بسمه تعالی

دانشگاه شهید بهشتی
دانشکدهٔ علوم ریاضی
گروه ریاضی

رسالهٔ دکتری ریاضی

عنوان:

ℓ—مدولها، فضاهای ریس، و صورت بدون نقطهٔ دوگان کاکوتانی

نگارنده:
ابوالقاسم کریمی فیض آبادی

استاد راهنما:
دکتر محمدمهدی ابراهیمی

استاد مشاور:
دکتر مژگان محمودی

آبان ۱۳۸۳

به مناسبت دویستمین سال درگذشت فیلسوف و اندیشمند بزرگ تاریخ

ایمانوئل کانت

این رساله را به او تقدیم می‌کنم.
همچنین، به همسر مهربانم

فرزانه

و خواهر دلسوزم

زهره

تقدیم می‌کنم.

تقدیر و تشکر

ابتدا از زحمات ارزنده استاد راهنمای خود، جناب آقای دکتر محمد مهدی ابراهیمی، بابت راهکارهای خلاق ایشان در پیشبرد کارهای پژوهشی، کمک ها، پیشنهادهای ارزنده، بحثها، گذاشتن وقت بسیار زیاد در رابطه با کارهای پژوهشی و این رساله و در نهایت لطف و محبتهای ایشان خالصانه تشکر می‌کنم.

از سرکار خانم دکتر محمودی استاد مشاور خود بسیار متشکرم، که ایشان همواره برای پاسخگویی به پرسشها و نیازها آماده بودند.

همچنین، دوست دارم از پروفسور ب. بناشفسکی برای پیشنهادها و محبتهایشان در پاسخ دقیق به پرسشها تشکر نمایم. و همین طور از پروفسور ج. مارتینز و ر. بال برای نظرات و ارسال مقالاتشان تشکر نمایم.

مراتب تشکر و احترام را به همگی استادان گروه ریاضی دانشگاه شهید بهشتی تقدیم می‌دارم.

همچنین از استادان عزیز، آقای دکتر بهمن هنری و آقای دکتر امید علی کرمزاده، و آقای دکتر سیامک یاسمی که پایان نامه اینجانب را مطالعه فرمودند و در جلسهٔ دفاع به عنوان داور حاضر شدند تشکر می نمایم.

از همسرم، فرزانه، بابت کمکها و محبتهایش صمیمانه تشکر می‌کنم.

در نهایت، از دوستم، دکتر حمیدرضا آزادی برای راهکارهای ارزنده ایشان برای افزایش اعتماد به نفس در کارها تشکر می‌کنم.

چکیده

در اثبات بسیاری از نتایج و قضیه‌های کلاسیک مهم توپولوژی و آنالیز از اصل انتخاب استفاده شده است. با استفاده از توپولوژی بدون نقطه می‌توان برای بعضی از این قضیه‌ها صورتی را بیان کرد که اثبات آنها خالی از اصل انتخاب است. در این رساله هدف ما بیان و اثبات صورت بدون نقطه برای قضیهٔ کاکوتانی است. برای انجام این کار از صورت بدون نقطهٔ طیف های کلاسیک آن استفاده می‌کنیم.

سه طیف معروف عبارتند از برومفیل، کیمل، و طیف ماکسیمال. صورت بدون نقطهٔ این طیفها برای f—حلقه‌ها را بناشفسکی مطالعه کرده است، و دو طیف اخیر برای ℓ—مدولها و فضاهای ریس در این رساله مطالعه می‌شود.

در نهایت، در آخرین فصل، صورت بدون نقطهٔ نمایش توابع ریس حقیقی را مطالعه می‌کنیم.

فهرست

پیشگفتار

دو قضیه در آنالیز وجود دارد که دو گروه از ساختاهای جبری مرتب را نمایش می‌دهند، که عبارتند از C^*—جبر (برای تعریف [۱٦] را ببینید) و M—فضا (تعریف ۱۰.۳.۱ را ببینید) که به ترتیب توسط استون [۲۰، ۲۱] و کاکوتانی [۱۹] اثبات شد. قضیهٔ استون—گلفند بیان می‌کند که هر C^*—جبر با $C(X)$ یکریخت است که X فضای فشرده و هاسدورف است [۱٦]. ب. بناشفسکی در [۲، ٦] صورت بدون نقطهٔ استون—گلفند را ساخته است. وی از f—حلقه‌های کامل ارشمیدسی قوی کراندار، متناظر با C^*—جبرها استفاده کرده است، و اثبات کرده است که با هم معادل هستند ([٦] را بینید). صورت بدون نقطهٔ قضیهٔ استون—گلفند بیان می‌کند که هر f—حلقه کامل ارشمیدسی قوی کراندار با $C(L)$ یکریخت است که L فریم فشرده و کاملاً منظم است. به علاوه، اگر A یک f—حلقه کامل ارشمیدسی قوی کراندار باشد آنگاه A با $C(\mathcal{M}A)$ یکریخت است که در آن $\mathcal{M}A$ فریم همهٔ ℓ—ایدآلهای بستهٔ A است (به [۲، ٦] رجوع کنید). این نوع نگرش به قضیهٔ استون—گلفند توسط ب. بناشفسکی به ما در به دست آوردن صورت بدون نقطهٔ قضیهٔ کاکوتانی در این رساله کمک نمود. هدف نهایی ما در این رساله به دست آوردن صورت بدون نقطهٔ قضیهٔ کاکوتانی است. ابزار ما نمادهای و تکنیکهای توپولوژی بدون نقطه و اشیائی که استفاده کرده‌ایم فریمهای ℓ—ایدآل و ℓ—ایدآلهای بسته هستند.

ما این مفاهیم را به طور کامل در فصل ۳ مطالعه می‌کنیم، و قضیهٔ نهایی را در فصل ۴ اثبات می‌کنیم. برای این کار، فضاهای ریس کامل ارشمیدسی کراندار را با

M—فضاها متناظر می‌کنیم و اثبات می‌کنیم که با هم معادل هستند (گزارهٔ ۹.۴.۴). همچنین، صورت بدون نقطهٔ قضیهٔ استون—وایرشتراس را برای فضاهای ریس ارائه می‌دهیم (قضیهٔ ۷.۴.۴)،(برای صورت کلاسیک قضیه به [۱۸] مراجعه کنید).

در فصل ۱، آنچه را که برای مطالعهٔ این رساله لازم است فراهم می‌کنیم.

در فصل ۲، ℓ—مدولها را در سه بخش مطالعه می‌کنیم. در بخش نخست f—مدولها، ℓ—مدولهای قوی، و سوپر f—مدولها را تعریف می کنیم، و رابطهٔ بین آنها را مطالعه می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که همگی کلاسهای معادله‌ای هستند. در بخش دوم ℓ—مدولهای کسرها را مورد مطالعه قرار می دهیم. اثبات می‌کنیم که مدول کسرها معادله‌های (f) را از مدول پایه به ارث می‌برد ولی معادله‌های (ℓ) را لزوماً به به ارث نمی برد، نمونهٔ رد کننده آن در تبصرهٔ ۴.۲.۲ ساخته شده است. در بخش سوم ساختارهای توپولوژیکی برای ℓ—مدولها و فضای ریس ارائه و مطالعه می‌شوند، که عبارتند از توئولوژی یکنواخت برای ℓ—مدولها و توپولوژی حد دنباله‌ای برای فضاهای ریس.

در فصل ۳، به مطالعهٔ صورت بدون نقطهٔ طیفهای ℓ—مدولها می‌پردازیم، که عبارتند از صورت بدون نقطهٔ طیف کیمل، صورت بدون نقطهٔ طیف ماکسیمال، و طیفهای ℓ—ایدآلهای بسته. در نخستین بخش نشان می‌دهیم که فشردگی $\mathcal{L}(M)$ معادل است با کرانداری ℓ—مدول M، و برای هر f—مدول M، $\mathcal{L}(M)$ به طور کوهرنت نرمال است. همچنین، اثبات می کنیم که برای اغلب مجموعه‌های ضربی S، $\mathcal{L}(M)$ با $\mathcal{L}(S^{-۱}M)$ یکریخت است. از این مطلب برای اثبات کاملاً منظم بودن طیف ماکسیمال $S\mathcal{L}(M)$ در بخش دوم استفاده می‌شود. متناظر با دو توپولوژی ارائه داده شده دو طیف ℓ—ایدآلهای بسته داریم که در بخش سوم این فصل مطالعه می شوند.

هدف نهایی که گفته شد در فصل ۴ بررسی می‌شود. این هدف نهایی صورت بدون نقطهٔ دوگان کاکوتانی است که در بخش آخر این فصل مطالعه می شود. در بخش نخست فانکتور بودن طیفهایی که در فصل قبلی مطالعه شدند نشان داده می شود. در

بخش بعد از آن فانکتور بودن فضای ریس توابع حقیقی پیوسته مطالعه می‌شوند، و الحاق بین این دو فانکتور آمیقی است که در بخش سوم بیان و اثبات می‌شود (قضیهٔ ۱.۳.۴). در بخش ۴ تعمیم صورت بدون نقطهٔ قضیهٔ استون—وایرشتراس را ساخته و اثبات می کنیم (قضیهٔ ۷.۴.۴) که مستقیماً برای اثبات دوگان کاکوتانی به کار گرفته می‌شود.

در فصل ۵، صورت بدون نقطهٔ یک قضیهٔ نمایش در آنالیز را می‌سازیم. این قضیه یک نمایش کلاسیک برای توابع ریس حقیقی روی $C(X)$ است، که برای هر نگاشت ریس حقیقی $\phi : C(X) \to \mathbb{R}$ که $\phi(۱) = ۱$، یک نقطه چون $x \in X$ نسبت می دهد که $\phi = \hat{x}$، که در آن ضابطهٔ $\hat{x}$ عبارت است از $\hat{x}(\alpha) = \alpha(x)$ برای هر $\alpha \in C(X)$ ([۱٦] ص. ۱٦۳ را ببینید). در اثبات کلاسیک بدون مشخص کردن نقطهٔ x از اصل انتخاب استفاده می‌شود.

در این رساله بجای فضای فشرده و هاسدورف از فریم فشرده و کاملاً منظم M و بجای $\hat{x}$ از $\tilde{p}$ که در آن $p \in M$ یک عضو اول است، استفاده می‌شود. $\tilde{p}$ با استفاده از برشهای ددکیند در ساختن عدد حقیقی $\tilde{p}(\alpha)$ تعریف می‌شود. سپس اثبات می شود که هر نگاشت ریس $\phi : C(M) \to \mathbb{R}$ به صورت $\phi(۱)\tilde{p}$ است، که در آن $p = \bigvee coz(ker\phi)$ (لم ۲.۲.۵). در ادامه یک تناظر یک به یک بین نگاشتهای ریس، اعضای اول، و ℓ—ایدآلهای اولی که در $Fix(\eta)$ هستند ایجاد می‌کنیم (قضیهٔ ۴.۲.۵). اگر هم M کاملاً منظم نباشد، می‌توانیم یک فریم کاملاً منظم چون K_M پیدا کنیم که $C(M) \simeq C(K_M)$ و همین طور یک تناظر یک به یک بین نگاشتهای ریس و اعضای اول $\sum K_M$ داریم (قضیهٔ ۵.۲.۵). سپس رابطهٔ بین ^ و ~ در گزارهٔ ٦.۲.۵ مطالعه می‌شود، و می‌بینیم که $\tilde{p}$ و $\tilde{q}$ در چه صورت برابر هستند.

در نهایت، رابطهٔ بین اعضای اول و اعضای همصفر بررسی می‌شود. این آمیق که هیچ عضو همصفر غیر یکه بزرگتر از عضو اول وجود ندارد، یک نتیجهٔ این رابطه است (نتیجهٔ ۷.۲.۵).

فصل ۱

پیش در آمد

در این فصل، به مطالبی که در این رساله احتیاج داریم می پردازیم.

۱.۱ رسته

برای مطالعه بیشتر در مورد رسته‌ها به [۱، ۱۷] رجوع نمایید.

۱.۱.۱ تعریف یک **رسته** کلاسی چون $\mathcal{C}$ از اشیایی چون $A, B, C, \cdots$، همراه با ویژگی‌های زیر است:

i) به هر زوج (A, B) از اشیاء، مجموعه‌ای چون $hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ نسبت داده می‌شود. هر $f \in hom_{\mathcal{C}}(A, B)$ را با $f : A \to B$ نشان می‌دهیم و **مورفیسم** از A به B می‌گوییم.

ii) برای هر سه شئ (A, B, C) یک تابع ترکیب چون

$$\begin{array}{rcl} hom_{\mathcal{C}}(B, C) \times hom_{\mathcal{C}}(A, B) & \to & hom_{\mathcal{C}}(A, C) \\ (g, f) & \rightsquigarrow & g \circ f \end{array}$$

وجود دارد، به طوری که برای هر $h : C \to D$ و $g : B \to C$ و $f : A \to B$ داریم

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

iii) برای هر A در $\mathcal{C}$، مورفیسمی چون $id_A : A \to A$ وجود دارد به طوری که برای هر $f : A \to B$ و $g : B \to A$، $id_A \circ g = g$ و $f \circ id_A = f$.

۲.۱.۱ تعریف فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته باشد. مورفیسم $f : A \to B$ را **یکریختی** گوییم هر گاه $g : B \to A$ موجود باشد به طوری که $f \circ g = id_B$ و $g \circ f = id_A$.

۳.۱.۱ مثال

۱) رستهٔ مجموعه‌ها را که تشکیل شده از تمام مجموعه‌ها و توابع بین آنها با **Set** نمایش می‌دهیم.

۲) رستهٔ فضاهای توپولوژی را که تشکیل شده از تمام فضاهای توپولوژی و توابع پیوسته بین آنها با **Top** نمایش می‌دهیم.

