

Teoria Quantistica dell'Elettrone

P. A. M DIRAC, St. John's College, Cambridge.

Comunicato da R. H. Fowler, F.R.S.

Ricevuto il 2 Gennaio 1928

Traduzione italiana di:⁰

Dirac P.A.M., *The Quantum Theory of the Electron*,
Proc. Roy. Soc. (London),
A117, 610-624 (1928)

Sommario

La nuova meccanica quantistica, quando applicata al problema della struttura atomica con elettroni carichi puntiformi, non dà risultati in accordo con gli esperimenti. Le discrepanze consistono nel fenomeno di *duplicità*, il numero di stati stazionari osservati per un elettrone in un atomo è il doppio del numero dato dalla teoria. Per affrontare tale difficoltà, Goudsmith e Uhlenbeck hanno introdotto l'idea di un elettrone con momento angolare di spin, di metà quantum e un momento magnetico di un magnetone di Bohr. Questo modello per l'elettrone è stato adattato nella nuova meccanica da Pauli,^{*} e Darwin,[†] lavorando con una teoria equivalente, ha mostrato che essa fornisce risultati in accordo con gli esperimenti per gli spettri idrogenoidi sino al primo ordine di accuratezza.

Rimane il problema del perché la Natura abbia scelto questo particolare modello dell'elettrone invece di ritenersi soddisfatta della carica puntiforme. Ci piacerebbe trovare qualche incompletezza nei metodi precedenti di applicazione della meccanica quantistica all'elettrone puntiforme tale che, quando rimossa, l'intero fenomeno della duplicità segue senza assunzioni arbitrarie. Nel presente articolo viene mostrato che questo è il caso, l'incompletezza delle teorie precedenti giace nel loro disaccordo con la relatività, o, alternativamente, con la teoria generale delle trasformazioni della meccanica quantistica. Sembra che la più semplice Hamiltoniana per un elettrone carico puntiforme che soddisfi i requisiti sia della relatività che della teoria generale delle trasformazioni porta ad una spiegazione di tutti i fenomeni di duplicità senza ulteriori assunzioni. Tuttavia c'è una gran quantità di verità nel modello dell'elettrone con spin, almeno in prima approssimazione. La più grande fallacia del modello sembra essere che la grandezza del risultante momento angolare orbitale di un elettrone che si muove su un'orbita in un campo centrale di forze non è costante, come il modello porta ad aspettarsi.

⁰Traduzione italiana di G. Voto (giovanni.voto@yahoo.com)

^{*}Pauli, 'Z. f. Physik,' vol. **43**, p.601 (1927).

[†]Darwin, 'Roy. Soc. Proc.,' A, vol. **116**, p.227 (1927).

§ 1. Trattamenti Relativistici Precedenti

L'Hamiltoniana relativistica in accordo con la teoria classica per un elettrone puntiforme che si muove in un arbitrario campo elettro-magnetico con potenziale scalare A_0 e potenziale vettore \mathbf{A} è

$$F \equiv \left(\frac{W}{c} + \frac{e}{c} A_0 \right)^2 + \left(\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + m^2 c^2,$$

dove \mathbf{p} è il momento. E' stato suggerito da Gordon¹ che l'operatore dell'equazione d'onda della teoria quantistica dovrebbe essere ricavato da questa F con la stessa procedura della teoria non relativistica, cioè ponendo

$$\begin{aligned} W &= i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \\ p_r &= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_r}, \quad r = 1, 2, 3, \end{aligned}$$

in essa. Questo dà l'equazione d'onda

$$F\psi \equiv \left[\left(i\hbar \frac{\partial}{c\partial t} + \frac{e}{c} A_0 \right)^2 + \sum_r \left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_r} + \frac{e}{c} A_r \right)^2 + m^2 c^2 \right] \psi = 0, \quad (1)$$

dove ψ è funzione di x_1, x_2, x_3, t . Ciò dà origine a due difficoltà.

La prima è in connessione con l'interpretazione fisica di Ψ . Gordon, e indipendentemente anche Klein,² da considerazioni di teoremi di conservazione, assumono che se ψ_m, ψ_n sono due soluzioni

$$\rho_{mn} = -\frac{e}{2mc^2} \left\{ i\hbar \left(\bar{\psi}_m \frac{\partial \psi_n}{\partial t} - \bar{\psi}_n \frac{\partial \psi_m}{\partial t} \right) + 2eA_0 \psi_m \psi_n \right\}$$

e

$$I_{mn} = -\frac{e}{2m} \left\{ -i\hbar (\psi_m \text{grad } \bar{\psi}_n - \bar{\psi}_n \text{grad } \psi_m) + 2 \frac{e}{c} \mathbf{A}_m \psi_m \bar{\psi}_n \right\}$$

sono da considerarsi come la carica e la corrente associate con la transizione $m \rightarrow n$. Ciò sembra soddisfacente fintanto che si consideri emissione e assorbimento di radiazione, ma tale interpretazione non è così generale come l'interpretazione della meccanica quantistica non relativistica, che è stata sviluppata sufficientemente³ da consentire di rispondere alla domanda: Qual'è la probabilità che una qualsiasi variabile dinamica ad un particolare istante abbia un valore tra qualsiasi limiti specificati, quando il sistema è rappresentato da una data funzione d'onda ψ_n ? L'interpretazione di Gordon-Klein può rispondere tale questione se essi si riferiscono alla posizione dell'elettrone (con l'uso di ρ_{mn}), ma non se si riferiscono al momento, o momento angolare o qualsiasi altra variabile dinamica. Dovremmo aspettarci che l'interpretazione della teoria relativistica debba essere così generale come quella della teoria non relativistica.

