ora se assumiamo le  $p^{(\lambda)}$  successivamente di zero, primo, ... grado in  $u$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}$ , ..., con funzioni arbitrarie delle  $x$  come coefficienti, allora otteniamo di nuovo le dipendenze (16), solo in numero maggiore; le quali, tuttavia, in accordo con l'inverso di cui sopra, attraverso la congiunzione con funzioni arbitrarie dipendenti da  $x$  solamente, si riducono al caso precedente. Nello stesso modo si dimostra che i gruppi misti corrispondono alla simultanea occorrenza delle relazioni di dipendenza e divergenze indipendenti tra loro. <sup>20</sup>

---

<sup>20</sup>Come in Sezione 3, segue di nuovo dall'inverso che a parte  $I$ , ciascun integrale  $I^*$  diverso da esso per un integrale su una divergenza analogamente ammette un gruppo infinito, con le stesse  $\bar{\delta}u$ , sebbene  $\Delta x$  e  $\Delta u$  coinvolgeranno in generale derivate delle  $u$ . Tale integrale  $I^*$  fu introdotto da Einstein nella teoria generale della relatività per ottenere una versione più semplice delle leggi di conservazione dell'energia;  $I$  specifica le trasformazioni infinitesime che  $I^*$  ammette, aderendo precisamente alla nomenclatura della seconda nota di Klein. L'integrale  $I = \int \dots \int K d\omega = \int \dots \int \mathfrak{K} dS$  ammette il gruppo di tutte le trasformazioni delle  $\omega$  e quelle indotte dalle  $g_{\mu\nu}$ ; a ciò corrispondono le dipendenze (Klein's (30))

$$\sum \mathfrak{K}_{\mu\nu} g_\tau^{\mu\nu} + 2 \sum \frac{\partial g^{\mu\nu} \mathfrak{K}_{\mu\tau}}{\partial \omega^\sigma} = 0.$$

Ora  $I^* = \int \dots \int \mathfrak{K}^* dS$ , dove  $\mathfrak{K}^* = \mathfrak{K} + \text{Div}$ , e di conseguenza  $\mathfrak{K}_{\mu\nu}^* = \mathfrak{K}_{\mu\nu}$ , dove  $\mathfrak{K}_{\mu\nu}^*$ ,  $\mathfrak{K}_{\mu\nu}$  sta in ciascuna istanza per le espressioni di Lagrange. Le dipendenze specificate sono perciò tali anche per  $\mathfrak{K}_{\mu\nu}^*$ ; e dopo la moltiplicazione per  $p^\tau$  e la somma, otteniamo, applicando le trasformazioni di differenziazione del prodotto in ordine inverso,

$$\begin{aligned} \sum \mathfrak{K}_{\mu\nu} p^{\mu\nu} + 2 \text{Div} \left( \sum g^{\mu\sigma} \mathfrak{K}_{\mu\tau} p^\tau \right) &= 0; \\ \delta \mathfrak{K}^* + \text{Div} \left( \sum 2g^{\mu\sigma} \mathfrak{K}_{\mu\tau} p^\tau - \frac{\partial \mathfrak{K}^*}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}} p^{\mu\nu} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Confrontando questo con l'equazione differenziale di Lie

$$\delta \mathfrak{K}^* + \text{Div}(\mathfrak{K}^* \Delta \omega) = 0,$$

$$\Delta \omega^\sigma = \frac{1}{\mathfrak{K}^*} \cdot \left( \sum 2g^{\mu\sigma} \mathfrak{K}_{\mu\tau} p^\tau - \frac{\partial \mathfrak{K}^*}{\partial g_\sigma^{\mu\nu}} p^{\mu\nu} \right); \quad \Delta g^{\mu\nu} = p^{\mu\nu} + \sum g_\sigma^{\mu\nu} \Delta \omega^\sigma$$

seguono come le trasformazioni infinitesime che  $I^*$  ammette. Queste trasformazioni infinitesime, dipendono allora dalla derivata prima e seconda di  $g^{\mu\nu}$ , e contengono le arbitrarie  $p$  così come le derivate prime.