۴.۱.۱ تعریف فرض کنیم $\{A_i | i \in I\}$ خانواده‌ای از اشیاء در $\mathcal{C}$ باشد، خانوادهٔ $\{\pi_i : P \to A_i\}_{i \in I}$ $(\{l_i : A_i \to C\}_{i \in I})$ را یک **ضرب (همضرب)** برای $\{A_i | i \in I\}$ می‌گوییم هر گاه:

برای هر شئ A و هر خانوادهٔ $\{f_i : A \to A_i\}_{i \in I}$ $(\{g_i : A_i \to A\}_{i \in I})$، یک مورفیسم منحصر به فرد چون $\overline{f} : A \to P$ $(\overline{g} : C \to A)$ موجود باشد به طوری که برای هر $i \in I$، $\pi_i \circ \overline{f} = f_i$ $(\overline{g} \circ l_i = g_i)$.

۵.۱.۱ مثال در رستهٔ $\mathbf{Set}$، ضرب و همضرب هر خانواده چون $\{A_i | i \in I\}$ از مجموعه‌ها موجود است.

در واقع، $P = \prod_{i\in I} A_i$ (حاصلضرب دکارتی) همراه با توابع تصویری $\{\pi_i : P \to A_i\}$ ضرب در $\mathbf{Set}$ است؛ و $C = \dot\bigcup A_i$ (اجتماع مجزا) همراه با توابع شمولی $l_i : A_i \to C$ همضرب در $\mathbf{Set}$ است.

٦.۱.۱ تعریف فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو رسته باشند. یک **تابعگون** از $\mathcal{A}$ به $\mathcal{B}$ که آن را با نماد $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ نشان می‌دهیم عبارتست از یک قانون که اشیاء $\mathcal{A}$ را به اشیاء $\mathcal{B}$ و مورفیسم‌های $\mathcal{A}$ را به مورفیسم‌های $\mathcal{B}$ می‌برد به طوری که:

(۱) $F(id_A) = id_{FA}$

(۲) برای هر دو مورفیسم f و g در $\mathcal{A}$ که $g \circ f$ معنی داشته باشد $F(g\circ f) = (Fg)\circ(Ff)$.

اگر به جای ویژگی (۲) داشته باشیم $F(g\circ f) = (Ff)\circ(Fg)$ آنگاه می‌گوییم F یک **تابعگون پادورد** است.

۷.۱.۱ تعریف

۱) فرض کنیم $\mathcal{C}$ یک رسته و I نیز یک رسته کوچک (اشیاء و مورفیسم‌های آن مجموعه هستند) باشد. منظور از یک **دیاگرام** با اندیس I، عبارت است از یک تابعگون چون $D : I \to \mathcal{C}$. در این صورت دیاگرام را با نماد $\{d^t_{ij}\}_t$ نیز نشان می‌دهیم که $d^t_{ij} : D_i \to D_j$ نگاره مورفیسم $i \xrightarrow{t_{ij}} j$ است.

۲) فرض کنیم $\mathcal{D}$ یک دیاگرام در $\mathcal{C}$ باشد. منظور از یک **پایانهٔ خروجی** D یک خانواده از مورفیسم‌ها چون $\{A \xrightarrow{t_i} D_i\}_{i\in I}$ است به طوری که برای هر $t_{ij} : i \longrightarrow j$ داشته باشیم:

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f_i} & D_i & & i \\ f_j \searrow & & \swarrow d^t_{ij} & & \swarrow t_{ij} \\ & D_j & & j & \end{array}$$

جابجا شود یعنی: $d^t_{ij} \circ f_i = f_j$.

۳) منظور از «حد» یک دیاگرام چون D که با $\varinjlim D$ نشان داده می‌شود عبارتست از پایانهٔ خروجی چون $\{P \xrightarrow{\pi_i} D_i\}_{i\in I}$، با خاصیت جهانی زیر:

برای هر پایانهٔ خروجی دیگر چون $\{A \xrightarrow{f_i} D_i\}_{i\in I}$، یک مورفیسم یکتا چون $\overline{f} : A \to P$ موجود باشد به طوری که برای هر $i \in I$: $\pi_i \circ \overline{f} = f_i$.

۴) به همین ترتیب «همحد» نیز به عنوان دوگان حد تعریف می‌شود و با نماد $co\varinjlim \mathcal{D}$ نمایش می‌دهیم.

۸.۱.۱ تعریف

۱) فرض کنیم $\mathcal{A}$ و $\mathcal{B}$ دو رسته و $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$، تابعگون باشند. منظور از یک **تبدیل طبیعی** از تابعگون F به تابعگون G، دنباله‌ای چون $\eta = \{\eta_A\}_{A\in\mathcal{A}}$ از مورفیسم‌های $\mathcal{B}$ است به طوری که برای هر A، $\eta_A : FA \to GA$ و برای هر مورفیسم $f : A \to B$ در رسته $\mathcal{A}$، نمودار زیر جابجا شود:

$$\begin{array}{ccc} FA & \xrightarrow{\eta_A} & GA \\ Ff \downarrow & & \downarrow Gf \\ FB & \xrightarrow{\eta_B} & GB \end{array}$$

η را یک **یکریختی طبیعی** گوییم هر گاه η_A برای هر A، یکریختی باشد. در این صورت می‌گوییم F و G یکریختند و می‌نویسیم $F \approx G$.

۲) فرض کنیم $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ تابعگون باشد. می‌گوییم F **یکریختی** است هر گاه تابعگونی چون $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ موجود باشد به طوری که $F \circ G = id_{\mathcal{B}}$ و $G \circ F = id_{\mathcal{A}}$.

۳) فرض کنیم $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ تابعگون باشد. می‌گوییم F، هم‌ارزی بین دو رسته است هر گاه $G:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ وجود داشته باشد به طوری که

$$F\circ G\approx id_{\mathcal{B}} \quad , \quad G\circ F\approx id_{\mathcal{A}}$$

۹.۱.۱ تعریف

۱) فرض کنیم $F:\mathcal{A}\to\mathcal{B}$ و $G:\mathcal{B}\to\mathcal{A}$ دو تابعگون باشند، می‌گوییم G **الحاقی چپ** F است و می‌نویسیم $G\dashv F$، هر گاه برای هر $A\in\mathcal{A}$ و $B\in\mathcal{B}$، یک تابع دوسویی چون

$$\theta_{A,B}:hom_{\mathcal{A}}(GB,A)\xrightarrow{\sim}hom_{\mathcal{B}}(B,FA)$$

موجود باشد به طوری که برای هر $B'\xrightarrow{g}B$ و $A\xrightarrow{f}A'$، به ترتیب در $\mathcal{B}$ و $\mathcal{A}$، نمودار زیر جابجا شود:

$$\begin{array}{ccccccc}
GB\xrightarrow{\alpha}A & & hom_{\mathcal{A}}(GB,A) & \xrightarrow{\theta_{A,B}} & hom_{\mathcal{B}}(B,FA) & & B\xrightarrow{\beta}FA \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
GB'\xrightarrow{f\circ\alpha\circ Gg}A' & & hom_{\mathcal{A}}(GB',A') & \xrightarrow{\theta_{A',B'}} & hom_{\mathcal{B}}(B',FA') & & B'\xrightarrow{Ff\circ\beta\circ g}FA'
\end{array}$$

یعنی $Ff\circ\theta_{A,B}(\alpha)\circ g=\theta_{A',B'}(f\circ\alpha\circ Gg)$.

۱۰.۱.۱ تعریف

۱) فرض کنیم $\mathcal{A}$ یک رسته باشد. $\mathcal{B}$ را یک **زیررستهٔ** $\mathcal{A}$ می‌گوییم هر گاه اشیاء و مورفیسم‌های $\mathcal{B}$ همگی در $\mathcal{A}$ باشند و عمل ترکیب آن نیز تحدید عمل ترکیب $\mathcal{A}$ باشد و همانی‌های آن نیز با همانی $\mathcal{A}$ یکی باشد.

۲) زیررسته $\mathcal{B}$ از $\mathcal{A}$ را **انعکاسی** گوییم هرگاه تابعگون شمول $i : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ الحاق چپی چون $R : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ داشته باشد. در این صورت به R، **فانکتور انعکاس‌گر** $\mathcal{B}$ در $\mathcal{A}$ می‌گوییم.

۱۱.۱.۱ قضیه فرض کنیم $\mathcal{B}$ یک زیررستهٔ $\mathcal{A}$ باشد. در این صورت، احکام زیر معادلند:

i) $\mathcal{B}$ زیررستهٔ انعکاسی $\mathcal{A}$ است و دارای انعکاس‌گر R است.

ii) برای هر شئ A در $\mathcal{A}$، شیئی چون $R(A)$ و مورفیسمی چون $r_A : A \to R(A)$ در $\mathcal{B}$ وجود دارد به طوری که برای هر مورفیسم چون $f : A \to B$ در $\mathcal{B}$، یک مورفیسم منحصر به فرد چون $\overline{f}$ از $R(A)$ به B موجود باشد به طوری که دیاگرام زیر جابجا می‌شود:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{r_A} & R(A) \\ f \searrow & & \swarrow \overline{f} \\ & B & \end{array}$$

۱۲.۱.۱ قضیه

۱) الحاقی چپ «همحد را حفظ می‌کند» یعنی همحد یک دیاگرام را به همحد نگارهٔ آن دیاگرام می‌برد و الحاقی راست «حد را حفظ می‌کند».

۲) تابعگون انعکاس‌گر، «همحد را حفظ می‌کند».

۳) تابعگون انعکاس‌گر، همضرب را حفظ می‌کند (همضرب نوع خاصی از همحد است).

۲.۱ جبر جامع

برای جزئیات بیشتر این بخش به [۱۲] رجوع کنید.

۱.۲.۱ تعریف

۱) فرض کنیم A یک مجموعه باشد. هر تابع به صورت $A^n \xrightarrow{f} A$ را یک **عمل** n **تایی** روی A گوییم، که در آن $n \geq ۰$ و $A^۰$ مجموعهٔ تک عضوی است.

۲) یک «**زبان جبرها**» مجموعه‌ای چون τ همراه با دنباله‌ای از مجموعهٔ $\mathbb{N} \cup \{۰\}$ چون $\{n_\lambda | \lambda \in \tau\}$ است. هر گاه $\lambda \in \tau$ و $n_\lambda = n$، گفته می‌شود که λ یک **علامت** nـ تایی است و یا می‌نویسیم $\lambda \in \tau_n$.

۳) یک **جبر (جامع)** از نوع τ عبارتست از دستگاهی چون $(A, (\lambda_A)_{\lambda \in \tau})$، که در آن A مجموعه است و برای هر $\lambda \in \tau$، λ_A یک عمل n_λ تایی روی A است.

۲.۲.۱ مثال

۱) یک گروه، جبری چون $< G, ()^{-۱}, ۱ >$ است، که در آن $\tau = \{., ()^{-۱}, ۱\}$ و دنبالهٔ متناظر با آن عبارتست از $(۲, ۱, ۰)$. به علاوه، در معادلات زیر صدق می‌کند.

$$G_۱ : (x.y).z = x.(y.z)$$

$$G_۲ : x.۱ = ۱.x = x$$

$$G_۳ : xx^{-۱} = x^{-۱}.x = ۱$$

۲) یک مشبکه، جبری چون $< L, \vee, \wedge >$ است، که در آن $\tau = \{\vee, \wedge\}$ و دنبالهٔ متناظر با آن عبارتست از $(۲, ۲)$، این جبر در معادلات $L_۱$ تا $L_۴$ تعریف ۱.۳.۰

صدق می‌کند.

۳.۲.۱ تعریف فرض کنیم A و B دو جبر از نوع τ باشند. تابع $f : A \to B$ را **همریختی** می‌گوییم، هرگاه برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $\lambda \in \tau_n$ و $a_۱, \cdots, a_n \in A$،

$$f(\lambda_A(a_۱, \cdots, a_n)) = \lambda_B(f(a_۱), \cdots, f(a_n))$$

f را **بروریختی** گوییم هرگاه f پوشا باشد آن را **تکریختی** گوییم هرگاه f یک به یک باشد. همریختی f را **یکریختی** گوییم هرگاه دوسویی باشد.

۴.۲.۱ تعریف فرض کنیم A یک جبر از نوع τ و θ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A باشد. θ را **همنهشتی** گوییم هرگاه

برای هر $n \in \mathbb{N}$ و $\lambda \in \tau_n$ و $b_۱, \cdots, b_n, a_۱, \cdots, a_n \in A$، که $a_i \theta b_i$، داشته باشیم:

$$\lambda_A(a_۱, \cdots, a_n)\theta\lambda_A(b_۱, \cdots, b_n)$$

اگر θ یک همنهشتی باشد، برای هر $\lambda \in \tau_n$ $(n \geq ۰)$، عمل $\lambda_{A/\theta}$ را روی A/θ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\lambda_{A/\theta}(a_۱/\theta, \cdots, a_n/\theta) = \frac{\lambda_A(a_۱, \cdots, a_n)}{\theta}$$

از آنجا که θ یک همنهشتی است، عمل فوق خوشتعریف است.

۵.۲.۱ قضیه اگر A یک جبر از نوع τ و θ یک رابطهٔ هم‌ارزی روی A باشد و $\gamma : A \to A/\theta$ تابع طبیعی تصویر باشد، آنگاه احکام زیر معادلند:

۱) θ یک رابطهٔ همنهشتی روی A است.

۲) γ یک همریختی است.

اثبات: (۲) $\Rightarrow$ (۱) فرض کنیم $\lambda \in \tau_n$ و $a_1, \cdots, a_n \in A$ در این صورت

$$\gamma\left(\lambda_A(a_1, \cdots, a_n)\right) = \frac{\lambda_A(a_1, \cdots, a_n)}{\theta} = \lambda_{A/\theta}(a_1/\theta, \cdots, a_n/\theta) = \lambda_{A/\theta}(\gamma(a_1), \cdots \gamma(a_n))$$

پس γ همریختی است.