L'interpretazione generale della meccanica quantistica non relativistica è fondata sulla teoria delle trasformazioni, ed è resa possibile dall'equazione d'onda della forma

¹Gordon, 'Z. f. Physik,' vol. **40**, p. 117 (1926)

²Klein, 'Z. f. Physik,' vol. **41**, p. 407 (1927).

³Jordan, 'Z. f. Physik,' vol. **40**, p. 809 (1927); Dirac, 'Roy. Soc. Proc.,' A, vol **113**, p. 621 (1927).

$$(H - W) \psi = 0, \quad (2)$$

i.e., lineare in W o $\partial/\partial t$, così che la funzione d'onda a ogni istante determina la funzione d'onda a tempi successivi. L'equazione d'onda della teoria relativistica deve anch'essa essere lineare in W perché l'interpretazione generale sia possibile.

La seconda difficoltà nell'interpretazione di Gordon sorge dal fatto che se uno prende l'immaginaria coniugata dell'equazione (1), si ottiene

$$\left[\left(-\frac{W}{c} + \frac{e}{c} A_0 \right)^2 + \left(-\mathbf{p} + \frac{e}{c} \mathbf{A} \right)^2 + m^2 c^2 \right] \psi = 0,$$

che è la stessa che si ottiene ponendo $-e$ al posto di e . Cioè l'equazione d'onda (1) si applica sia ad un elettrone con carica e che ad uno con carica $-e$. Se si considera il caso limite di grandi numeri quantici si troverebbe che alcune delle soluzioni dell'equazione d'onda sono pacchetti d'onda che si muovono nel modo in cui una particella di carica $-e$ si muoverebbe nel limite classico, mentre altre sono pacchetti d'onda che si muovono nel modo in cui una particella di carica e si muoverebbe classicamente. Per questa seconda classe di soluzioni W ha un valore negativo. Classicamente si supera la difficoltà escludendo arbitrariamente tali soluzioni con W negativa. Non si può fare ciò nella teoria quantistica, poiché in generale una perturbazione causerà transizioni da stati con W positiva a stati con W negativa. Tale transizione apparirebbe sperimentalmente come un elettrone che improvvisamente cambia la sua carica da $-e$ a e , un fenomeno che non è stato osservato. La vera equazione d'onda relativistica dovrebbe essere cioè tale che le sue soluzioni si dividano in due insiemi che non si combinano, che si riferiscano rispettivamente alla carica $-e$ e alla carica e .

Nel presente articolo avremo a che fare solo con la rimozione della prima di queste due difficoltà. La teoria risultante è perciò ancora una approssimazione, ma appare buona abbastanza da dare conto di tutti i fenomeni di duplicità senza ulteriori assunzioni.

§ 2. L'Hamiltoniana per il Campo Zero

Il nostro problema è ottenere una equazione d'onda della forma (2) che sia invariante per trasformazioni di Lorentz e sia equivalente alla (1) nel limite di grandi numeri quantici. Considereremo prima il caso di nessun campo, quando l'equazione (1) si riduce a

$$(-p_0^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 c^2) \psi = 0 \quad (3)$$

se si pone

$$p_0 = \frac{W}{c} = i\hbar \frac{\partial}{c\partial t}.$$

La simmetria tra p_0 e p_1, p_2, p_3 richiesta dalla relatività mostra che, poiché l'Hamiltoniana che vogliamo è lineare in p_0 , deve essere lineare anche in p_1, p_2 e p_3 . La nostra equazione è perciò della forma

$$(p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta) \psi = 0, \quad (4)$$

dove allo stato attuale tutto ciò che sappiamo circa le variabili dinamiche o operatori $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ è che esse sono indipendenti da p_0, p_1, p_2, p_3 , *i.e.*, commutano con t e x_1, x_2, x_3 . Poiché stiamo considerando il caso di una particella che si muove nello spazio vuoto, tale che tutti i punti dello spazio sono equivalenti, ci aspetteremmo che l'Hamiltoniana non coinvolga t e x_1, x_2, x_3 . Questo significa che $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ sono indipendenti da t e x_1, x_2, x_3 , e commutano con p_0 e p_1, p_2, p_3 . Siamo perciò obbligati ad avere altre variabili dinamiche a parte le coordinate e il momento dell'elettrone, così che $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ siano funzioni di tali variabili. La funzione ψ deve coinvolgere altre variabili oltre t e x_1, x_2, x_3 .

L'equazione (4) porta a

$$\begin{aligned} 0 &= (-p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta) (p_0 + \alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2 + \alpha_3 p_3 + \beta) \psi \\ &= \left[-p_0^2 + \sum \alpha_i^2 p_i^2 + \sum (\alpha_1 \alpha_2 + \alpha_1 \alpha_3) p_1 p_2 + \beta^2 + \sum (\alpha_1 \beta + \alpha_2 \beta) p_1 \right] \psi, \end{aligned} \quad (5)$$

dove la \sum si riferisce a permutazioni cicliche dei suffissi 1,2,3. Questa è in accordo con la (3) se

$$\left. \begin{aligned} \alpha_r^2 &= 1, & \alpha_r \alpha_s + \alpha_s \alpha_r &= 0 \quad (r \neq s) \\ \beta^2 &= 1 & \alpha_r \beta + \beta \alpha_r &= 0 \end{aligned} \right\} \quad r, s = 1, 2, 3.$$