## § 5. Invarianza dei Diversi Costituenti delle Relazioni

Se specializziamo il gruppo  $\mathfrak{G}$  al più semplice caso di solito considerato permettendo nessuna derivata delle  $u$  nelle trasformazioni, e in modo tale che le variabili indipendenti trasformate dipendano solo dalle  $x$  e non dalle  $u$ , possiamo dedurre l'invarianza di diversi costituenti nelle formule. Per iniziare, da argomenti noti, otteniamo l'invarianza di  $\int \dots \int (\sum \psi \delta u_i) dx$ ; la relativa invarianza, vale a dire di  $\sum \psi_i \delta u_i$ ,<sup>21</sup> intendendo con  $\delta$  ogni variazione. Visto che abbiamo in primo luogo

$$\delta I = \int \dots \int \delta f \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right) dx = \int \dots \int \delta f \left( y, v, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right) dy,$$

e in secondo luogo, per  $\delta u, \delta \frac{\partial u}{\partial x}, \dots$  che si annullano sulla frontiera,  $\delta v, \delta \frac{\partial v}{\partial y}, \dots$  anche si annullano sulla frontiera a causa della trasformazione omogenea di  $\delta u, \delta \frac{\partial u}{\partial x}, \dots$ ,

$$\begin{aligned} \int \dots \int \delta f \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right) dx &= \int \dots \int \left( \sum \psi_i(u, \dots) \delta u_i \right) dx; \\ \int \dots \int \delta f \left( y, v, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right) dy &= \int \dots \int \left( \sum \psi_i(v, \dots) \delta v_i \right) dy, \end{aligned}$$

e di conseguenza, per  $\delta u, \delta \frac{\partial u}{\partial x}, \dots$  che si annullano sulla frontiera,

$$\begin{aligned} \int \dots \int \left( \sum \psi_i(u, \dots) \delta u_i \right) dx &= \int \dots \int \left( \sum \psi_i(v, \dots) \delta v_i \right) dy \\ &= \int \dots \int \left( \sum \psi_i(v, \dots) \delta v_i \right) \left| \frac{\partial y_i}{\partial x_\kappa} \right| dx. \end{aligned}$$

Se nel terzo integrale  $y, v, \delta v$  sono espresse in termini di  $x, u, \delta u$ , e il terzo è uguagliato al primo, abbiamo così

$$\int \dots \int \left( \sum \chi_i(u, \dots) \delta u_i \right) dx = 0$$

per  $\delta u$  che si annulla al contorno ma altrimenti arbitrario, e da ciò segue, familiarmente, l'annullarsi dell'integrando per qualsiasi  $\delta u$ ; la relazione

$$\sum \psi_i(u, \dots) \delta u_i = \left| \frac{\partial y_i}{\partial x_\kappa} \right| \left( \sum \psi_i(v, \dots) \delta v_i \right),$$

---

<sup>21</sup> cioè,  $\sum \psi_i \delta u_i$  acquista un fattore nella trasformazione, e questo viene di solito caratterizzato con il termine di invarianza relativa nella teoria algebrica dell'invarianza.

identica in  $\delta u$ , perciò vale, asserendo l'invarianza relativa di  $\sum \psi_i \delta u_i$  e di conseguenza l'invarianza di  $\int \dots \int (\sum \psi_i \delta u_i) dx$ .<sup>22</sup>

Per applicare ciò alle relazioni di divergenza e alle dipendenze derivate, dobbiamo prima dimostrare che le  $\bar{\delta}u$  derivate da  $\Delta u$ ,  $\Delta x$  soddisfano infatti le leggi di trasformazione per la variazione  $\delta u$ , purchè i parametri, o le funzioni arbitrarie, in  $\bar{\delta}v$  siano determinate in modo tale da corrispondere al gruppo simile di trasformazioni infinitesime in  $y$ ,  $v$ ; se  $\mathfrak{T}_q$  designa la trasformazione che porta  $x$ ,  $u$  in  $y$ ,  $v$ , e  $\mathfrak{T}_p$  con l'infinitesima in  $x$ ,  $u$ , allora quella simile in  $y$ ,  $v$  è data da  $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_q \mathfrak{T}_p \mathfrak{T}_q^{-1}$ , dove i parametri, o le funzioni arbitrarie  $r$ , sono così determinate da  $p$  e  $q$ . In formule, questo è espresso come segue:

$$\mathfrak{T}_p : \xi = x + \Delta x(x, p); \quad u^* = u + \Delta u(x, u, p);$$

$$\mathfrak{T}_q : y = A(x, q); \quad v = B(x, u, q);$$

$$\mathfrak{T}_q \mathfrak{T}_p : \eta = A(x + \Delta x(x, p), q); \quad v^* = B(x + \Delta x(p), u + \Delta u(p), q).$$