(۱) $\Rightarrow$ (۲) فرض کنیم $b_1, \cdots, b_n, a_1, \cdots, a_n \in A, \lambda \in \tau_n$ و $a_i \theta b_i$. در این صورت $a_i/\theta = b_i/\theta$، پس

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_A(a_1, \cdots, a_n)}{\theta} &= \gamma\left(\lambda_A(a_1, \cdots, a_n)\right) = \lambda_{A/\theta}(\gamma(a_1), \cdots \gamma(a_n)) \\ &= \lambda_{A/\theta}(\gamma(b_1), \cdots, \gamma(b_n)) = \gamma(\lambda_A(b_1, \cdots, b_n)) \\ &= \frac{\lambda_A(b_1, \cdots, b_n)}{\theta} \end{aligned}$$

پس θ همنهشتی است. $\square$

۶.۲.۱ قضیه فرض کنیم A و B جبر از نوع τ باشند و $f: A \rightarrow B$ یک همریختی باشد. در این صورت هستهٔ f، با تعریف $Ker f = \{(a, b) | f(a) = f(b)\}$ یک همنهشتی روی A است.

اثبات: فرض کنیم $(a_1, b_1), \cdots, (a_n, b_n) \in Ker f$ و $\lambda \in \tau_n$. در این صورت

$$f(\lambda(a_1, \cdots, a_n)) = \lambda(f(a_1), \cdots, f(a_n)) = \lambda(f(b_1), \cdots, f(b_n)) = f(\lambda(b_1, \cdots, b_n))$$

پس $\lambda(a_1, \cdots, a_n)(Ker f)\lambda(b_1, \cdots, b_n)$. یعنی $Ker f$ یک همنهشتی است.$\square$

۷.۲.۱ قضیه (قضیه‌های یکریختی)

۱) (قضیهٔ تجزیه) فرض کنیم $\alpha: A \rightarrow B$ و $\beta: A \rightarrow C$ همریختی‌هایی بین جبرهای از نوع τ باشند و $Ker\beta \subseteq Ker\alpha$. در این صورت، یک همریختی منحصر به فرد چون $v: C \rightarrow B$ وجود دارد به طوری که $v \circ \beta = \alpha$.

۲) (قضیهٔ اول یکریختی) فرض کنیم $f : A \to B$ یک بروریختی از جبرها باشد. در این صورت یکریختی یکتایی چون $\overline{f} : A/Kerf \to B$ وجود دارد به طوری که $\overline{f}(\overline{a}) = f(a)$.

۳) (قضیهٔ دوم یکریختی) فرض کنیم A یک جبر و $\psi \subseteq \theta$ رابطه‌هایی همنهشتی روی A باشند. در این صورت، $\theta/\psi = \{(a/\psi, b/\psi) | a\theta b\}$ یک همنهشتی روی A/ψ است و داریم $\frac{A/\psi}{\theta/\psi} \simeq \frac{A}{\theta}$.

اثبات:

(۱) تعریف می‌کنیم $v(c) = \gamma(a)$ که در آن $c = \beta(a)$. در این صورت v خوشتعریف و همریختی است. به علاوه، تنها تابعی است که $v \circ \beta = \alpha$.

(۲) با قرار دادن $\alpha = f$ و $\beta = \gamma$، و به کار بردن قسمت (۱)، v یکتا یافت می‌شود که $v \circ \beta = \alpha$. قرار می‌دهیم $\overline{f} = v$.

(۳) $f : A/\psi \to A/\theta$ را با ضابطهٔ $f(a/\psi) = a/\theta$ تعریف می‌کنیم. به راحتی ثابت می‌شود $Kerf = \theta/\psi$ پس f یک همریختی پوشاست. پس با توجه به (۲) یکریختی یکتا چون $\overline{f} : \frac{A/\psi}{\theta/\psi} \to A/\theta$ هست که برای هر $a \in A$، $\overline{f}(a/\psi) = a/\theta$ و حکم ثابت است. □

۸.۲.۱ قضیه فرض کنیم A یک جبر از نوع τ و $Con(A)$ مجموعهٔ تمام همنهشتی‌های روی A باشد. آنگاه $(Con(A), \subseteq)$ یک مشبکه کامل است، که در آن $\bigwedge\limits_{i \in I} = \bigcap \theta_i$ و

$$\bigvee_{i \in I} \theta_i = \{(a,b) \in A^۲ | \exists x_۰, \cdots, x_n \in A, \exists i_k \in I : x_۰ = a, x_n = b, x_k \theta_{i_k} x_{k+۱}\}$$

اثبات: کافی است ثابت کنیم

$$\theta = \{(a,b) | \exists x_۰, \cdots, x_n \in A : x_۰ = a, x_n = b, x_k \theta_{i_k} x_{k+۱} : i_k \in I\}$$

همنهشتی است.

فرض کنیم $\lambda \in \tau_n$ و $(a_1, b_1), \cdots, (a_n, b_n) \in \theta$. می‌توان فرض کرد $m \in \mathbb{N}$ و $x_{ij} \in A$، $1 \leq i \leq n$ و $1 \leq j \leq m$ وجود دارد به طوری که $x_{i0} = a_i$ و $x_{im} = b_i$ و $x_{ij} \theta x_{i(j+1)}$. بنابراین برای هر j، $\lambda(x_{1j}, \cdots, x_{nj}) \theta \lambda(x_{ij+1}, \cdots, x_{nj+1})$. پس $\lambda(a_1, \cdots, a_n) = \lambda(x_{i0}, \cdots, x_{i0}) \theta \lambda(x_{im}, \cdots, x_{im}) = \lambda(b_1, \cdots, b_n)$ و حکم ثابت است. □

۹.۲.۱ تعریف فرض کنیم X یک مجموعه باشد که مجموعه متغیرها گفته می‌شود و τ زبان جبرها باشد. $T(X)$ را مجموعه جمله‌های (یا ترم‌های) از نوع τ روی X می‌گوییم و به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

(۱) $X \cup \tau_0 \subseteq T(X)$.

(۲) هر گاه $p_1, \cdots, p_n \in T(X)$ و $\lambda \in \tau_n$ $(n \geq 0)$، آنگاه $\lambda(p_1, \cdots, p_n) \in T(X)$.
واضح است که $T(X)$ را می‌توان به عنوان یک جبر از نوع τ در نظر گرفت که اعمال آن در (ii) تعریف شده است. برای هر عضو چون $p \in T(X)$ می‌نویسیم $p = p(x_1, \cdots, x_n)$، هر گاه حداکثر متغیر به کار رفته شده در جمله‌های آن $(x_1, \cdots, x_n)$ باشد.

۱۰.۲.۱ تعریف فرض کنیم $T(X)$ مجموعه جمله‌های از نوع τ روی X باشد. هر عضو $T(X) \times T(X)$ را یک **معادله** می‌نامیم. معادلهٔ $< p, q >$ را با نماد $p \approx q$ یا $p = q$ نشان می‌دهیم.

۱۱.۲.۱ تعریف فرض کنیم $p(x_1, \cdots, x_n)$ یک جمله از نوع τ روی X و A یک جبر از نوع τ باشد. تابع $p^A : A^n \rightarrow A$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم

(۱) اگر p یک متغیر چون x_i باشد آنگاه

$$\forall a_1, \cdots, a_n \in A \qquad p^A(a_1, \cdots, a_n) = a_i$$

یعنی در این حالت p^A تابع تصویر مؤلفهٔ i ام است.

(۲) اگر p به صورت $\lambda(p_1(x_1,\cdots,x_n),\cdots,p_k(x_1,\cdots,x_n))$ باشد، که $\lambda\in\tau_k$، در این صورت

$$p^A(a_1,\cdots,a_n)=\lambda^A(p_1^A(a_1,\cdots,a_n),\cdots,p_k^A(a_1,\cdots,a_n))$$

فرض کنیم A یک جبر از نوع τ باشد. گوییم A در معادلهٔ $p\approx q$ صدق می‌کند هر گاه برای هر $a_1,\cdots,a_n\in A$، $p^A(a_1,\cdots,a_n)=q^A(a_1,\cdots,a_n)$ برقرار باشد.

۳.۱ ساختارهای جبری مرتب

برای جزئیات بیشتر این بخش به [۱۰] رجوع کنید.

۱.۳.۱ l–گروههای آبلی اگر G، l–گروه آبلی باشد و $a,b\in G$، تعریف می‌کنیم :

$$a^+=a\vee 0, a^-=(-a)\vee 0, |a|=a\vee(-a)$$

در این صورت داریم

$$a=a^+-a^-, |a|=a^++a^-, a^+\wedge a^-=0, |a+b|\le|a|+|b|$$

۲.۳.۱ قضیه فرض کنیم G یک l–گروه آبلی باشد، روابط زیر برقرار است

۱) $(a\vee b)=(a-b)^++b$

۲) $2(a\vee b)=|a-b|+a+b$

۳) برای هر $n\in Z$، داریم $|na|=|n||a|$

۴) G دارای هیچ عضو مرتبهٔ متناهی نیست.

۵) اگر $0 \leq x \leq y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ که $y_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n)$ آنگاه $x_i \in G$ موجود است به طوری که $0 \leq x_i \leq y_i$ و $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

اثبات: (به کتاب Birkhoff [۱۰] مراجعه کنید.)

۴.۳.۱ فضای ریس منظور از یک فضای ریس، فضای برداری E روی میدان اعداد گویاست، همراه با یک ترتیب جزئی $\leq$ که برای هر $a, b, c \in E$ و $r \in Q^+$ که $a \leq b$ داشته باشیم $a + c \leq b + c$ و $ra \leq rb$ و $(E, \leq)$ یک لاتیس باشد.

اگر E یک فضای ریس باشد و $a, b \in E$ و $r \in Q$ تعریف می‌کنیم :

$$a^+ = a \vee 0, a^- = (-a) \vee 0, |a| = a \vee (-a)$$

در این صورت داریم

$$a = a^+ - a^-, |a| = a^+ + a^-, a^+ \wedge a^- = 0, |a + b| \leq |a| + |b|$$

و همینطور $|ra| = |r||a|$. [۱۳]

۵.۳.۱ قضیه (خاصیت تجزیهٔ ف. ریس) اگر E یک فضای ریس باشد و $0 \leq x \leq y_1 + y_2 + \cdots + y_n$ که $y_i \geq 0$ $(1 \leq i \leq n)$ آنگاه $x_i \in E$ موجود است به طوری که $0 \leq x_i \leq y_i$ و $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$.

اثبات:([۱۳] صفحه ۳)

۶.۳.۱ تعریف یک زیرفضای برداری I، از فضای ریس E را ایدآل گوییم هر گاه $|a| \leq |b|$ و $b \in I$، $a \in I$ را نتیجه دهد.

یک ایدآل I از فضای ریس E را باند می‌گوییم هر گاه برای هر $S \subseteq I$ که $supS$ موجود باشد، $supS \in I$.

فرض کنیم $a, b \in E$، می‌نویسیم $a \perp b$ هر گاه $|a| \wedge |b| = 0$. فرض کنیم $A \subseteq E$، مجموعهٔ $\{C \in E | x \perp a, \forall a \in A\}$ را با نماد $A^\perp$ نشان می‌دهیم.

۷.۳.۱ قضیه فرض کنید E یک فضای ریس کامل باشد، $A \subseteq E$، و $B(A)$، باند تولید شده توسط A (اشتراک تما باندهای شامل A). در این صورت $E = A^{\perp} \oplus B(A)$ و $A^{\perp\perp} = B(A)$.

۴.۱ توپولوژی بدون نقطه

در این فصل بعضی از تعاریف و نتایج را در مورد فریم ها مرور می کنیم، خواننده می تواند برای اطلاعات بیشتر به مراجع [۱] و [۹] مراجعه کند.

۱.۴.۱ یک مشبکه کامل L را یک فریم می گوییم هر گاه برای هر $S \subseteq L$ و $x \in L$ داشته باشیم

$$x \wedge \bigvee S = \bigvee \{x \wedge s : s \in S\}$$

فرض کنیم L و M فریم باشند. $h : L \to M$ را همریختی فریمی می گوییم هر گاه الحاق دلخواه و میت متناهی را حفظ کند. رسته تمام فریم ها همراه با همریختی های فریمی را با **Frm** نشان می دهیم.

موارد زیر را به عنوان مثالهای فریم می توان نام برد:

مشبکه های متناهی و توزیع پذیر، زنجیرهای کامل، جبرهای بول کامل، و مشبکهٔ $O(X)$ متشکل از تمام مجموعه های باز یک فضای توپولوژی X.

۲.۴.۱ عضو $a \in L$ را **فشرده** می گوییم هرگاه اگر $a = \bigvee S$ آنگاه زیر مجموعه متناهی از S چون T موجود باشد به طوری که $a = \bigvee T$.

فریم L را **فشرده** می گوییم هرگاه بزرگترین عضو آن یعنی e فشرده باشد؛ **جبری** می گوییم هرگاه هر عضو آن به صورت الحاق عضوهای فشرده نوشته شود.

۳.۴.۱ فریم L را **جبری** می گوییم هرگاه هر عضو L را بتوان به صورت الحاقی از عضوهای فشرده L نوشت.

فریم L را **کوهرنت** می گوییم هرگاه فشرده، جبری وبرای هر دو عضو فشرده $a, b \in L$، $a \wedge b$ نیز فشرده باشد.

۴.۴.۱ فریم L را **نرمال** می گوییم هرگاه برای هر $a,b\in L$ که $a\vee b=e$، $u,v\in L$ وجود داشته باشند به طوری که $a\vee u=e=b\vee v$ و $u\wedge v=\circ$. L را **به طور کوهرنت نرمال** می گوییم هرگاه کوهرنت باشد و برای هر عضو فشرده c، فریم $c\downarrow$ نرمال باشد.