Se poniamo $\beta = \alpha_4 mc$, queste condizioni diventano

$$\alpha_\mu^2 = 1 \quad \alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu = 0 \quad (\mu \neq \nu) \quad \mu, \nu = 1, 2, 3, 4. \quad (6)$$

Possiamo supporre che le α_μ siano espresse come matrici in qualche schema matriciale, con gli elementi matriciali di α_μ , diciamo, $\alpha_\mu(\zeta' \zeta'')$. La funzione d'onda ψ deve ora essere funzione di ζ e di t, x_1, x_2, x_3 . Il risultato di α_μ moltiplicato ψ sarà una funzione ($\alpha_\mu \psi$) di x_1, x_2, x_3, t, ζ definita da

$$(\alpha_\mu \psi)(x, t, \zeta) = \sum_{\zeta'} \alpha_\mu(\zeta \zeta') \psi(x, t, \zeta').$$

Dobbiamo ora trovare quattro matric α_μ che soddisfino la (6). Faremo uso delle matrici

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

che Pauli ha introdotto⁴ per descrivere le tre componenti del momento angolare di spin. Queste matrici hanno le proprietà

$$\sigma_r^2 = 1 \quad \sigma_r \sigma_s + \sigma_s \sigma_r = 0 \quad (r \neq s), \quad (7)$$

che noi chiediamo alle nostre α . Non possiamo tuttavia prendere le σ come tre delle nostre α poiché non sarebbe possibile trovare la quarta. Dobbiamo estendere le σ in maniera diagonale aggiungendo due

⁴Pauli, *loc. cit.*

righe e due colonne e introdurre altre tre matrici ρ_1, ρ_2, ρ_3 della stessa forma delle σ ma che si riferiscono a diverse righe e colonne. Cioè:

$$\begin{aligned}\sigma_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} & \sigma_2 &= \begin{pmatrix} 0 & \imath & 0 & 0 \\ \imath & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\imath \\ 0 & 0 & \imath & 0 \end{pmatrix} & \sigma_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \\ \rho_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \rho_2 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\imath & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \imath \\ \imath & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \imath & 0 & 0 \end{pmatrix} & \rho_3 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Le ρ si ottengono dalle σ scambiando seconda e terza riga e seconda e terza colonna. Abbiamo ora in aggiunta alle (7)

$$\left. \begin{aligned} \rho_r^2 &= 1, & \rho_r \rho_s + \rho_s \rho_r &= 0 \quad (r \neq s) \\ \rho_r \sigma_s &= \sigma_s \rho_r \end{aligned} \right\} \quad r, s = 1, 2, 3. \quad (8)$$

Se ora prendiamo

$$\alpha_1 = \rho_1 \sigma_1 \quad \alpha_2 = \rho_1 \sigma_2 \quad \alpha_3 = \rho_1 \sigma_3 \quad \alpha_4 = \rho_3,$$

tutte le condizioni (6) sono soddisfatte, *e.g.*

$$\begin{aligned} \alpha_1^2 &= \rho_1 \sigma_1 \rho_1 \sigma_1 = \rho_1^2 \sigma_1^2 = 1 \\ \alpha_1 \alpha_2 &= \rho_1 \sigma_1 \rho_1 \sigma_2 = \rho_1^2 \sigma_1 \sigma_2 = -\rho_1^2 \sigma_2 \sigma_1 = -\alpha_1 \alpha_2. \end{aligned}$$

Le seguenti equazioni vengono scritte per riferimento in seguito:

$$\left. \begin{aligned} \rho_1 \rho_2 &= \imath \rho_3 &= -\rho_2 \rho_1 \\ \sigma_1 \sigma_2 &= \imath \sigma_3 &= -\sigma_2 \sigma_1 \end{aligned} \right\}, \quad (9)$$

insieme con le equazioni che si ottengono da permutazioni cicliche dei suffissi. L'equazione d'onda (4) assume la forma

$$[p_0 + \rho_1(\sigma, \rho) + \rho_3 mc] \psi = 0, \quad (10)$$

dove σ è il vettore $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$.

§ 3. Dimostrazione dell'invarianza sotto Trasformazioni di Lorentz

Si moltiplichino a sinistra la (10) per ρ_3 . Essa diventa con l'uso della (10)

$$[\rho_3 p_0 + \imath \rho_3(\sigma_1 p_1 + \sigma_2 p_2 + \sigma_3 p_3) + mc] \psi = 0.$$

Ponendo

$$p_0 = ip_4, \quad \rho_3 = \gamma_4, \quad \rho_3 \sigma_r = \gamma_r, \quad r = 1, 2, 3 \quad (11)$$

abbiamo

$$\left[i \sum \gamma_\mu p_\mu + mc \right] \psi = 0, \quad \mu = 1, 2, 3, 4. \quad (12)$$

Le p_μ si trasformano sotto trasformazioni di Lorentz secondo la legge

$$p'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} p_\nu$$

dove i coefficienti $a_{\mu\nu}$ sono *c-numbers* che soddisfano a

$$\sum_\mu a_{\mu\nu} a_{\mu\tau} = \delta_{\nu\tau}, \quad \sum_\tau a_{\mu\tau} a_{\nu\tau} = \delta_{\mu\nu}.$$