Ma questo genera  $\mathfrak{T}_r = \mathfrak{T}_q \mathfrak{T}_p \mathfrak{T}_q^{-1}$ , or

$$\eta = y + \Delta y(r); \quad v^* = v + \Delta v(r),$$

se dall'inversa  $\mathfrak{T}_q$  consideriamo le  $x$  come funzioni delle  $y$  e consideriamo solo i termini infinitesimi; abbiamo così l'identità

$$\begin{aligned} \eta &= y + \Delta y(r) = y + \sum \frac{\partial A(x, q)}{\partial x} \Delta x(p); \\ v^* &= v + \Delta v(r) = v + \sum \frac{\partial B(x, u, q)}{\partial x} \Delta x(p) + \sum \frac{\partial B(x, u, q)}{\partial u} \Delta u(p). \end{aligned} \quad (20)$$

Sostituendo  $\xi = x + \Delta x$  con  $\xi - \Delta \xi$  in questa così che  $\xi$  torna in  $x$ , e  $\Delta x$  si annulla, per la prima equazione (20) anche si ritorna a  $y = \eta - \Delta \eta$ ; se con questa sostituzione  $\Delta u(p)$  va in  $\bar{\delta}u(p)$ , allora  $\Delta v(r)$  andrà in  $\bar{\delta}v(r)$ , e la seconda formula (20) dà

$$\begin{aligned} v + \bar{\delta}v(y, v, \dots r) &= v + \sum \frac{\partial B(x, u, q)}{\partial u} \bar{\delta}u(p), \\ \bar{\delta}v(y, v, \dots r) &= \sum \frac{\partial B}{\partial u_\kappa} \bar{\delta}u_\kappa(x, u, p), \end{aligned}$$

---

<sup>22</sup>Queste conclusioni falliscono se  $y$  dipende anche dalle  $u$ , poichè in tal caso  $\delta f \left( y, v, \frac{\partial v}{\partial y}, \dots \right)$  contiene anche termini  $\sum \frac{\partial f}{\partial y} \delta y$ , così che la trasformazione di divergenza non porta alle espressioni di Lagrange; e similmente se le derivate delle  $u$  sono ammesse; poichè in tal caso le  $\delta v$ 's diventano combinazioni lineari di  $\delta u$ ,  $\delta \frac{\partial u}{\partial x}$ ,  $\dots$ , e così porta solo dopo un'altra trasformazione di divergenza ad una identità  $\int \dots \int (\sum \chi_i(u, \dots) \delta u) dx = 0$ , così che di nuovo le espressioni di Lagrange non compaiono sulla destra.

La questione se sia possibile risalire dall'invarianza di  $\int \dots \int (\sum \psi_i \delta u_i) dx$  alla sussistenza delle relazioni di divergenza è sinonima, in accordo con l'inverso, della questione se sia possibile dedurre l'invarianza di  $I$  rispetto ad un gruppo che porta non necessariamente alle stesse  $\Delta u$ ,  $\Delta x$ , alle stesse  $\bar{\delta}u$ . Nel caso speciale di un singolo integrale e di sole derivate prime in  $f$ , è possibile per il gruppo finito dedurre dall'invarianza delle espressioni di Lagrange l'esistenza di integrali primi (cfr. e.g., Engel, Gött. Nachr. 1916, p. 270).

così che le formule di trasformazione per le variazioni sono in realtà soddisfatte purchè si assume  $\bar{\delta}v$  dipendente solo dai parametri o dalle funzioni arbitrarie  $r$ .<sup>23</sup>

Così in particolare, la relativa invarianza di  $\sum \psi_i \bar{\delta}u_i$  segue: da cui anche, per la (12), poichè le divergenze sono soddisfatte anche in  $y, v$ , l'invarianza relativa di  $\text{Div } B$ ; e inoltre, dalle (14) e (13), l'invarianza relativa di  $\text{Div } \Gamma$  e del lato sinistro delle dipendenze in congiunzione con le  $p^{(\lambda)}$ , dove le arbitrarie  $p(x)$  (o i parametri) sono sostituite dalle  $r$  ovunque nelle formule trasformate. Questo porta alla invarianza relativa di  $\text{Div}(B - \Gamma)$ , o di una divergenza di un non identicamente nullo sistema di funzioni  $B - \Gamma$  la cui divergenza si annulla identicamente.