۵.۴.۱ فرض کنیم L یک فریم باشد. می گوییم a **کاملاً زیر** b است، و می نویسیم $a\prec\prec b$، هرگاه دنباله‌ای چون (c_{nk}) $k=\circ,۱,\cdots,۲^n$ وجود داشته باشد به طوری که

$$c_{\circ\circ}=a,\ c_{\circ ۱}=b,\ c_{nk}=c_{n+۱,۲k},\ c_{nk}\prec c_{n,k+۱}$$

همچنین برای هر $a,b\in L$، اگر $a\prec\prec b$ آنگاه $a\prec b$ و اگر $a\prec b$ آنگاه $a\leq b$.

فریم L را **کاملاً منظم** می گوییم هرگاه برای هر عضو آن الحاق اعضای کاملاً زیر خود باشد.

۶.۴.۱ همریختی فریمی $h:M\to L$ را **چگال** می گوییم هرگاه اگر $h(x)=\circ$ آنگاه $x=\circ$، و **هم چگال** می گوییم هرگاه اگر $h(x)=e$ آنگاه $x=e$. اگر h پوشا باشد، آن را **خارج قسمت** می گوییم.

۷.۴.۱ نگاشت $n:L\to L$ را یک **هسته** می گوییم هر گاه در ویژگیهای زیر صدق کند $N_۱$) برای هر $x\in L$، $x\leq n(x)$؛ $N_۲$)اگر $x\leq y$ آنگاه $n(x)\leq n(y)$؛ $N_۳$) برای هر $x\in L$ داشته باشیم $n^۲(x)=n(x)$؛ $N_۴$) $n(x\wedge y)=n(x)\wedge n(y)$.

اگر n یک هسته روی L باشد آنگاه $Fix(n)=\{a\in L:n(a)=a\}$ و $n:L\to Fix(n)$ یک نگاشت خارج قسمت است.

هر فریم فشرده L دارای یک هسته ویژه است که آن را **هسته اشباع گر** می گوییم که در این طرح نقش اساسی دارد.

فرض کنیم L یک فریم فشرده باشد. و $x,a\in L$. x را a—**کوچک** می گوییم هرگاه $x\vee y=e$ آنگاه $a\vee y=e$. قرار می دهیم $s(a)=\bigvee\{x\in L|$ x،a—کوچک باشد$\}$.

ثابت می شود که :

۱) $s(s)$ بزرگترین عضو a—کوچک است و نگاشت $s:L\to L$ یک هسته تعریف می

کند.

۲) اگر قرار دهیم $SL = Fix(s)$ آنگاه $s : L \to SL$، تنها کوچکترین خارج قسمت هم چگال از L است.

۳) SL، زیر چسبان است و $s : L \to SL$ تنها خارج قسمت زیر چسبان و هم چگال است. همچنین SL فشرده است.

۴)برای هر فریم فشرده داریم $Max(L) = Max(SL) = \sum(SL)$. [۴]

فصل ۲

ℓ—مدولها و فضاهای ریس

در این فصل، ℓ—مدولها را در سه بخش مطالعه می‌کنیم. در بخش نخست f—مدولها، ℓ—مدولهای قوی، و سوپر f—مدولها را تعریف می کنیم، و رابطهٔ بین آنها را مطالعه می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که همگی کلاسهای معادله‌ای هستند. در بخش دوم ℓ—مدولهای کسرها را مورد مطالعه قرار می دهیم. اثبات می‌کنیم که مدول کسرها معادله‌های (f) را از مدول پایه به ارث می‌برد ولی معادله‌های (ℓ) را لزوماً به به ارث نمی برد، نمونهٔ رد کننده آن در تبصرهٔ ۴.۲.۲ ساخته شده است. در بخش سوم ساختارهای توپولوژیکی برای ℓ—مدولها و فضای ریس ارائه و مطالعه می‌شوند، که عبارتند از توئولوژی یکنواخت برای ℓ—مدولها و توپولوژی حد دنباله‌ای برای فضاهای ریس.

۱.۲ l—مدول ها

در این فصل فضاهای ریس و ℓ—مدولها را بررسی می‌کنیم. ابتدا l—مدول را تعریف می‌کنیم و سپس قضیه‌های مهم را در مورد آن مرور می‌کنیم.

۱.۱.۲ تعریف فرض کنیم A یک l—حلقه یکدار و جابجایی باشد. A—مدول M را یک l—مدول گوییم هرگاه M یک l—گروه جابجایی باشد و $A^+M^+ \subseteq M$. M را یک f—مدول گوییم هرگاه برای هر $a \in A^+$ داشته باشیم $a(m \wedge n) = am \wedge an$.

۲.۱.۲ قضیه ۱) فرض کنیم M یک l—مدول روی l—حلقه A باشد. در این صورت برای هر $a \in A$ و $m \in M$؛ $|am| \leq |a||m|$.

۲) M یک f—مدول است اگر وتنها اگر برای هر $a \in A^+$؛ $a(m \vee n) = am \vee an$.

۳) M یک f—مدول است اگر وتنها اگر برای هر $a \in A^+$؛ $|am| = a|m|$.

اثبات: (۱) ابتدا فرض کنیم $a \in A^+$. در این صورت $a(-m), am \leq a|m|$ لذا

$$|am| = (-am) \vee am \leq a|m| = |a||m|$$

حال فرض کنیم $a \in A$ دلخواه باشد. داریم

$$|am| = |(a^+ - a^-)m| \leq |a^+m| + |a^-m| \leq a^+|m| + a^-|m| = (a^+ + a^-)|m| = |a||m|$$

(۲) با توجه به رابطهٔ $-(m \vee n) = (-m) \wedge (-n)$ واضح است.

(۳) فرض کنیم M یک f—مدول باشد و $a \in A^+$،

$$a|m| = a(m \vee (-m)) = am \vee (-am) = |am|$$

باتوجه به (۲) M یک f—مدول است.

بلعکس فرض کنیم برای هر $a \in A^+$، رابطهٔ $|am| = a|m|$ بر قرار باشد. فرض کنیم $m, n \in M$ و $a \in A^+$. داریم

$$۲a(m \vee n) = a(|m - n| + m + n) = |am - an| + am + an = ۲(am) \vee (an)$$

چون M دارای هیچ عضو مرتبهٔ متناهی نیست، داریم $a(m \vee n) = (am) \vee (an)$ بنا بر این M یک f—مدول است.

۳.۱.۲ تعریف فرض کنیم M و N دوl—مدول باشند. A—همریختی $f: M \to N$ را l—همریختی گوییم هرگاه $f(m \wedge n) = f(m) \wedge f(n)$ و $f(m \vee n) = f(n) \vee f(n)$.

۴.۱.۲ تبصره اگر f یک l—همریختی باشد

$$f(|a|) = |f(a)|, f(a^+) = f(a)^+, f(a^-) = f(a)^-$$

۵.۱.۲ تذکر کلاس تمام f—مدولهای روی l—حلقه A، یک کلاس معادله ای از نوع $+, ., -, \vee, \wedge, \circ$ با معادله های زیر است.

۱) معادله های مدولها

۲) $(m \vee n) + p = (m + p) \vee (n + p)$

۳) $-(m \vee n) = (-m) \wedge (-n)$

۴) برای هر $a \in A^+$، $a(m \vee n) = (am) \vee (an)$

۶.۱.۲ تعریف زیرمدول I از l—مدول M را ایدآل گوییم هرگاه $|b| \leq |a|$ و $b \in I$، $a \in I$ را نتیجه دهد.

فرض کنیم M یک l—مدول باشد، مجموعهٔ تمام ایدآلهای M را با $\mathcal{L}(M)$ نمایش می‌دهیم. $\mathcal{L}(M)$ را طیف اولیهٔ M می‌نامیم.

۲.۲ l—مدول کسرها

در این بخش به تعریف و بررسی l—مدول کسرها می پردازیم.

۱.۲.۲ تعریف فرض کنیم A یک حلقه مرتب باشد و $S \subseteq A^+$ یک مجموعه ضربی($1 \in S$ و نسبت به ضرب بسته) باشد که $0 \notin S$. در این صورت ترتیب جزئی $\leq$، روی $S^{-1}A$ رابه صورت زیر تعریف می‌کنیم:
برای هر $a, b \in A$ و $s \in S$، می‌گوییم $a/s \leq b/t$؛ هرگاه $w \in S$ موجود باشد به طوری که $w(sb - at) \geq 0$.

۲.۲.۲ قضیه فرض کنیم A یک حلقه‌مرتب است و $S \subseteq A^+$ در این صورت
۱) $S^{-1}A$ یک حلقه مرتب است.
۲) تابع $i : A \to S^{-1}A$ با ضابطه $i(x) = x/1$ یک همریختی حلقه‌های مرتب است.
۳) اگر A یک f—مدول باشد آنگاه $S^{-1}A$ یک f—مدول است.
۴) اگر A یک f—مدول باشد انگاه i یک l—همریختی است.

اثبات: (۱) ابتدا ثابت می‌کنیم که رابطهٔ leq یک ترتیب جزئی خوشتعریف روی $S^{-1}A$ است. واضح است که $\leq$ خاصیت انعکاسی را داراست. برای خاصیت پادتقارنی فرض کنیم $a/s \leq b/t$ و $a/s \geq b/t$ در این صورت، $w, w' \in S$ وجود دارد به طوری که $w(bs - at) \geq 0$ و $w'(at - bs) \geq 0$. در نتیجه $ww'(ta - sb) = 0$ لذا $a/s = b/t$. که این خاصیت پادتقارنی را ثابت می‌کند.

حال برای اثبات خاصیت تراگذری، فرض کنیم $a/s \leq b/t$ و $b/t \leq c/k$ در این صورت، $w, w' \in S$ وجود دارد به طوری که $w(bs - at) \geq 0$ و $w'(tc - bk) \geq 0$. بنابر این

$$ww't(sc - ka) = ww'(stc - skb) + ww'(skb - tka) \geq 0$$

یعنی $c/k \leq a/s$. که این خاصیت تراگذری را ثابت می‌کند.

حال برای اثبات حلقه مرتب بودن A، فرض کنیم $a/s \leq b/t$ و $c/k \in S^{-1}A$. در این صورت

$$\begin{aligned}
w(at-sb)\leq 0 \quad &\Rightarrow \quad wk^{2}(at-sb+stc-stc\leq 0\\
&\Rightarrow \quad w(ak^{2}t+stkc-k^{2}sb-sktc)\leq 0\\
&\Rightarrow \quad w(tk(ak+sc)-sk(bk+tc))\leq 0\\
&\Rightarrow \quad (ak+sc)/sk\leq (bk+tc)/tk\\
&\Rightarrow \quad a/s+c/k\leq b/t+c/k
\end{aligned}$$

حال فرض کنیم $a/s\geq 0$ و $b/t\geq 0$، لذا $w,w'\in S$ وجود دارند به طوری که

$$\begin{aligned}
wb\geq 0, w'a\geq 0 \quad &\Rightarrow \quad ww'ab\geq 0\\
&\Rightarrow \quad (ab)/(st)\geq 0\\
&\Rightarrow \quad (a/s)(b/t)\geq 0
\end{aligned}$$

لذا A یک حلقه مرتب است.

(۲) کافیست ثابت کنیم اگر $x\leq y$ آنگاه $x/1\leq y/1$، که واضح است.

(۳) ابتدا ثابت می‌کنیم که $S^{-1}A$ یک l—حلقه است. فرض کنیم $a/s, b/t\in S^{-1}A$. ادعا می‌کنیم

$$a/s\wedge b/t=(ta\wedge sb)/(st), \quad a/s\vee b/t=(ta\vee sb)/(st)$$

ابتدا توجه می‌کنیم که $b/t, a/s\leq (ta\vee sb)/(st)$، زیرا

$$t(ta\vee sb)-stb=t^{2}a\vee tsb-tsb\geq 0$$

$$s(ta \vee sb) - sta = t^{2}b \vee tsa - tsa \geq 0$$

حال فرض کنیم که $a/s, b/t \leq c/k$. در این صورت $w_1, w_2 \in S$ وجود دارند به طوری که

$$w_1(sc - ka) \geq 0, w_2(tc - kb) \geq 0$$

در نتیجه

$$w_1 w_2 stc \geq w_1 w_2 tka, w_1 w_2 stc \geq w_1 w_2 skb$$

لذا

$$\begin{aligned} w_1 w_2 stc &\geq w_1 w_2 ska \vee w_1 w_2 skb \\ &= w_1 w_2 (ta \vee sb) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$w_1 w_2 (stc - k(ta \vee sb)) \geq 0 \Rightarrow c/k \geq (ta \vee sb)/st$$

و بنابراین $a/s \vee b/t = (ta \vee sb)/st$.

برای اثبات $a/s \wedge b/t = (ta \wedge sb)/st$ ابتدا توجه می‌کنیم که $b/t, a/s \geq (ta \wedge sb)/(st)$، زیرا

$$t(ta \wedge sb) - stb = t^{2}a \wedge tsb - tsb \leq 0$$

$$s(ta \wedge sb) - sta = t^{2}b \wedge tsa - tsa \leq 0$$

حال فرض کنیم که $a/s, b/t \geq c/k$. در این صورت $w_1, w_2 \in S$ وجود دارند به طوری که

$$w_1(sc - ka) \leq 0, w_2(tc - kb) \leq 0$$

در نتیجه

$$w_1w_2stc \leq w_1w_2tka, w_1w_2stc \leq w_1w_2skb$$

لذا

$$\begin{aligned} w_1w_2stc &\leq w_1w_2ska \wedge w_1w_2skb \\ &= w_1w_2(ta \wedge sb) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$w_1w_2(stc - k(ta \wedge sb)) \leq 0 \Rightarrow c/k \leq (ta \wedge sb)/st$$

و بنابراین $a/s \wedge b/t = (ta \wedge sb)/st$.