L'equazione d'onda si trasforma dunque in

$$\left[i \sum \gamma'_\mu p'_\mu + mc \right] \psi = 0 \quad (13)$$

dove

$$\gamma'_\mu = \sum_\nu a_{\mu\nu} \gamma_\nu.$$

Le γ'_μ come le α_μ soddisfano le

$$\gamma_\mu^2 = 1, \quad \gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 0, \quad (\mu \neq \nu).$$

Queste relazioni possono essere riassunte in una singola equazione

$$\gamma_\mu \gamma_\nu + \gamma_\nu \gamma_\mu = 2\delta_{\mu\nu}.$$

Abbiamo:

$$\begin{aligned} \gamma'_\mu \gamma'_\nu + \gamma'_\nu \gamma'_\mu &= \sum_{\tau\lambda} a_{\mu\tau} a_{\nu\lambda} (\gamma_\tau \gamma_\lambda + \gamma_\lambda \gamma_\tau) \\ &= 2 \sum_{\tau\lambda} a_{\mu\tau} a_{\nu\lambda} \delta_{\tau\lambda} \\ &= 2 \sum_\tau a_{\mu\tau} a_{\nu\tau} = 2\delta_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

Così le γ'_μ soddisfano le stesse relazioni delle γ_μ . Così possiamo porre, in analogia con la (11)

$$\gamma'_4 = \rho'_3, \quad \gamma'_r = \rho'_r \sigma'_r$$

dove le ρ' e le σ' , si verifica facilmente, soddisfano le relazioni analoghe alle (7), (8), (9) se ρ'_2 e ρ'_1 sono definite da $\rho'_2 = -i\gamma'_1 \gamma'_2 \gamma'_3$, $\rho'_1 = -i\rho'_2 \rho'_3$.

Mostriamo ora che, per mezzo di una trasformazione canonica, le ρ' e le σ' possono essere messe nella stessa forma delle ρ e le σ . Dall'equazione $\rho_3^2 = 1$, segue che i soli possibili valori caratteristici di ρ_3 sono ± 1 . Se si applica a ρ'_3 una trasformazione canonica con funzione ρ'_1 , il risultato è

$$\rho'_1 \rho'_3 (\rho'_1)^{-1} = -\rho'_3 \rho'_1 (\rho'_1)^{-1} = -\rho'_3.$$

Poiché i valori caratteristici non sono alterati da una trasformazione canonica, ρ'_3 deve avere gli stessi valori caratteristici di $-\rho'_3$. Quindi i valori caratteristici di ρ'_3 sono $+1$, doppio e -1 doppio. Lo stesso argomento vale per le altre ρ' e σ' .

Poiché σ'_3 e ρ'_3 commutano, possono essere simultaneamente diagonalizzate da una trasformazione canonica. Esse avranno come elementi diagonali due volte $+1$ e due volte -1 . così, disponendo riarrangiando propriamente le righe e le colonne esse possono essere messe rispettivamente nella forma di ρ_3 e σ_3 . (La possibilità $\rho_3 = \pm\sigma_3$ è esclusa dall'esistenza di matrici che commutano con una e non con l'altra.) Una qualsiasi matrice di quattro righe e quattro colonne può essere scritta come

$$c + \sum_r c_r \sigma_r + \sum_r c'_r \rho_r + \sum_{rs} c_{rs} \rho_r \sigma_s \quad (14)$$

dove i sedici coefficienti c, c'_r, c_{rs} sono c -numbers. Esprimendo σ'_1 in questo modo, vediamo, dal fatto che commuta con $\rho'_3 = \rho_3$ e anticommute⁵ con $\sigma'_3 = sig_3$, che essa deve essere della forma

$$\sigma'_1 = c_1 \sigma_1 + c_2 \sigma_2 + c_{31} \rho_3 \sigma_1 + c_{32} \rho_3 \sigma_2,$$

i.e., della forma

$$\sigma'_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix}.$$

La condizione $\sigma'^2_1 = 1$ mostra che $a_{12}a_{21} = 1$, $a_{34}a_{43} = 1$. Ora applichiamo la trasformazione canonica: moltiplichiamo la prima riga per $(a_{21}/a_{12})^{\frac{1}{2}}$, la terza per $(a_{43}/a_{34})^{\frac{1}{2}}$, dividiamo la prima e terza colonna per le stesse espressioni; σ'_1 diventa identica a σ_1 e le matrici diagonali ρ'_3 e σ'_3 restano inalterate.

Se ora esprimiamo ρ'_1 nella forma (14) e utilizziamo il fatto che essa commuta con $\sigma'_1 = \sigma_1$ e $\sigma'_3 = \sigma_3$ e anticommute con $\rho'_3 = \rho_3$, vediamo che deve essere della forma

$$\rho'_1 = c'_1 \rho_1 + c'_2 \rho_2.$$

La condizione $\rho'^2_1 = 1$ mostra che $c'^2_1 + c'^2_2 = 1$, o $c'_1 = \cos \theta$, $c'_2 = \sin \theta$. Quindi ρ'_1 è della forma

$$\rho'_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & e^{-i\theta} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{-i\theta} \\ e^{i\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ora applichiamo la trasformazione canonica: moltiplichiamo prima e seconda riga per $e^{i\theta}$, e dividiamo la seconda e terza colonna per la stessa quantità; ρ'_1 avrà la stessa forma di ρ_1 , e $\sigma_1, \sigma_3, \rho_3$ restano inalterate. ρ'_2 e σ'_2 devono avere la stessa forma di ρ_2 e σ_2 in considerazione delle espressioni $\iota \rho'_2 = \rho'_3 \rho'_1$, $\iota \sigma'_2 = \sigma'_3 \sigma'_1$.