Dalla invarianza relativa di  $\text{Div } B$ , possiamo dedurre l'invarianza dell'integrale primo nel caso unidimensionale e per un gruppo finito. La trasformazione parametrica corrispondente alla trasformazione infinitesima diventa, per la (20), lineare e omogenea, e, per l'invertibilità di tutte le trasformazioni, anche le  $\epsilon$  saranno lineari e omogenee nei parametri trasformati  $\epsilon^*$ . Questa invertibilità certamente preservata se poniamo  $\psi = 0$ , poichè non entrano nella (20) derivate delle  $u$ . Uguagliando i coefficienti delle  $\epsilon^*$  in

$$\text{Div } B(x, u, \dots \epsilon) = \frac{dy}{dx} \cdot \text{Div } B(y, v, \dots \epsilon^*)$$

le  $\frac{d}{dy} B^{(\lambda)}(y, v, \dots)$  perciò diventano funzioni lineari omogenee di  $\frac{d}{dx} B^{(\lambda)}(x, u, \dots)$  e  $\frac{d}{dx} B^{(\lambda)}(x, u, \dots) = 0$  o  $B^{(\lambda)}(x, u) = \text{const.}$  debitamente implicano  $\frac{d}{dy} B^{(\lambda)}(y, v, \dots) = 0$  o anche  $B^{(\lambda)}(y, v) = \text{const.}$ . Così i  $\rho$  integrali primi corrispondenti a  $\mathfrak{G}_\rho$  in ciascuna istanza ammette il gruppo, con il risultato che l'ulteriore integrazione è semplificata. L'esempio più semplice di ciò si ha quando  $f$  è indipendente da  $x$  o da una  $u$ , che corrisponde alla trasformazione infinitesima  $\Delta x = \epsilon$ ,  $\Delta u = 0$ , or  $\Delta x = 0$ ,  $\Delta u = \epsilon$ . Avremo  $\bar{\delta}u = -\epsilon \frac{du}{dx}$  o  $\epsilon$  rispettivamente, e poichè  $B$  deriva da  $f$  e  $\bar{\delta}u$  per differenziazione e combinazione razionale, è indipendente da  $x$  o  $u$  rispettivamente, e ammette il gruppo corrispondente.<sup>24</sup>

## § 6. Una Affermazione Hilbertiana

Da ciò che precede, infine, otteniamo anche la prova di una affermazione di Hilbert circa il collegamento tra il fallimento delle leggi di conservazione dell'energia proprio della "relatività generale" (Klein's first Note, Göttinger Nachr. 1917, Reply 1st paragraph), e quello della teoria generalizzata dei gruppi.

Sia  $I$  un integrale che ammette  $\mathfrak{G}_{\infty\rho}$ , e sia  $\mathfrak{G}_\rho$  un qualsiasi gruppo finito generato specializzando le funzioni arbitrarie, e dunque un sottogruppo di  $\mathfrak{G}_{\infty\rho}$ . Allora al gruppo infinito  $\mathfrak{G}_{\infty\rho}$  corrisponde le

<sup>23</sup>Risulta ancora che  $y$  deve essere presa indipendente da  $u$  perchè le conclusioni valgano. Come esempio, si consideri  $\delta g^{\mu\nu}$  e  $\delta q_\rho$  date da Klein, che soddisfano le trasformazioni per le variazioni purchè le  $p$  siano soggette ad una trasformazione vettoriale.

<sup>24</sup>Nei casi dove la semplice invarianza di  $\int (\sum \psi_i \delta u_i) dx$  implichi l'esistenza di integrali primi, questi non ammettono l'intero gruppo  $\mathfrak{G}_\rho$ ; per esempio,  $\int (u'' \delta u) dx$  ammette la trasformazione infinitesima  $\Delta x = \epsilon_2$ ,  $\Delta u = \epsilon_1 + x \epsilon_3$ ; mentre l'integrale primo  $u - u'x = \text{const.}$ , corrispondente a  $\Delta x = 0$ ,  $\Delta u = x \epsilon_3$ , non ammette le altre due trasformazioni, poichè esso contiene esplicitamente sia  $u$  che  $x$ . A questo integrale, corrispondono le trasformazioni infinitesime per  $f$  che contengono derivate. Così vediamo che l'invarianza  $\int \dots \int (\sum \psi_i \delta u_i) dx$  è in tutti i modi una condizione più debole dell'invarianza di  $I$ , e questo dovrebbe essere collegata alla questione sollevata nella precedente nota.