حال شرط f—حلقه بودن، $s^{-1}A$ را بررسی می‌کنیم:
فرض کنیم $c/k \geq 0$، در این صورت wای هست که $wc \geq 0$. بنابراین داریم

$$\begin{aligned}(wc)/(kw)(a/s\vee b/t)) &= (wc)/(wk)((ta\vee sb)/(st))\\ &= (wtca\vee wscb)/(wkst)\\ &= w(tca\vee scb)/(wkst)\\ &= (tca\vee scb)/(ksb)\\ &= (ca/ks)\vee(cb/kt)\\ &= (ktca\vee kscb)/(k^{۲}st)\\ &= (tca\vee scb)/(kst)\end{aligned}$$

بنابراین

$$c/k(a/s\vee b/t)=(ca)/ks\vee(cb/kt)$$

(۴) بنا به فرمول $\vee$ و $\wedge$ در (۳) داریم،

$$x/۱\vee y/۱=(x\vee y)/۱,\quad x/۱\wedge y/۱=(x\wedge y)/۱$$

بنابراین i، $\vee$ و $\wedge$ را حفظ می‌کند.

۳.۲.۲ تبصره اگر A یک f−حلقه باشد آنگاه با توجه به فرمول $\vee$ و $\wedge$ داریم $a/s\vee b/s=(a\vee b)/s$ و $a/s\wedge b/s=(a\wedge b)/s$. و همینطور داریم

$$|a/s|=(a/s)\vee(-a/s)=(a\vee(-a))/s=|a/s|$$

$$(a/s)^+ = (a/s) \vee (۰/۱) = (a \vee (۰))/s = a^+/s$$

$$(a/s)^- = (-a/s) \wedge (۰/۱) = ((-a) \wedge ۰)/s = a^-/s$$

۴.۲.۲ قضیه فرض کنیم A یک f—حلقه باشد و S یک زیرمجموعهٔ ضربی در A باشد که برای هر $s \in S$ داشته باشیم $s \geq ۱$. در این صورت $S^{-۱}A$ یک f—حلقه‌ایست که $\mathcal{L}(A) \cong \mathcal{L}(S^{-۱}A)$.

اثبات: دو تابع $\phi : \mathcal{L}(A) \to \mathcal{L}(S^{-۱}A)$ با ضابطهٔ $\phi(J) = S^{-۱}J = \{a/s | a \in J, s \in S\}$ و $\psi : \mathcal{L}(S^{-۱}A) \to \mathcal{L}(A)$ باضابطهٔ $\psi(I) = I \cap A$ را در نظر می‌گیریم. ابتدا دقت می‌کنیم که $S^{-۱}J$ و $I \cap A$ به ترتیب l—ایده‌آلهای $S^{-۱}A$ و A می باشند، زیرا

$$\begin{aligned}
&|x| \leq |y|, \quad y \in I \cap A \\
&\qquad \Rightarrow \quad |x/۱| = |x|/۱ \leq |y|/۱ = |y/۱|, \quad y/۱ \in I \\
&\qquad \Rightarrow \quad x/۱ \in I \\
&\qquad \Rightarrow \quad x \in I \cap A
\end{aligned}$$

که این ثابت می‌کند $I \cap A$، l—ایده‌آل A است. و

$$\begin{aligned}
&|x/s| \leq |y/t|, \quad y \in S^{-۱}J, y \in J \\
&\qquad \Rightarrow \quad w(s|y| - t|x|) \geq ۰
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \quad ws|y| \geq wt|x|) = |wtx| \\ &\Rightarrow \quad wtx \in J \\ &\Rightarrow \quad x/s = wtx/wts \in S^{-1}J \end{aligned}$$

که این نیز ثابت می‌کند $S^{-1}J$، l—ایده‌آل $S^{-1}A$ است.

در ادامه توجه کنید که ϕ و ψ رابطهٔ شمول $\subseteq$ را حفظ می‌کنند. و تابع معکوس هم دیگر هستند زیرا:

$$S^{-1}J \cap A = J, \qquad S^{-1}(I \cap A) = I$$

برای اثبات دو رابطهٔ فوق توجه می‌کنیم که $S^{-1}(I \cap A) \subseteq I$ $\quad$ $J \subseteq S^{-1}J \cap A,$ واضح هستند. اکنون فرض کنیم $x \in S^{-1}J \cap A$ در این صورت $a \in J$ و $s \in S$ وجود دارند به طوری که $a/s = x$. چون $s \geq ۱$، پس $|a/s| = |a|/s \leq |a|$، بنابراین چون J، l—ایده‌آل است، $a/s \in J$. در نتیجه $x \in J$. یعنی $S^{-1}J \cap A = J$ برقرار است.

برای اثبات رابطهٔ دیگر، فرض کنیم $a/s \in I$ که $a \in A, s \in S$. بنابراین

$$a = sa/s \in I \Rightarrow a \in I \cap A \Rightarrow a/s \in S^{-1}(I \cap A)$$

بنابراین $S^{-1}(I \cap A) = I$.

در نتیجه ϕ و ψ همریختی‌های فریمی بوده و $\mathcal{L}(A) \cong \mathcal{L}(S^{-1}A)$.

۵.۲.۲ تبصره اگر S را بزرگترین حالت ممکن بگیریم، یعنی قراردهیم $S = \{s \in A | s \geq\}$. در این صورت $S^{-1}A$ کوچکترین f—حلقه‌ای قویست که شامل A است. که در قضیهٔ بعد نشان داده می‌شود. در این حالت $S^{-1}A$ را با نماد $\tilde{A}$ نشان می‌دهیم، و آن را پوشش قوی A می‌خوانیم.

۶.۲.۲ قضیه تناظر A به $\tilde{A}$ یک فانکتور است. و در واقع یک انعکاس‌گر از f—حلقه‌ها به f—حلقه‌های قوی می‌باشد.

اثبات: فرض کنیم $f : A \to B$ یک l—همریختی باشد. در این صورت تابع $\tilde{f} : \tilde{A} \to \tilde{B}$ را با ضابطهٔ $\tilde{f}(a/s) = f(a)/f(s)$ تعریف می‌کنیم. این تابع خوشتعریف است زیرا $f(s) \geq f(۱) = ۱$. حال ثابت می‌کنیم که تابع $\tilde{f}$ همهٔ اعمال را حفظ می‌کند.

حفظ عمل جمع:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(a/s + b/t) &= \tilde{f}((ta+sb)/st) \\ &= (f(t)f(a) + f(s)f(b))/f(s)f(t) \\ &= f(a)/f(s) + f(b)/f(t) \\ &= \tilde{f}(a/s) + \tilde{f}(b/t) \end{aligned}$$

حفظ عمل ضرب:

$$\begin{aligned} \tilde{f}((a/s)(b/t)) &= \tilde{f}(ab/st) \\ &= (f(a)f(b))/f(s)f(t) \\ &= (f(a)/f(s))(f(b)/f(t)) \\ &= \tilde{f}(a/s)\tilde{f}(b/t) \end{aligned}$$

حفظ عمل $\vee$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}(a/s \vee b/t) &= \tilde{f}((ta \vee sb)/st) \\ &= (f(t)f(a) \vee f(s)f(b))/f(s)f(t) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= f(a)/f(s) \vee f(b)/f(t) \\
&= \tilde{f}(a/s) \vee \tilde{f}(b/t)
\end{aligned}
$$

حفظ عمل $\wedge$:

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(a/s \wedge b/t) &= \tilde{f}((ta \wedge sb)/st) \\
&= (f(t)f(a) \wedge f(s)f(b))/f(s)f(t) \\
&= f(a)/f(s) \wedge f(b)/f(t) \\
&= \tilde{f}(a/s) \wedge \tilde{f}(b/t)
\end{aligned}
$$

حال ثابت می‌کنیم که $i : A \to \tilde{A}$ خاصیت جهانی را داراست. برای این منظور فرض کنیم $g : A \to B$ یک l—همریختی باشد که B یک f—حلقهٔ قوی است. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$
\bar{g} : \tilde{A} \to B; \quad \bar{g}(a/s) = g(a)g(s)^{-۱}
$$

توجه می‌کنیم که چون $g(s) \geq ۱$، $g(s)$ وارون پذیر است. بنابراین $\bar{g}$ خوشتعریف است. حال ثابت می‌کنیم که $\bar{g}$ l—همریختی است.

حفظ عمل جمع:

$$
\begin{aligned}
\bar{g}(a/s + b/t) &= \bar{g}((ta + sb)/st) \\
&= g(ta + sb)g(st)^{-۱}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (g(t)g(a)+g(s)g(b))g(s)^{-1}g(t)^{-1} \\
&= g(a)g(s)^{-1}+g(b)g(t)^{-1} \\
&= \bar{g}(a/s)+\bar{g}(b/t)
\end{aligned}
$$

حفظ عمل ضرب:

$$
\begin{aligned}
\bar{g}((a/s)(b/t)) &= g(ab)g(st)^{-1} \\
&= g(a)g(b)f(s)^{-1}f(t)^{-1} \\
&= g(a)f(s)^{-1}(f(b)f(t)^{-1} \\
&= \bar{g}(a/s)\bar{g}(b/t)
\end{aligned}
$$

حفظ عمل $\vee$:

$$
\begin{aligned}
\bar{g}(a/s\vee b/t) &= \bar{g}((ta\vee sb)/st) \\
&= g(ta\vee sb)g(st)^{-1} \\
&= (g(t)g(a)\vee g(s)g(b))g(s)^{-1}g(t)^{-1} \\
&= g(a)g(s)^{-1}\vee g(b)g(t)^{-1} \\
&= \bar{g}(a/s)+\bar{g}(b/t)
\end{aligned}
$$

حفظ عمل $\wedge$:

$$
\bar{g}(a/s\wedge b/t) = \bar{g}((ta\wedge sb)/st)
$$

$$
\begin{aligned}
&= g(ta \wedge sb)g(st)^{-1} \\
&= (g(t)g(a) \wedge g(s)g(b))g(s)^{-1}g(t)^{-1} \\
&= g(a)g(s)^{-1} \wedge g(b)g(t)^{-1} \\
&= \bar{g}(a/s) + \bar{g}(b/t)
\end{aligned}
$$

حال نشان می‌دهیم که $\bar{g}$ یکتاست. فرض کنیم $h : \tilde{A} \to B$ چنان باشد که برای هر $a \in A$، $h(a/1) = g(a)$. در این صورت:

$$h(a/s) = h((a/1)(1/s) = g(a)h(s^{-1}) = g(a)h(s)^{-1} = g(a)g(s)^{-1} = \bar{g}(a/s)$$

بنابراین $\bar{g}$ با این ویژگی یکتاست. پس فانکتور فوق یک انعکاس‌گر است.

۷.۲.۲ تبصره هر f—حلقهٔ قوی چون A یک Q—جبر زیرا برای هر $n \in N$، $1/n$ معنی دارد. بنابراین برای هر $m/n \in Q$ و $a \in A$؛ $(m/n)a$ معنی دارد. بنابراین قضیهٔ ۴.۳ بیان می‌کند که برای مطالعهٔ $\mathcal{L}(A)$ می توان فرض کرد که A یک Q—جبر است.

اکنون به l—مدول کسرها می‌پردازیم.

۹.۲.۲ تعریف فرض کنیم A یک حلقه مرتب باشد و $S \subseteq A^+$ یک مجموعه ضربی باشد که $0 \notin S$. و M یک مدول مرتب روی A باشد. در این صورت ترتیب جزئی $\leq$، روی $S^{-1}M$ رابه صورت زیر تعریف می‌کنیم:
برای هر $a, b \in M$ و $s \in S$، می‌گوییم $a/s \leq b/t$؛ هرگاه $w \in S$ موجود باشد به طوری که $w(sb - ta) \geq 0$.

۱۰.۲.۲ قضیه فرض کنیم A یک حلقه‌مرتب باشد و $S \subseteq A^+$ یک زیر مجموعهٔ ضربی باشد که $0 \notin S$ در این صورت

۱) $S^{-1}M$ یک مدول مرتب است.

۲) تابع $i : M \to S^{-1}M$ با ضابطه $i(x) = x/1$ یک همریختی A—مدول‌های مرتب است.

۳) اگر M یک f—مدول باشد آنگاه $S^{-1}M$ یک f—مدول است.

۴) اگر M یک f—مدول باشد آنگاه i یک A—l—همریختی است.

اثبات: (۱) ابتدا ثابت می‌کنیم که رابطهٔ leq یک ترتیب جزئی خوشتعریف روی $S^{-1}M$ است. واضح است که $\leq$ خاصیت انعکاسی را داراست. برای خاصیت پادتقارنی فرض کنیم $a/s \leq b/t$ و $a/s \geq b/t$ در این صورت، $w, w' \in S$ وجود دارد به طوری که $w(sb - ta) \geq 0$ و $w'(ta - sb) \geq 0$. در نتیجه $ww'(ta - sb) = 0$ لذا $a/s = b/t$. که این خاصیت پادتقارنی را ثابت می‌کند.

حال برای اثبات خاصیت تراگذری، فرض کنیم $a/s \leq b/t$ و $b/t \leq c/k$ در این صورت، $w, w' \in S$ وجود دارد به طوری که $w(sb - ta) \geq 0$ و $w'(tc - kb) \geq 0$. بنابر این

$$ww't(sc - ka) = ww'(stc - skb) + ww'(skb - tka) \geq 0$$

یعنی $c/k \leq a/s$. که این خاصیت تراگذری را ثابت می‌کند.