⁵Diciamo che **a** anticommute con **b** quando **ba** = **-ab**.

Così mediante una successione di trasformazioni canoniche, che possono essere composte per darne una sola, le ρ' e σ' possono essere portate nella forma di ρ e σ . La nuova equazione d'onda (13) può essere riportata nella forma originale (12), così i risultati di questa equazione sono indipendenti dal sistema di riferimento utilizzato.

§ 4. L'Hamiltoniana per un Campo Arbitrario

Per ottenere l'Hamiltoniana di un elettrone in un campo elettromagnetico con potenziale scalare A_0 e potenziale vettore \mathbf{A} usiamo l'usuale procedura di sostituzione del momento \mathbf{p} con il momento generalizzato $\mathbf{p} - \frac{e}{c}\mathbf{A}$ e di p_0 con $p_0 - \frac{e}{c}A_0$ nell'hamiltoniana in assenza di campo. Dall'equazione (10) si ottiene:

$$\left[p_0 + \frac{e}{c}A_0 + \rho_1(\sigma, \mathbf{p} + \frac{e}{c}\mathbf{A}) + \rho_3 mc \right] \psi = 0. \quad (15)$$

Questa equazione è sufficiente a spiegare ogni fenomeno di duplicità. A causa delle matrici ρ e σ che contengono quattro righe e quattro colonne, essa fornirà quattro volte le soluzioni dell'equazione non relativistica e il doppio dell'equazione relativistica (1). Poiché la metà delle soluzioni devono essere scartate in quanto relative ad una carica $+e$ sull'elettrone, resta il numero corretto di soluzioni da tenere conto dei fenomeni di duplicità. La dimostrazione dell'invarianza rispetto a trasformazioni di Lorentz fornita nel paragrafo precedente si applica anche alla (15).

Possiamo avere un'idea approssimativa della differenza tra la (15) e la (1) moltiplicando come fatto con la (5). Abbiamo, se scriviamo e' per e/c

$$\begin{aligned} 0 &= [-(p_0 + e'A_0) + \rho_1(\sigma, \mathbf{p} + e'\mathbf{A}) + \rho_3 mc] \\ &\quad \times [(p_0 + e'A_0) + \rho_1(\sigma, \mathbf{p} + e'\mathbf{A}) + \rho_3 mc] \psi \\ &= [-(p_0 + e'A_0)^2 + (\sigma, \mathbf{p} + e'\mathbf{A})^2 + m^2 c^2 \\ &\quad + \rho_1 \{ (\sigma, \mathbf{p} + e'\mathbf{A})(p_0 + e'A_0) - (p_0 + e'A_0)(\sigma, \mathbf{p} + e'\mathbf{A}) \}] \psi. \end{aligned} \quad (16)$$

Utilizziamo ora la formula generale secondo cui, se \mathbf{B}, \mathbf{C} sono due vettori che commutano con σ

$$\begin{aligned} (\sigma, \mathbf{B})(\sigma, \mathbf{C}) &= \sum \sigma_1^2 B_1 C_1 + \sum (\sigma_1 \sigma_2 B_1 C_2 + \sigma_2 \sigma_1 B_2 C_1) \\ &= (\mathbf{B}, \mathbf{C}) + i \sum \sigma_3 (B_1 C_2 - B_2 C_1) \\ &= (\mathbf{B}, \mathbf{C}) + i(\sigma, \mathbf{B} \times \mathbf{C}). \end{aligned} \quad (17)$$

Prendendo $\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{p} + e'\mathbf{A}$, troviamo

$$\begin{aligned} (\sigma, \mathbf{p} + e'\mathbf{A})^2 &= (\mathbf{p} + e'\mathbf{A})^2 + i \sum \sigma_3 \\ &\quad [(p_1 + e'A_1)(p_2 + e'A_2) - (p_2 + e'A_2)(p_1 + e'A_1)] \\ &= (\mathbf{p} + e'\mathbf{A})^2 + he'(\sigma, \text{curl} \mathbf{A}). \end{aligned}$$

Così la (16) diventa

$$\begin{aligned} 0 &= \left[-(p_0 + e' A_0)^2 + (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + e' \mathbf{A})^2 + m^2 c^2 + e' h(\boldsymbol{\sigma}, \text{curl} \mathbf{A}) - ie' h \boldsymbol{\rho}_1 \left(\boldsymbol{\sigma}, \text{grad} A_0 + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \right] \\ &= \left[-(p_0 + e' A_0)^2 + (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} + e' \mathbf{A})^2 + m^2 c^2 + e' h(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}) + ie' \boldsymbol{\rho}_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E}) \right] \psi, \end{aligned}$$

dove \mathbf{E} e \mathbf{H} sono il campo elettrico e magnetico.

L'ultima equazione differisce dalla (1) per i due termini aggiuntivi

$$\frac{eh}{c}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{H}), \quad \frac{ieh}{c}\boldsymbol{\rho}_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{E})$$

in F . Questi due termini quando divisi per il fattore $2m$, possono essere visti come l'energia potenziale addizionale dell'elettrone dovuta ai nuovi gradi di libertà introdotti. L'elettrone si comporta quindi come se avesse momento magnetico $eh/2mc\boldsymbol{\sigma}$ e momento elettrico $ieh/2mc\boldsymbol{\rho}_1\boldsymbol{\sigma}$. Il momento magnetico è identico a quello ipotizzato nel modello dell'elettrone con spin. Essendo il momento elettrico puramente immaginario ci aspettiamo che non compaia nel modello. E' dubbio se il momento elettrico abbia un significato fisico, poiché l'Hamiltoniana nella (15) da cui siamo partiti è reale, e la parte immaginaria è comparsa solo quando l'abbiamo moltiplicata in modo artificiale allo scopo di farla assomigliare a quella delle teorie precedenti.