dipendenze (16), e a quello finito  $\mathfrak{G}_\sigma$ , le relazioni di divergenza (13); e inversamente dalla sussistenza di una qualsiasi relazione di divergenza, segue l'invarianza di  $I$ , rispetto a qualche gruppo finito che sarà identico con  $\mathfrak{G}_\sigma$  se e solo se le  $\bar{\delta}u$  sono combinazioni lineari di quelle ottenute da  $\mathfrak{G}_\sigma$ . Così l'invarianza rispetto a  $\mathfrak{G}_\sigma$  non può portare ad alcuna relazione di divergenza diversa dalla (13). Ma poichè la sussistenza della (16) implica l'invarianza di  $I$  rispetto alle trasformazioni infinitesime,  $\Delta u, \Delta x$  di  $\mathfrak{G}_{\infty\rho}$  per ogni  $p(x)$ , ciò implica in particolare niente di meno dell'invarianza rispetto alle trasformazioni infinitesime di  $\mathfrak{G}_\sigma$  da lì derivate per specializzazione e conseguentemente rispetto a  $\mathfrak{G}_\sigma$ . Così le relazioni di divergenza  $\sum \psi_i \bar{\delta}u_i^{(\lambda)} = \text{Div } B^{(\lambda)}$  devono essere conseguenza delle dipendenze (16), che in ultimo possono alternativamente essere scritte  $\sum \psi_i a_i^{(\lambda)} = \text{Div } \chi^{(\lambda)}$  dove le  $\chi^{(\lambda)}$  sono combinazioni lineari delle espressioni di Lagrange e le loro derivate. Poichè le  $\psi$  occorrono linearmente in entrambe le (13) e (16), le relazioni di divergenza devono essere combinazioni *lineari* delle (16); Di conseguenza,  $\text{Div } B^{(\lambda)} = \text{Div} \left( \sum \alpha \cdot \chi^{(\kappa)} \right)$ ; e le  $B^{(\lambda)}$  stesse sono composte linearmente dalle  $\chi$ , i.e., le espressioni di Lagrange e le loro derivate, e da funzioni la cui divergenza si annulla identicamente, diciamo come le  $B - \Gamma$  incontrate alla fine della Sezione 2, per le quali  $\text{Div}(B - \Gamma) = 0$ , e dove la divergenza ha allo stesso tempo la proprietà invariante. Mi riferirò alle relazioni di divergenze in cui le  $B^{(\lambda)}$  possono essere composte dalle espressioni di Lagrange e le loro derivate nella maniera specificate come a “improprie,” e a tutte le altre come alle “proprie.”

Se inversamente le relazioni di divergenza sono combinazioni lineari delle dipendenze (16), e dunque “improprie”, l'invarianza rispetto a  $\mathfrak{G}_\sigma$  segue da quella rispetto a  $\mathfrak{G}_{\infty\rho}$ ;  $\mathfrak{G}_\sigma$  diventa un sottogruppo di  $\mathfrak{G}_{\infty\rho}$ . Le relazioni di divergenza corrispondenti ad un gruppo infinito  $\mathfrak{G}_\sigma$  saranno così improprie se e solo se  $\mathfrak{G}_\sigma$  è un sottogruppo di un gruppo infinito invariante rispetto a  $I$ .

Specializzando i gruppi, questo fornisce l'affermazione originale di Hilbert. Sia “il gruppo degli spostamenti” inteso come il finito

$$y_i = x_i + \epsilon_i; \quad v_i(y) = u_i(x);$$

cioè

$$\Delta x_i = \epsilon_i, \quad \Delta u_i = 0, \quad \bar{\delta}u_i = - \sum_{\lambda} \frac{\partial u_i}{\partial x_{\lambda}} \epsilon_{\lambda}.$$

L'invarianza rispetto al gruppo degli spostamenti asserisce, come sappiamo, che in

$$I = \int \dots \int f \left( x, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \dots \right) dx, \text{ le } x \text{ non compaiono esplicitamente in } f.$$

Alle  $n$  relazioni di divergenza associate

$$\sum \psi_i \frac{\partial u_i}{\partial x_{\lambda}} = \text{Div } B^{(\lambda)} \quad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

ci si riferirà come alle “relazioni per l'energia”, poichè le “leggi di conservazioni”  $\text{Div } B^{(\lambda)} = 0$  corrispondenti al problema variazionale rispondono alle “leggi di conservazioni dell'energia” e le  $B^{(\lambda)}$  alle “componenti energetiche.” Così abbiamo: Se  $I$  ammette il gruppo degli spostamenti, allora le relazioni energetiche diventano improprie se e soltanto se  $I$  è invariante rispetto a un gruppo infinito contenente il gruppo degli spostamenti come sottogruppo. <sup>25</sup>

<sup>25</sup> Le leggi di conservazione dell'energia della meccanica classica così come quelle della vecchia “teoria della relatività” (dove  $\sum dx^2$  va in se stesso) sono “proprie”, poichè non compare un gruppo infinito.