حال برای اثبات مدول مرتب بودن M، فرض کنیم $a/s \leq b/t$ و $c/k \in S^{-1}M$. در این صورت

$$\begin{aligned} w(ta - sb) \leq 0 \quad &\Rightarrow \quad wk^2(ta - sb + stc - stc \leq 0 \\ &\Rightarrow \quad w(k^2ta + stkc - k^2sb - sktc) \leq 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Rightarrow \quad w(tk(ka+sc)-sk(kb+tc)) \leq \circ \\
&\Rightarrow \quad (ka+sc)/sk \leq (kb+tc)/tk \\
&\Rightarrow \quad a/s+c/k \leq b/t+c/k
\end{aligned}$$

حال فرض کنیم $a/s \geq \circ$ و $x/t \geq \circ$ که $a/s \in S^{-۱}A$ و $x/t \in S^{-۱}M$، لذا $w, w' \in S$ وجود دارند به طوری که

$$\begin{aligned}
wx \geq \circ, w'a \geq \circ \quad &\Rightarrow \quad ww'ax \geq \circ \\
&\Rightarrow \quad (ax)/(st) \geq \circ \\
&\Rightarrow \quad (a/s)(x/t) \geq \circ
\end{aligned}$$

لذا M یک حلقه مرتب است.

(۲) کافیست ثابت کنیم اگر $x \leq y$ آنگاه $x/۱ \leq y/۱$، که واضح است.

(۳) ابتدا ثابت می‌کنیم که $S^{-۱}M$ یک l—مدول است. فرض کنیم $a/s, b/t \in S^{-۱}M$. ادعا می‌کنیم برای هر $a, b \in M$ داریم

$$a/s \wedge b/t = (ta \wedge sb)/(st), \quad a/s \vee b/t = (ta \vee sb)/(st)$$

ابتدا توجه می‌کنیم که $b/t, a/s \leq (ta \vee sb)/(st)$، زیرا

$$t(ta \vee sb) - stb = t^{۲}a \vee tsb - tsb \geq \circ$$

$$s(ta \vee sb) - sta = t^{۲}b \vee tsa - tsa \geq ۰$$

حال فرض کنیم که $a/s, b/t \leq c/k$. در این صورت $w_۱, w_۲ \in S$ وجود دارند به طوری که

$$w_۱(sc - ka) \geq ۰, w_۲(tc - kb) \geq ۰$$

در نتیجه

$$w_۱w_۲stc \geq w_۱w_۲tka, w_۱w_۲stc \geq w_۱w_۲skb$$

لذا

$$\begin{aligned} w_۱w_۲stc &\geq w_۱w_۲ska \vee w_۱w_۲skb \\ &= w_۱w_۲(ta \vee sb) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$w_۱w_۲(stc - k(ta \vee sb)) \geq ۰ \Rightarrow c/k \geq (ta \vee sb)/st$$

و بنابراین $a/s \vee b/t = (ta \vee sb)/st$.

برای اثبات $a/s \wedge b/t = (ta \wedge sb)/st$ ابتدا توجه می‌کنیم که $b/t, a/s \geq (ta \wedge sb)/(st)$، زیرا

$$t(ta \wedge sb) - stb = t^{۲}a \wedge tsb - tsb \leq ۰$$

$$s(ta \wedge sb) - sta = t^{2} b \wedge tsa - tsa \leq 0$$

حال فرض کنیم که $a/s, b/t \geq c/k$. در این صورت $w_1, w_2 \in S$ وجود دارند به طوری که

$$w_1(sc - ka) \leq 0, w_2(tc - kb) \leq 0$$

در نتیجه

$$w_1 w_2 stc \leq w_1 w_2 tka, w_1 w_2 stc \leq w_1 w_2 skb$$

لذا

$$\begin{aligned} w_1 w_2 stc &\leq w_1 w_2 ska \wedge w_1 w_2 skb \\ &= w_1 w_2 (ta \wedge sb) \end{aligned}$$

در نتیجه

$$w_1 w_2 (stc - k(ta \wedge sb)) \leq 0 \Rightarrow c/k \leq (ta \wedge sb)/st$$

و بنابراین $a/s \wedge b/t = (ta \wedge sb)/st$.

حال شرط f—مدول بودن، $s^{-1}M$ را بررسی می‌کنیم:

فرض کنیم $a/k \geq 0$، در این صورت wای هست که $wa \geq 0$. بنابراین داریم

$$
\begin{aligned}
(wa)/(kw)(x/s \vee y/t)) &= (wa)/(wk)((tx \vee sy)/(st)) \\
&= (wtax \vee wsay)/(wkst) \\
&= w(tax \vee say)/(wkst) \\
&= (tax \vee say)/(ksb) \\
&= (ax/ks) \vee (ay/kt) \\
&= (ktax \vee ksay)/(k^{۲}st) \\
&= (tax \vee say)/(kst)
\end{aligned}
$$

بنابراین

$$a/k(x/s \vee y/t) = (ax)/ks \vee (ay/kt)$$

(۴) بنا به فرمول $\vee$ و $\wedge$ در (۳) داریم،

$$x/۱ \vee y/۱ = (x \vee y)/۱, \quad x/۱ \wedge y/۱ = (x \wedge y)/۱$$

بنابراین i، $\vee$ و $\wedge$ را حفظ می‌کند.

۱.۲.۲ تبصره—

اگر M یک f—مدول باشد آنگاه با توجه به فرمول $\vee$ و $\wedge$ داریم $a/s \vee b/s = (a \vee b)/s$ و $a/s \wedge b/s = (a \wedge b)/s$. و همینطور داریم

$$|a/s| = (a/s) \vee (-a/s) = (a \vee (-a))/s = |a/s|$$

$$(a/s)^+ = (a/s) \vee (0/1) = (a \vee (0))/s = a^+/s$$

$$(a/s)^- = (-a/s) \wedge (0/1) = ((-a) \wedge 0)/s = a^-/s$$

۳.۲ ساختارهای توپولوژیکی روی ℓ—مدولها و فضاهای ریس

در این فصل به معرفی مفاهیم دیگر در فضای ریس مثل دنباله‌های پوچ و همگرایی دنباله‌ها، می‌پردازیم و با استفاده از آنها ایدآلهای بسته و در نتیجه طیف ایدآل‌های بسته را معرفی می‌نماییم.

۱.۳.۲ تعریف فرض کنیم E یک فضای ریس باشد.

E را ارشمیدسی گوییم هر گاه اگر $nx \leq a$ برای هر $n = 1, 2, \cdots$ برقرار باشد آنگاه $x \leq 0$.

یک دنبالهٔ $(x_n)_{n\geq 1}$ را نزولی می‌گوییم هر گاه برای هر $n \leq m$، $x_m \leq x_n$. اگر $(x_n)_{n\geq 1}$ یک دنباله نزولی در E باشد و $x = inf\{x_n | n \geq 1\}$ آنگاه می‌نویسیم $x_n \downarrow x$. $x_n \uparrow x$ نیز به صورت دوگان تعریف می‌شود.

دنبالهٔ $(y_n)_{n\geq 1}$ را همگرا به y می‌گوییم و می نویسیم وقتی $n \to \infty$، $y_n \to y$ و یا با نماد $o - \lim_{n\to\infty} y_n = y$ نمایش می‌دهیم هر گاه یک دنبالهٔ $(x_n)_{n\geq 1}$ موجود باشد به طوری که $x_n \downarrow 0$ و برای هر $n \in N$، $|y_n - y| \leq x_n$.

دنبالهٔ $(x_n)_{n\geq 1}$ که در شرط $x_n \downarrow 0$ صدق کند را یک دنبالهٔ پوچ می‌گوییم.

۲.۳.۲ گزاره فرض کنیم $(x_n)_{n\geq 1}$ و $(y_n)_{n\geq 1}$ دنباله‌هایی در فضای ریس E باشند که وقتی $n \to \infty$، $x_n \to x$ و $y_n \to y$ و $\alpha, \beta \in Q$. در این صورت

۱) $o - \lim_{n\to\infty}(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha x + \beta y$

۲) $o - \lim_{n\to\infty}(x_n \wedge y_n) = x \wedge y$ و $o - \lim_{n\to\infty}(x_n \vee y_n) = x \vee y$

۳.۳.۲ تعریف فرض کنیم $A \subseteq E$ و E یک فضای ریس باشد در این صورت بستار A را با نماد $\overline{A}$ نمایش می‌دهیم مجموعهٔ تمام $a = o - \lim_{n\to\infty} \alpha_n$ تعریف می‌کنیم که $a_n \in A$. A را بسته گوییم هر گاه $\overline{A} = A$.

۴.۳.۲ تبصره بستار گیری مذکور در ۳.۳، در قوانین زیر صدق می‌کند
(۱) $A \subseteq \overline{A}$ (۲) $\overline{A} = \overline{\overline{A}}$ (۳) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $\overline{A} \subseteq \overline{B}$.

۵.۳.۲ قضیه فرض کنیم E یک فضای ریس و I و J دو اید آل از E و B یک باند از E باشد در این صورت

۱) $\overline{I}$ نیز یک اید آل است.

۲) اگر E دارای یک دنبالهٔ پوچ ناصفر باشد آنگاه $\overline{I}$ یک باند است.

۳) $\overline{B}$ یک باند است.

۴) $\overline{I \cap J} = \overline{I} \cap \overline{J}$.

اثبات: (۱) با استفاده از گزارهٔ ۲.۳ واضح است که $\overline{I}$ زیرفضای برداری E است.

فرض کنیم $0 < x \leq |a|$ و $a \in \overline{J}$. بنابراین $a_n \in J$ وجود دارد به طوری که $a = o - \lim_{n\to\infty} a_n$. در نتیجه $|a| = o - \lim_{n\to\infty} |a_n|$. لذا

$x = |a| \wedge x = \circ - \lim_{n\to\infty}(|a_n| \wedge x)$ بنابراین $x \in \overline{J}$ زیرا برای هر n، $|a_n| \wedge x \in J$.
اگر $|a| \leq |x|$ و $a \in \overline{J}$ آنگاه $|x|, x^+ \in \overline{J}$ (زیرا $\circ \leq x^+ \leq |x|$) بنابراین $x = ۲x^+ - |x| \in \overline{J}$ پس $\overline{J}$ یک ایدآل است.

(۲) فرض کنیم $(a_n)_{n\geq ۱}$ دنباله‌ای از E باشد که $a_n \downarrow \circ$. فرض کنیم $S \subseteq \overline{I}$ و $x = supS$ موجود باشد. برای هر $n \geq ۱$ داریم $x - a_n < x$ بنابراین طبق تعریف $supS$، $s_n \in S$ موجود است به طوری که $xa_n \leq s_n \leq x$.

در نتیجه $\circ \leq x - s_n \leq a_n$ بنابراین $x = o - \lim_{n\to\infty} s_n$ در نتیجه $x \in \overline{I}$.

(۳) با توجه به (۲) می‌توان فرض کرد که E دارای دنبالهٔ پوچ ناصفر نیست. بنابراین $\overline{B} = B$ یک باند است.

(۴) $\overline{I \cap J} \supseteq \overline{I} \cap \overline{J}$ واضح است. فرض کنیم $x \in \overline{I} \cap \overline{J}$ آنگاه $x = o - \lim_{n\to\infty} a_n$ و $x = o - \lim_{n\to\infty} b_n$ که در آن $a_n \in I$. $b_n \in J$ $(n \in N)$.

بنابراین $x^+ = o - \lim_{n\to\infty} a_n^+ = o - \lim b_n^+$ و $x^- = o - \lim_{n\to\infty} a_n^- = o - \lim b_n^-$.
در نتیجه $x^+ = o - \lim a_n^+ \wedge b_n^+$ و $x^- = o - \lim_{n\to\infty} a_n^- \wedge b_n^-$ در نتیجه $x^+, x^- \in \overline{I \cap J}$ لذا $x = x^+ - x^- \in \overline{I \cap J}$. در نتیجه $\overline{I \cap J} = \overline{I} \cap \overline{J}$.

فصل ۳

طیفهای بدون نقطه

۱.۳ صورت بدون نقطهٔ طیف کیمل

۱.۱.۳ تعریف فرض کنیم E یک فضای ریس باشد مجموعهٔ تمام ایدآلهای E را با $\mathcal{L}(E)$ نمایش می‌دهیم. $\mathcal{L}(E)$ را طیف اولیهٔ E می‌نامیم.

۲.۱.۳ قضیه فرض کنیم E یک فضای ریس باشد.

۱) $\mathcal{L}(E)$ همراه با $\subseteq$ یک فریم است.

۲) $I \in \mathcal{L}(E)$ فشرده است اگر و تنها اگر $a \in E$ موجود باشد به طوری که $E = [a]$.

۳) برای هر $I \in \mathcal{L}(E)$، $I^{\perp}$ شبه متمم I است. یعنی $\mathcal{L}(E)$ یک لاتیس کامل شبه متمم دار است که $I^* = I^{\perp}$.

و اگر E کامل باشد داریم:

۴) $I \in \mathcal{L}(E)$ دارای متمم است اگر و تنها اگر I یک باند باشد.

۵) $\mathcal{L}(E)$ یک جبر استون است.

اثبات:

(۱) فرض کنیم $\{H_i | i \in I\}$ خانواده‌ای از ایدآلهای E باشد. واضح است که $\bigcap_{i\in I} H_i$ یک ایدآل است. بنابراین $\mathcal{L}(E)$ یک لاتیس کامل است نشان می‌دهیم $\bigvee_{i\in I} H_i = \sum_{i\in I} H_i$، کافیست نشان دهیم $\sum H_i$ یک ایدآل است.

فرض کنیم $a \in E$، $|a| \leq |h_۱ + \cdots + h_n|$ که $h_k \in H_{i_k}$ $(۱ \leq k \leq n)$. آنگاه $|a| \leq |h_۱| + \cdots + |h_n|$. پس طبق خاصیت تجزیه ریس، $۰ \leq x_i \leq |h_i|$ موجودند به طوری که $|a| = x_۱ + \cdots + x_n$. چون H_i ها ایدآل هستند پس $x_i \in H_i$ و $|a| \in \sum_{i\in I} H_i$. به همین ترتیب ثابت می‌شود که $a^+ \in \sum_{i\in I} H_i$ لذا $a = ۲a^+ - |a| \in \sum_{i\in I} H_i$. یعنی $\sum H_i$ یک ایدآل است.