§ 5. Integrali del Momento Angolare per il Moto in un Campo Centrale

Considereremo in grande dettaglio il moto di un elettrone in un campo di forze centrale. Poniamo $\mathbf{A} = 0$ e $e' A_0 = V(r)$, una funzione arbitraria del raggio r , cos' che l'Hamiltoniana nella (15) diventa

$$F \equiv p_0 + V(r) + \boldsymbol{\rho}_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) + \boldsymbol{\rho}_3 mc.$$

Determineremo le soluzioni periodiche dell'equazione $F\psi = 0$, il che significa che p_0 è da considerarsi un parametro e non un operatore; esso è infatti $1/c$ moltiplicato per l'energia. Troveremo innanzitutto il momento angolare del moto. Il momento angolare orbitale \mathbf{m} è definito come

$$\mathbf{m} = \mathbf{x} \times \mathbf{p},$$

e soddisfa le seguenti “*Vertauschkung*” relazioni:

$$\left. \begin{aligned} m_1 x_1 - x_1 m_1 &= 0 & m_1 x_2 - x_2 m_1 &= i\hbar x_3 \\ m_1 p_1 - p_1 m_1 &= 0 & m_1 p_2 - p_2 m_1 &= i\hbar p_3 \\ \mathbf{m} \times \mathbf{m} &= i\hbar \mathbf{m} & \mathbf{m}^2 m_1 - m_1 \mathbf{m}^2 &= 0 \end{aligned} \right\}, \quad (18)$$

insieme con le relazioni simili che si ottengono permutando gli indici. Inoltre \mathbf{m} commuta con r e con p_r il momento canonico coniugato di r . Abbiamo

$$\begin{aligned} m_1 F - F m_1 &= \rho_1 \{m_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) - (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p})m_1\} \\ &= \rho_1(\boldsymbol{\sigma}, m_1 \mathbf{p} - \mathbf{p} m_1) \\ &= i\hbar \rho_1(\sigma_2 p_3 - p_3 \sigma_2), \end{aligned}$$

e così

$$\mathbf{m}F - F\mathbf{m} = i\hbar \rho_1 \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p}. \quad (19)$$

Così \mathbf{m} non è una costante del moto. Abbiamo inoltre

$$\begin{aligned} \sigma_1 F - F \sigma_1 &= \rho_1 \{\sigma_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) - (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p})\sigma_1\} \\ &= \rho_1(\sigma_1 \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \sigma_1, \mathbf{p}) \\ &= 2i\rho_1(\sigma_3 p_2 - p_2 \sigma_3), \end{aligned}$$

con l'aiuto della (9), e così

$$\boldsymbol{\sigma}F - F\boldsymbol{\sigma} = -2i\rho_1 \boldsymbol{\sigma} \times \mathbf{p}.$$

Quindi

$$\left(m + \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}\right)F - F\left(m + \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}\right) = 0.$$

Così $(m + \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma})$ ($= \mathbf{M}$, ad esempio) è una costante del moto. Possiamo interpretare questo risultato dicendo che l'elettrone ha un momento angolare di spin pari a $\frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}$, che aggiunto al momento angolare orbitale \mathbf{m} dà un momento angolare totale \mathbf{M} che è una costante del moto. Le relazioni Vertauskung (18) valgono se sostituiamo \mathbf{M} al posto di \mathbf{m} . In particolare

$$\mathbf{M} \times \mathbf{M} = i\hbar \mathbf{M} \quad \text{and} \quad \mathbf{M}^2 M_3 = M_3 \mathbf{M}^2.$$

M_3 sarà una variabile azione del sistema. Poiché i valori caratteristici di m_3 dovranno essere valori interi multipli di \hbar affinché la funzione d'onda sia a valore singolo, i valori di M_3 dovranno essere seminteri multipli di \hbar . Se poniamo

$$M^2 = (j^2 - \frac{1}{4})\hbar^2, \quad (20)$$

j sarà un altro numero quantico e i valori caratteristici di M_3 andranno da $(j - \frac{1}{2})\hbar$ a $(-j + \frac{1}{2})\hbar$.⁶ Così j assume valori interi.

Si verifica facilmente dalla (19) che \mathbf{m}^2 non commuta con F e non è dunque una costante del moto. Questa è una differenza tra la presente teoria e la precedente teoria dell'elettrone con spin, in cui \mathbf{m}^2 è costante, e definisce il numero quantico azimutale k secondo una formula analoga alla (19). Troveremo che la nostra j giocherà un ruolo analogo a k della teoria precedente.

⁶Cfr. *Proc. Roy. Soc.*, **A**, vol. 111, p. 281, (1926).

§ 6. Livelli Energetici per il Moto in un Campo Centrale

Otterremo ora l'equazione d'onda come equazione differenziale in r , con le variabili che esprimono l'orientazione dell'intero sistema rimosse. Possiamo fare questo mediante il solo uso di metodi elementari di algebra non commutativa nel modo seguente.