Un esempio di tali gruppi infiniti è fornito dal gruppo di *tutte* le trasformazioni delle  $x$  e delle trasformazioni indotte delle  $u(x)$  in cui solo *derivate* delle funzioni arbitrarie  $p(x)$  occorrono; il gruppo degli spostamenti è generato dalla specializzazione  $p^{(i)}(x) = \epsilon_i$ ; ma rimane indecidibile se questo — e i gruppi generati dal cambiamento di  $I$  da un integrale sulla frontiera — è sufficiente a fornire il più generale di questi gruppi. Trasformazioni indotte del tipo specificato sorgono, diciamo, quando le  $u$  sono soggette a trasformazioni dei coefficienti di una “forma differenziale totale” i.e., una forma  $\sum a d^\lambda x_i + \sum b d^{\lambda-1} x_i dx_\kappa + \dots$  contenente differenziali di ordine superiore a parte i  $dx$ ; trasformazioni indotte più speciali, in cui le  $p(x)$  occorrono con solo le derivate prime, sono fornite dalle trasformazioni dei coefficienti delle forme differenziali ordinarie  $\sum c dx_{i_1} \dots dx_{i_\lambda}$ , e solo queste sono di norma considerate.

Un altro gruppo del tipo specificato — uno che, a causa della presenza del termine logaritmico, non può essere del tipo trasformazione di coefficienti — e, diciamo il seguente:

$$\begin{aligned} y &= x + p(x); & v_i &= u_i + \ln(1 + p'(x)) = u_i + \ln \frac{dy}{dx}; \\ \Delta x &= p(x); & \Delta u_i &= p'(x); & \bar{\delta} u_i &= p'(x) - u'_i p(x).^{26} \end{aligned}$$

Le (16) qui diventano

$$\sum_i \left( \psi_i u'_i + \frac{d\psi_i}{dx} \right) = 0,$$

e le relazioni energetiche improprie

$$\sum \left( \psi_i u'_i + \frac{d(\psi_i + \text{const.})}{dx} \right) = 0.$$

Un semplice integrale invariante del gruppo è

$$I = \int \frac{e^{-2u_1}}{u'_1 - u'_2} dx.$$

Il più generale degli  $I$  è determinato dall'integrazione dell'equazione differenziale di Lie

$$\bar{\delta} f + \frac{d}{dx} (f \cdot \Delta x) = 0,$$

che per sostituzione dei loro valori per  $\Delta x$  e  $\bar{\delta} u$ , purchè  $f$  dipenda solo dalle derivate delle  $u$ , diventa

$$\frac{\partial f}{\partial x} p(x) + \left\{ \sum \frac{\partial f}{\partial u_i} - \frac{\partial f}{\partial u'_i} u'_i + f \right\} p'(x) + \left\{ \sum \frac{\partial f}{\partial u''_i} \right\} p''(x) = 0$$

(identicamente in  $p(x)$ ,  $p'(x)$ ,  $p''(x)$ ). Questo sistema di equazioni ha soluzioni per almeno due funzioni  $u(x)$  contenenti le derivate, cioè

$$f = (u'_1 - u'_2) \Phi \left( u_1 - u_2, \frac{e^{-u_1}}{u'_1 - u'_2} \right),$$

dove  $\Phi$  sta per una funzione arbitraria degli argomenti specificati.

<sup>26</sup>Da queste trasformazioni infinitesime, quelle finite sono calcolate a ritroso con il metodo descritto alla fine della Sezione 4.



Hilbert pronuncia la sua affermazione per effetto del fallimento delle leggi proprie di conservazione dell'energia caratteristico della “teoria generale della relatività.” Affinchè questa affermazione valga in senso letterale, perciò, il termine “relatività generale” dovrebbe essere preso in senso più ampio del solito, e esteso anche a gruppi dipendenti da  $n$  funzioni arbitrarie.<sup>27</sup>

---

<sup>27</sup>Questo conferma di nuovo la correttezza di un commento di Klein riguardo al fatto che il termine “relatività” di uso corrente in fisica è sostituibile con “invarianza relativa a un gruppo.” (“Über die geometrischen Grundlagen der Lorentzgruppe,” *Jhrber. d. Deutsch. Math. Vereinig.* **19** (1910), p. 287, reprinted in the *Phys. Zeitschrift*.)