حال برای اثبات فریم بودن $\mathcal{L}(E)$، ثابت می‌کنیم $H \cap \sum_{i\in I} H_i = \sum_{i\in I} H \cap H_i$ که در آن $H \in \mathcal{L}(E)$. $\sum_{i\in I} H \cap H_i \subseteq H \cap \sum_{i\in I} H_i$ واضح است. فرض کنیم $x \in H \cap \sum_{i\in I} H_i$. بنابراین $x \in H$ و $|x| = h_۱ + \cdots + h_n$ که $h_k \in H_{i_k}$. اگر $n = ۲$ باشد داریم

$$\begin{aligned}|x| = |x| \wedge (h_۱ + h_۲) &\leq (۲|x|) \wedge (|x| + h_۱) \wedge (|x| + h_۲) \wedge (h_۱ + h_۲)\\ &= (|x| + |x| \wedge h_۱) \wedge (h_۲ + |x| \wedge h_۱)\\ &= |x| \wedge h_۱ + |x| \wedge h_۲ \in \sum_{i\in I} H \cap H_i\end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از استقراء روی n داریم

$$|x| = |x| \wedge (h_۱ + \cdots + h_n) \leq |x| \wedge u_۱ + \cdots + |x| \wedge u_n \in \sum_{i\in I} H \cap H_i$$

در نتیجه $|x| \in \sum_{i\in I} H \cap H_i$ و چون $\sum_{i\in I} H \cap H_i$ یک ایدآل است $x \in \sum_{i\in I} H \cap H_i$ این اثبات فریم بودن $\mathcal{L}(E)$ را کامل می‌کند.

(۲) فرض کنیم I فشرده باشد بنابراین از $I = \sum_{a\in I} [a]$ نتیجه می‌شود که $a_i \in I$ وجود دارند به طوری که $I = [a_۱] + \cdots + [a_n] = [|a_۱| \vee \cdots \vee |a_n|]$ زیرا

$[a]+[b]=[|a|\vee|b|]$ برای هر $a,b\in E$ برقرار است. قرار می‌دهیم $a=|a_1|\vee\cdots\vee|a_n|$ بنابراین $I=[a]$.

برعکس، فرض کنیم $I=[a]$ و $I=\bigvee_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha=\sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$. می توان فرض کرد که $a_\alpha\in I$ موجود است به طوری که $I_\alpha=[a_\alpha]$.

پس $[a]=\sum_{\alpha\in\Lambda}[a_\alpha]$. بنابراین $0\leq u_t\in[a_{\alpha_t}]$ موجود است به طوری که $|a|=u_1+\cdots+u_k$. واضح است که

$$[a]\subseteq[u_1]+\cdots+[u_k]\subseteq[a_{\alpha_1}]+\cdots+[a_{\alpha_k}]\subseteq[a]$$

بنابراین $I=\bigvee_{t=1}^{k}[a_{\alpha_t}]$، یعنی I فشرده است.

(۳) فرض کنیم $x\in I\cap I^\perp$. لذا برای هر $y\in I$، $|x|\wedge|y|=0$ در حالت خاص $|x|\wedge|x|=0$ در نتیجه $|x|=0$ پس $x=0$. یعنی $I\cap I^\perp=0$.

حال فرض کنیم $I\cap J=0$ و $x\in J$. برای هر $y\in I$ داریم $|x|\wedge|y|\in I\cap J$ پس $|x|\wedge|y|=0$ یعنی $x\perp y$. در نتیجه $x\in I^\perp$. بنابراین $J\subseteq I^\perp$. این ثابت می‌کند که $I^\perp$، شبه متمم I است.

(۴) فرض کنیم $I\in\mathcal{L}(E)$. چون $I^\perp=I^*$، پس I دارای متمم است اگر و تنها اگر $I\oplus I^\perp=I+I^\perp=I\vee I^\perp=E$.

از طرف دیگر $E=B(I)\oplus I^\perp$، بنابراین I دارای متمم است اگر و تنها اگر $I\oplus I^\perp=B(I)\oplus I^\perp$ چون $I\subseteq B(I)$، I دارای متمم است اگر و تنها اگر $I=B(I)$ یعنی اگر و تنها اگر I یک باند باشد.

(۵) داریم $E=I^\perp\oplus I^{\perp\perp}$. بنابراین برای هر $I\in\mathcal{L}(E)$، $I^*\vee I^{**}=e_{\mathcal{L}(E)}$ برقرار است بنابراین $\mathcal{L}(E)$، یک جبر استون است.

۳.۱.۳ تعریف فرض کنیم E یک فضای ریس باشد. E را کراندار گوییم هر گاه $u\geq 0$ موجود باشد به طوری که $E=[u]$.

۴.۱.۳ قضیه

۱) E کراندار است اگر و تنها اگر $u \in E^+$ موجود باشد که برای هر $a \in E$، $r \in Q$ موجود باشد به طوری که $|a| \leq r|u|$.

۲) $\mathcal{L}(E)$ یک فریم جبری است.

۳) $\mathcal{L}(E)$ فشرده است اگر و تنها اگر E کراندار باشد.

اثبات:(۱) براحتی از تعریف نتیجه می‌شود.
(۲) از قضیهٔ ۲.۱.۳ نتیجه می‌شود، (۳) نیز از قضیهٔ ۲.۱.۳ نتیجه می‌شود.

۵.۱.۳ تعریف زیرمدول I از $l-$مدول M را ایدآل گوییم هر گاه $|a| \leq |b|$ و $b \in I$، $a \in I$ را نتیجه دهد.

فرض کنیم M یک $l-$مدول باشد، مجموعهٔ تمام ایدآلهای M را با $\mathcal{L}(M)$ نمایش می‌دهیم. $\mathcal{L}(M)$ را طیف اولیهٔ M می‌نامیم.

۶.۱.۳ قضیه

فرض کنیم M یک $l-$مدول باشد.

۱) $\mathcal{L}(M)$ همراه با $\subseteq$ یک فریم است.

۲) $I \in \mathcal{L}(M)$ فشرده است اگر و تنها اگر $m \in M$ موجود باشد به طوری که $M = [m]$.

اثبات:

(۱) فرض کنیم $\{H_i | i \in I\}$ خانواده‌ای از ایدآلهای M باشد. واضح است که $\bigcap_{i\in I} H_i$ یک ایدآل است. بنابراین $\mathcal{L}(M)$ یک لاتیس کامل است نشان می‌دهیم $\bigvee_{i\in I} H_i = \sum_{i\in I} H_i$، کافیست نشان دهیم $\sum H_i$ یک ایدآل است.

فرض کنیم $m \in M$، $|m| \leq |h_۱ + \cdots + h_n|$ که $h_k \in H_{i_k}$ $(۱ \leq k \leq n)$. آنگاه $|m| \leq |h_۱| + \cdots + |h_n|$. پس طبق قضیه(۵) در یادآوری $۰ \leq x_i \leq |h_i|$ موجودند به طوری که $|m| = x_۱ + \cdots + x_n$. چون H_i ها ایدآل هستند پس $x_i \in H_i$ و $|m| \in \sum_{i\in I} H_i$. به همین ترتیب ثابت می‌شود که $m^+ \in \sum_{i\in I} H_i$ لذا $m = ۲m^+ - |m| \in \sum_{i\in I} H_i$. یعنی $\sum H_i$ یک ایدآل است.

حال برای اثبات فریم بودن $\mathcal{L}(M)$، ثابت می‌کنیم $H \cap \sum_{i\in I} H_i = \sum_{i\in I} H \cap H_i$ که در آن $H \in \mathcal{L}(M)$. $\sum_{i\in I} H \cap H_i \subseteq H \cap \sum_{i\in I} H_i$ واضح است. فرض کنیم $x \in H \cap \sum_{i\in I} H_i$. بنابراین $x \in H$ و $|x| = h_۱ + \cdots + h_n$ که $h_k \in H_{i_k}$. اگر $n = ۲$ باشد داریم

$$\begin{aligned}|x| = |x| \wedge (h_۱ + h_۲) &\leq (۲|x|) \wedge (|x| + h_۱) \wedge (|x| + h_۲) \wedge (h_۱ + h_۲)\\ &= (|x| + |x| \wedge h_۱) \wedge (h_۲ + |x| \wedge h_۱)\\ &= |x| \wedge h_۱ + |x| \wedge h_۲ \in \sum_{i\in I} H \cap H_i\end{aligned}$$

بنابراین با استفاده از استقراء روی n داریم

$$|x| = |x| \wedge (h_۱ + \cdots + h_n) \leq |x| \wedge u_۱ + \cdots + |x| \wedge u_n \in \sum_{i\in I} H \cap H_i$$

در نتیجه $|x| \in \sum_{i\in I} H \cap H_i$ و چون $\sum_{i\in I} H \cap H_i$ یک ایدآل است $x \in \sum_{i\in I} H \cap H_i$ این اثبات فریم بودن $\mathcal{L}(M)$ را کامل می‌کند.

(۲) فرض کنیم I فشرده باشد بنابراین از $I = \sum_{m\in I}[m]$ نتیجه می‌شود که $m_i \in I$ وجود دارند به طوری که $I = [m_۱] + \cdots + [m_n] = [|m_۱| \vee \cdots \vee |m_n|]$ زیرا $[m] + [n] = [|m| \vee |n|]$ برای هر $m, n \in M$ برقرار است. قرار می‌دهیم $m = |m_۱| \vee \cdots \vee |m_n|$ بنابراین $I = [m]$.

برعکس، فرض کنیم $I = [m]$ و $I = \bigvee_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha = \sum_{\alpha\in\Lambda} I_\alpha$. می توان فرض کرد که $m_\alpha \in I$ موجود است به طوری که $I_\alpha = [m_\alpha]$.

پس $[m] = \sum_{\alpha\in\Lambda}[m_\alpha]$. بنابراین $\circ \leq u_t \in [m_{\alpha_t}]$ موجود است به طوری که $|m| = u_1 + \cdots + u_k$. واضح است که

$$[m] \subseteq [u_1] + \cdots + [u_k] \subseteq [m_{\alpha_1}] + \cdots + [m_{\alpha_k}] \subseteq [m]$$

بنابراین $I = \bigvee_{t=1}^{k}[m_{\alpha_t}]$، یعنی I فشرده است.

۷.۱.۳ تعریف فرض کنیم M یک l—مدول باشد. M را کراندار گوییم هر گاه $u \geq \circ$ موجود باشد به طوری که $M = [u]$.

۸.۱.۳ قضیه

۱) M کراندار است اگر و تنها اگر $u \in M^+$ موجود باشد که برای هر $m \in M$، $a \in A^+$ موجود باشد به طوری که $|m| \leq a|u|$.

۲) $\mathcal{L}(M)$ یک فریم جبری است.

۳) $\mathcal{L}(M)$ فشرده است اگر و تنها اگر M کراندار باشد.

اثبات:(۱) براحتی از تعریف نتیجه می‌شود.

(۲) از قضیهٔ ۷.۱.۳ نتیجه می‌شود، و (۳) نیز از تعریف کرانداری و قضیهٔ ۷.۱.۳ نتیجه می‌شود.

۹.۱.۳ لم فرض کنیم M یک l—مدول روی l—حلقهٔ A باشد. در این صورت M f—مدول است اگر و تنها اگر برای هر $m, n \in M^+$ داشته باشیم $[m] \cap [n] = [m \wedge n]$.

اثبات: فرض کنیم M یک f—مدول باشد. فرض کنیم $m, n \in M^+$. رابطه $[m \wedge n] \subseteq [m] \cap [n]$ واضح است.

فرض کنیم $x \in [m] \cap [n]$. بنابر این $a, b \in A^+$ موجودند به طوری که $|x| \leq am, bn$، قرار میدهیم $a' = a + b$، داریم $|x| \leq a'm \wedge a'n = a'(m \wedge n)$. درنتیجه $x \in [m \wedge n]$. این تساوی $[m] \cap [n] = [m \wedge n]$ را اثبات می کند.
بر عکس، فرض کنیم تساوی برای هر $m, n \in M^+$ بر قرار باشد. طبق این تساوی برای هر $a \in A^+$ و $m, n \in M^+$ که $m \wedge n = \circ$، داریم $am \wedge an = \circ$. حال فرض کنیم $a \in A^+$ و $m, n \in M^+$، داریم

$$(m - (m \wedge n)) \wedge (n - (m \wedge n)) = (m \wedge n) - (m \wedge n) = \circ$$

در نتیجه بنابر رابطه قبل داریم

$$\begin{aligned} \circ = a(m - (m \wedge n)) \wedge a(n - (m \wedge n)) &= (am - a(m \wedge n)) \wedge (an - a(m \wedge n)) \\ &= (am \wedge an) - a(m \wedge n) \end{aligned}$$

بنابر این $(am \wedge an) = a(m \wedge n)$ یعنی M یک f—مدول است.

قضیه ۱۰.۱.۳ فرض کنیم M یک f—مدول روی l—حلقهٔ Aباشد.در این صورت $\mathcal{L}(M)$ به طور کوهرنت نرمال است.