Nella formula (17) si prenda $\mathbf{B} = \mathbf{C} = \mathbf{m}$. Si ha

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m})^2 &= \mathbf{m}^2 + \imath(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m} \times \mathbf{m}) \\ &= \left(m + \frac{1}{2}h\boldsymbol{\sigma}\right)^2 - h(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}) - \frac{1}{4}h^2\boldsymbol{\sigma}^2 - h(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}) \end{aligned} \quad (21)$$

$$= \mathbf{M}^2 - 2h(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}) - \frac{3}{4}h^2. \quad (22)$$

Quindi

$$\{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}) + h\}^2 = \mathbf{M}^2 + \frac{1}{4}h^2 = j^2h^2.$$

Fino ad ora abbiamo definito j solo attraverso j^2 e potremmo prendere ora jh uguale a $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}) + h$. Questo non è conveniente poiché vogliamo che j sia una costante del moto mentre $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}) + h$ non lo è, sebbene il suo quadrato lo sia. Abbiamo infatti, mediante un'altra applicazione della (17),

$$(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m})(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) = \imath(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m} \times \mathbf{p})$$

poiché $\mathbf{m} \cdot \mathbf{p} = 0$, e similmente

$$(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}) = \imath(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p} \times \mathbf{m})$$

così che

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m})(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) + (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}) &= \imath \sum \boldsymbol{\sigma}_1 (m_2 p_3 - p_3 m_2 + p_2 m_3 - m_3 p_2) \\ &= \imath \sum \boldsymbol{\sigma}_1 2\imath h p_1 = -2\imath h(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}), \end{aligned}$$

o

$$\{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}) + h\}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) + (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p})\{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}) + h\} = 0.$$

Così $\{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}) + h\}$ anticommuta con uno dei termini di F , per la precisione $\boldsymbol{\rho}_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p})$, e commuta con gli altri tre. Dunque $\boldsymbol{\rho}_3\{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}) + h\}$ commuta con tutti e quattro ed è perciò una costante del moto. Ma il quadrato di $\boldsymbol{\rho}_3\{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}) + h\}$ deve essere uguale a j^2h^2 . Prendiamo perciò

$$jh = \boldsymbol{\rho}_3\{(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}) + h\}. \quad (23)$$

Abbiamo, sempre applicando la (17),

$$(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x})(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) = (\mathbf{x}, \mathbf{p}) + \imath(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}).$$

Ora una definizione ammissibile di p_r è

$$(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = rp_r + \imath h,$$

e dalla (23)

$$(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}) = \boldsymbol{\rho}_3 j h - h.$$

Quindi

$$(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x})(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) = r p_r + i \boldsymbol{\rho}_3 j h. \quad (24)$$

Introduciamo la quantità ϵ definita da

$$r \epsilon = \boldsymbol{\rho}_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}). \quad (25)$$

Siccome r commuta con $\boldsymbol{\rho}_1$ e con $(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x})$, essa commuta anche con ϵ . Abbiamo così

$$r^2 \epsilon^2 = [\boldsymbol{\rho}_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x})]^2 = (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x})^2 = \mathbf{x}^2 = r^2,$$

oppure

$$\epsilon^2 = 1.$$

Poiché c'è simmetria tra \mathbf{x} e \mathbf{p} rispetto al momento angolare, $\boldsymbol{\rho}_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x})$ così come $\boldsymbol{\rho}_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p})$ devono commutare con \mathbf{M} e j . Dunque ϵ commuta con \mathbf{M} e j . Inoltre ϵ deve commutare con p_r poiché abbiamo

$$(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x})(\mathbf{x}, \mathbf{p}) - (\mathbf{x}, \mathbf{p})(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}) = i h (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{x}),$$

che da

$$r \epsilon (r p_r + i h) - (r p_r + i h) r \epsilon = i h r \epsilon,$$

che si riduce a

$$\epsilon p_r - p_r \epsilon = 0.$$

Dalle (24) (25) abbiamo

$$r \epsilon \boldsymbol{\rho}_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) = r p_r + i \boldsymbol{\rho}_3 j h.$$

o

$$\boldsymbol{\rho}_1(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}) = \epsilon p_r + i \epsilon \boldsymbol{\rho}_3 j h / r.$$

Così

$$F = p_0 + V(r) + \epsilon p_r + i \epsilon \boldsymbol{\rho}_3 j h / r + \boldsymbol{\rho}_3 m c \quad (26)$$

L'equazione (25) mostra che ϵ anticommuta con $\boldsymbol{\rho}_3$. Possiamo perciò con una trasformazione canonica (che coinvolge magari le \mathbf{x} e \mathbf{p} così come $\boldsymbol{\sigma}$ e $\boldsymbol{\rho}$) portare ϵ nella forma di $\boldsymbol{\rho}_2$ del paragrafo § 2. senza cambiare $\boldsymbol{\rho}_3$ e nessuna delle altre variabili che compaiono nel membro destro della (26), poiché queste altre variabili commutano tutte con ϵ . $i \epsilon \boldsymbol{\rho}_3$ sarà ora della forma $i \boldsymbol{\rho}_2 \boldsymbol{\rho}_3 = -\boldsymbol{\rho}_1$, così che l'equazione d'onda assume la forma

$$F \psi \equiv [p_0 + V(r) + \boldsymbol{\rho}_2 p_r - \boldsymbol{\rho}_1 j h / r + \boldsymbol{\rho}_3 m c] \psi = 0.$$

Se scriviamo esplicitamente questa equazione, chiamando le componenti di ψ relative alla prima e terza riga (o colonne) ψ_α e ψ_β rispettivamente, otteniamo

$$\begin{aligned} F \psi_\alpha &\equiv (p_0 + V) \psi_\alpha - h \frac{\partial}{\partial r} \psi_\beta - \frac{j h}{r} \psi_\beta + m c \psi_\alpha = 0, \\ F \psi_\beta &\equiv (p_0 + V) \psi_\beta + h \frac{\partial}{\partial r} \psi_\alpha - \frac{j h}{r} \psi_\alpha - m c \psi_\beta = 0 \end{aligned}$$

La seconda e quarta componente forniscono solò una ripetizione di queste due equazioni. Eliminiamo ora ψ_α . Se scriviamo hB per $p_0 + V + mc$, la prima equazione diventa

$$\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right)\psi_\beta = B\psi_\alpha,$$

che differenziando da

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial r^2}\psi_\beta + \frac{j}{r}\frac{\partial}{\partial r}\psi_\beta - \frac{j}{r^2}\psi_\beta &= B\frac{\partial}{\partial r}\psi_\alpha + \frac{\partial B}{\partial r}\psi_\alpha \\ &= \frac{B}{h}\left[-(p_0 + V - mc)\psi_\beta \frac{j\hbar}{r}\psi_\alpha\right] + \frac{1}{h}\frac{\partial V}{\partial r}\psi_\alpha \\ &= -\frac{(p_0 + V)^2 - m^2c^2}{h^2}\psi_\beta + \left(\frac{j}{r} + \frac{1}{Bh}\frac{\partial V}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right)\psi_\beta. \end{aligned}$$

Questa si riduce a

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\psi_\beta + \left[\frac{(p_0 + V)^2 - m^2c^2}{h^2} - \frac{j(j+1)}{r^2}\right]\psi_\beta - \frac{1}{Bh}\frac{\partial V}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j}{r}\right)\psi_\beta = 0. \quad (27)$$

I valori del parametro p_0 per cui questa equazione ammette soluzioni finite a $r = 0$ e $r = \infty$ sono $1/c$ moltiplicato i livelli energetici del sistema. Per confrontare questa equazione con quelle delle precedenti teorie poniamo $\psi_\beta r \chi$ così che

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\chi + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\chi + \left[\frac{(p_0 + V)^2 - m^2c^2}{h^2} - \frac{j(j+1)}{r^2}\right]\chi - \frac{1}{Bh}\left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{j+1}{r}\right)\chi = 0. \quad (28)$$

Se si trascura l'ultimo termine, che è piccolo poiché B è grande, questa equazione diventa uguale all'equazione di Schroedinger con le correzioni relativistiche incluse. Poiché j assume valori interi sia negativi che positivi, la nostra equazione darà il doppio dei livelli energetici quando l'ultimo termine non si trascura. Confrontiamo ora l'ultimo termine, che è dello stesso ordine di grandezza delle correzioni relativistiche, con la correzione dello spin di Darwin e Pauli. Per fare ciò dobbiamo eliminare il termine $\frac{\partial \chi}{\partial r}$ con una ulteriore trasformazione della funzione d'onda. Poniamo

$$\chi = B^{-\frac{1}{2}}\chi_1,$$

che fornisce

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2}\chi_1 + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r}\chi_1 + \left[\frac{(p_0 + V)^2 - m^2c^2}{h^2} - \frac{j(j+1)}{r^2}\right]\chi_1 + \left[\frac{1}{Bh}\frac{j}{r}\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{2}\frac{1}{Bh}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{4}\frac{1}{B^2h^2}\left(\frac{\partial V}{\partial r}\right)^2\right]\chi_1 = 0. \quad (29)$$

La correzione è ora, al primo ordine di accuratezza,

$$\frac{1}{Bh}\left(\frac{j}{r}\frac{\partial V}{\partial r} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial r^2}\right),$$

dove $Bh = 2mc$ (purché p_0 sia positivo). Per l'atomo d'idrogeno dobbiamo porre $V = e^2/cr$. La correzione al primo ordine diventa ora

$$-\frac{e^2}{2mc^2r^3}(j+1). \quad (30)$$

Se scriviamo $-j$ per $j + 1$ nella (29), non alteriamo i termini che rappresentano il sistema imperturbato, così

$$-\frac{e^2}{2mc^2r^3}j. \quad (31)$$

Nella teoria di Pauli e Darwin, il termine correttivo è

$$-\frac{e^2}{2mhc^2r^3}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m})$$

quando il fattore di Thomas $\frac{1}{2}$ viene incluso. Dobbiamo ricordare che nella teoria di Pauli e Darwin, il momento angolare orbitale risultante k gioca la parte del nostro j . Dobbiamo definire k come

$$\mathbf{m}^2 = k(k+1)h^2$$

invece dell'esatto analogo della (20), così che possa avere valori caratteristici interi, come j . Dalla (21) abbiamo

$$(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m})^2 = k(k+1)h^2 - k(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m})$$

o

$$\left\{ (\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}) + \frac{1}{2}h \right\}^2 = \left(k + \frac{1}{2}\right)^2 h^2,$$

quindi

$$(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{m}) = hk \quad \text{oppure} \quad -(k+1)h.$$

La correzione diventa dunque

$$\frac{e^2}{2mc^2r^3}k \quad \text{oppure} \quad -\frac{e^2}{2mc^2r^3}(k+1).$$

in accordo con le (30) e (31).

La presente teoria produce dunque, in prima approssimazione, gli stessi livelli energetici di quella di Darwin, che sono in accordo con gli esperimenti.