اثبات: چون عضوهای فشرده $\mathcal{L}(M)$ به صورت $[m]$ هستند، بنا به لم قبل $\mathcal{L}(M)$ کوهرنت است. حال شرط نرمال بودن آن را بررسی می کنیم. فرض کنیم $I + J = [m]$ که در آن $I, J \in \mathcal{L}(M)$ و $m \in E^+$. پس $m_۱ \in I$ و $m_۲ \in J$ وجود دارند به طوری که $m = m_۱ + m_۲$. قرار می دهیم $u = |m_۲| - |m_۱| \wedge |m_۲|$ و $v = |m_۱| - |m_۱| \wedge |m_۲|$. داریم $u \in J$ و بنابر این $I + [u] \subseteq [m]$. از طرف دیگر

$$m = |m| \leq |m_۱| + |m_۲| = (|m_۱| + |m_۱| \wedge |m_۲|) + u$$

بنا بر این $m \in I + [u]$. یعنی $[m] = I + [u]$. به همین ترتیب ثابت می شود که $[m] = J + [v]$. همچنین داریم

$$u \wedge v = (|m_۱| - |m_۱| \wedge |m_۲|) \wedge (|m_۲| - |m_۱| \wedge |m_۲|) = |m_۱| \wedge |m_۲| - |m_۱| \wedge |m_۲| = \circ$$

لذا $[u] \cap [v] = [u \wedge v] = \circ$. این قضیه را اثبات می کند.

۲.۳ صورت بدون نقطهٔ طیف ماکسیمال

۱.۲.۳ لم برای هر فضای ریس E و برای هر $a, b \in E^+$، داریم $[a] \cap [b] = [a \wedge b]$.

اثبات: $[a] \wedge [b] \supseteq [a \wedge b]$ واضح است. فرض کنیم $x \in [a] \cap [b]$. پس $r, s \in Q^+$ موجود است به طوری که $|x| < ra, sb$. قرار می‌دهیم $r' = r + s$. بنابراین داریم $|x| \leq r'a \wedge r'b$. در نتیجه $x \in [a \wedge b]$. این لم را ثابت می‌کند.

۱.۲.۳ نمادگذاری

فرض کنیم E یک فضای ریس کراندار باشد و $E = [u]$ که $u > \circ$ باشد. فرض کنیم $p \in Q$ دراین صورت تعریف می‌کنیم pu را با $\overline{p}$ نشان می‌دهیم.

۲.۲.۳ قضیه فرض کنیم E یک فضای ریس کراندار باشد. در این صورت $S\mathcal{L}(E)$ کاملاً منظم است.

اثبات: ابتدا ثابت می‌کنیم که برای هر $a \in E$ و عدد گویای p که در $\circ < p \leq ۱$ صدق کند در $\mathcal{L}(E)$ داریم $[a] << [(a - \overline{p})^+]$.

برای این منظور ثابت می‌کنیم برای هر $\circ < p < q$ داریم $[(a - \overline{q})^+] < [(a - \overline{p})^+]$

$$\begin{aligned} (a - \overline{q})^+ + (a - \overline{p})^- &= (a - \overline{q}) \vee \circ + (\overline{p} \vee a) \vee \circ \\ &= (a \vee \overline{q}) - \overline{q} + (\overline{p} \vee a) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \circ \vee (\overline{q} - a) + (\overline{p} - \overline{q}) \vee (a - \overline{q}) \\ &\geq \overline{p} - \overline{q} = \overline{p - q} > \circ \end{aligned}$$

در نتیجه

$$[(a-\overline{q})^+] + [(a-\overline{p})] \supseteq [(a-\overline{q})^+ + (a-\overline{p})^-] \supseteq [\overline{p-q}] = E$$

از طرف دیگر $(a-\overline{p})^+ \wedge (a-\overline{p})^- = \circ$. در نتیجه $[(a-\overline{p})^+] \cap [(a-\overline{p})^-] = \circ$ بنابراین داریم $[(a-\overline{p})^+] \prec [(a-\overline{q})^+]$.

حال نشان می‌دهیم که $S\mathcal{L}(E)$ کاملاً منظم است. چون برای هر $J \in S\mathcal{L}(E)$، $J = \bigcup\{[a] | a \in J^+\}$ (در $\mathcal{L}(E)$). داریم $J = s(J) = \bigvee\{s[a] | a \in J^+\}$ (در $S\mathcal{L}(E)$) در نتیجه کافیست ثابت کنیم برای هر $a \in E^+$، $s[a] = \bigvee\{s[(a-\overline{p})^+] | \circ < p \leq ۱\}$ در $S\mathcal{L}(E)$ برقرار است. یعنی کافی است ثابت کنیم $s[a] = s(I)$ که در آن $I = \bigcup\{[(a-\overline{p})^+] | \circ < p \leq ۱\}$. $s(I) \subseteq s[a]$ واضح است. بنابراین کافی است ثابت کنیم $[a]$، Iـ کوچک است. فرض کنیم $[a] + J = E$. در نتیجه $e \in [a] + J$، پس $r > \circ$ در Q و $b_۱ \in J$ موجودند به طوری که $u \leq ra + b_۱$. قرار می‌دهیم $b = \frac{۱}{r}|b_۱|$، داریم

$$\begin{aligned} & \circ < \frac{۱}{r} \leq a + \frac{۱}{r} b_۱ = a + b \\ \Rightarrow\ & [a \vee b] = [a] + [b] \supseteq [a+b] \supseteq [\overline{\frac{۱}{r}}] = E \\ \Rightarrow\ & \exists p, q \in Q; \circ < \overline{p} < \overline{q} < a \vee b \\ \Rightarrow\ & \overline{q-p} \leq (a-p) \vee (b-p) \leq (a-p)^+ \vee b \in I + J \\ \Rightarrow\ & \overline{q-p} \in I + J \\ \Rightarrow\ & I + J = E \end{aligned}$$

یعنی $[a]$، Iـ کوچک است و حکم ثابت است.

۳.۲.۳ تبصره اگر S را بزرگترین حالت ممکن بگیریم، یعنی قراردهیم $S = \{s \in A | s \geq\}$. در این صورت $S^{-1}A$ کوچکترین fـحلقه‌ای قویست که شامل A است. که در قضیهٔ بعد نشان داده می‌شود. در این حالت $S^{-1}A$ را با نماد $\tilde{A}$ نشان می‌دهیم، و آن را پوشش قوی A می‌خوانیم.

۴.۲.۳ قضیه تناظر A به $\tilde{A}$ یک فانکتور است. و در واقع یک انعکاس‌گر از fـحلقه‌ها به fـحلقه‌های قوی می‌باشد.

اثبات: فرض کنیم $f : A \to B$ یک lـهمریختی باشد. در این صورت تابع $\tilde{f} : \tilde{A} \to \tilde{B}$ را با ضابطهٔ $\tilde{f}(a/s) = f(a)/f(s)$ تعریف می‌کنیم. این تابع خوشتعریف است زیرا $f(s) \geq f(1) = 1$. حال ثابت می‌کنیم که تابع $\tilde{f}$ همهٔ اعمال را حفظ می‌کند.

حفظ عمل جمع:

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}(a/s + b/t) &= \tilde{f}((ta + sb)/st) \\
&= (f(t)f(a) + f(s)f(b))/f(s)f(t) \\
&= f(a)/f(s) + f(b)/f(t) \\
&= \tilde{f}(a/s) + \tilde{f}(b/t)
\end{aligned}
$$

حفظ عمل ضرب:

$$
\begin{aligned}
\tilde{f}((a/s)(b/t) &= \tilde{f}(ab/st) \\
&= (f(a)f(b))/f(s)f(t)
\end{aligned}
$$

$$= \quad (f(a)/f(s))(f(b)/f(t))$$
$$= \quad \tilde{f}(a/s)\tilde{f}(b/t)$$

حفظ عمل $\vee$:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(a/s \vee b/t) &= \tilde{f}((ta \vee sb)/st) \\
&= (f(t)f(a) \vee f(s)f(b))/f(s)f(t) \\
&= f(a)/f(s) \vee f(b)/f(t) \\
&= \tilde{f}(a/s) \vee \tilde{f}(b/t)
\end{aligned}$$

حفظ عمل $\wedge$:

$$\begin{aligned}
\tilde{f}(a/s \wedge b/t) &= \tilde{f}((ta \wedge sb)/st) \\
&= (f(t)f(a) \wedge f(s)f(b))/f(s)f(t) \\
&= f(a)/f(s) \wedge f(b)/f(t) \\
&= \tilde{f}(a/s) \wedge \tilde{f}(b/t)
\end{aligned}$$

حال ثابت می‌کنیم که $i : A \to \tilde{A}$ خاصیت جهانی را داراست. برای این منظور فرض کنیم $g : A \to B$ یک l—همریختی باشد که B یک f—حلقهٔ قوی است. در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$\bar{g} : \tilde{A} \to B; \quad \bar{g}(a/s) = g(a)g(s)^{-1}$$

توجه می‌کنیم که چون $g(s) \geq ۱$، $g(s)$ وارون پذیر است. بنابراین $\bar{g}$ خوشتعریف است. حال ثابت می‌کنیم که $\bar{g}$ $l-$همریختی است.

حفظ عمل جمع:

$$\begin{aligned} \bar{g}(a/s+b/t) &= \bar{g}((ta+sb)/st) \\ &= g(ta+sb)g(st)^{-۱} \\ &= (g(t)g(a)+g(s)g(b))g(s)^{-۱}g(t)^{-۱} \\ &= g(a)g(s)^{-۱}+g(b)g(t)^{-۱} \\ &= \bar{g}(a/s)+\bar{g}(b/t) \end{aligned}$$

حفظ عمل ضرب:

$$\begin{aligned} \bar{g}((a/s)(b/t)) &= g(ab)g(st)^{-۱} \\ &= g(a)g(b)f(s)^{-۱}f(t)^{-۱} \\ &= g(a)f(s)^{-۱}(f(b)f(t)^{-۱} \\ &= \bar{g}(a/s)\bar{g}(b/t) \end{aligned}$$

حفظ عمل $\vee$:

$$\begin{aligned} \bar{g}(a/s \vee b/t) &= \bar{g}((ta \vee sb)/st) \\ &= g(ta \vee sb)g(st)^{-۱} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (g(t)g(a) \vee g(s)g(b))g(s)^{-1}g(t)^{-1} \\
&= g(a)g(s)^{-1} \vee g(b)g(t)^{-1} \\
&= \bar{g}(a/s) + \bar{g}(b/t)
\end{aligned}
$$

حفظ عمل $\wedge$:

$$
\begin{aligned}
\bar{g}(a/s \wedge b/t) &= \bar{g}((ta \wedge sb)/st) \\
&= g(ta \wedge sb)g(st)^{-1} \\
&= (g(t)g(a) \wedge g(s)g(b))g(s)^{-1}g(t)^{-1} \\
&= g(a)g(s)^{-1} \wedge g(b)g(t)^{-1} \\
&= \bar{g}(a/s) + \bar{g}(b/t)
\end{aligned}
$$

حال نشان می‌دهیم که $\bar{g}$ یکتاست. فرض کنیم $h : \tilde{A} \to B$ چنان باشد که برای هر $a \in A$، $h(a/1) = g(a)$. در این صورت:

$$h(a/s) = h((a/1)(1/s) = g(a)h(s^{-1}) = g(a)h(s)^{-1} = g(a)g(s)^{-1} = \bar{g}(a/s)$$

بنابراین $\bar{g}$ با این ویژگی یکتاست. پس فانکتور فوق یک انعکاس‌گر است.

۵.۲.۳ تبصره هر f—حلقهٔ قوی چون A یک Q—جبر زیرا برای هر $n \in N$، $1/n$ معنی دارد. بنابراین برای هر $m/n \in Q$ و $a \in A$؛ $(m/n)a$ معنی دارد. بنابراین قضیهٔ

۴.۳ بیان می‌کند که برای مطالعهٔ $\mathcal{L}(A)$ می توان فرض کرد که A یک Q—جبر است.

۶.۲.۳ قضیه فرض کنیم A یک حلقه‌مرتب باشد و S یک زیرمجموعهٔ ضربی در A باشد که برای هر $s \in S$ داشته باشیم $s \geq ۱$. و فرض کنیم M یک f—مدول روی A باشد. در این صورت $S^{-۱}M$ یک f—مدول روی حلقهٔ مرتب $S^{-۱}A$ است که $\mathcal{L}(M) \cong \mathcal{L}(S^{-۱}M)$.

اثبات: دو تابع $\phi : \mathcal{L}(M) \to \mathcal{L}(S^{-۱}M)$ با ضابطهٔ $\phi(J) = S^{-۱}J = \{a/s | a \in J, s \in S\}$ و $\psi : \mathcal{L}(S^{-۱}M) \to \mathcal{L}(M)$ باضابطهٔ $\psi(I) = I \cap M$ را در نظر می‌گیریم. ابتدا دقت می‌کنیم که $S^{-۱}J$ و $I \cap M$ به ترتیب l—ایده‌آلهای $S^{-۱}M$ و M می باشند، زیرا

$$
\begin{aligned}
&|x| \leq |y|, \quad y \in I \cap M \\
&\qquad \Rightarrow \quad |x/۱| = |x|/۱ \leq |y|/۱ = |y/۱|, \quad y/۱ \in I \\
&\qquad \Rightarrow \quad x/۱ \in I \\
&\qquad \Rightarrow \quad x \in I \cap M
\end{aligned}
$$

که این ثابت می‌کند $I \cap M$، l—ایده‌آل M است. و

$$
\begin{aligned}
&|x/s| \leq |y/t|, \quad y \in S^{-۱}J, y \in J \\
&\qquad \Rightarrow \quad w(s|y| - t|x|) \geq ۰ \\
&\qquad \Rightarrow \quad ws|y| \geq wt|x|) = |wtx| \\
&\qquad \Rightarrow \quad wtx \in J \\
&\qquad \Rightarrow \quad x/s = wtx/wts \in S^{-۱}J
\end{aligned}
$$

که این نیز ثابت می‌کند $S^{-۱}J$، l—ایده‌آل $S^{-۱}M$ است.

در ادامه توجه کنید که ϕ و ψ رابطهٔ شمول $\subseteq$ را حفظ می‌کنند. و تابع معکوس هم دیگر هستند زیرا:

$$S^{-۱}J \cap M = J, \qquad S^{-۱}(I \cap M) = I$$

برای اثبات دو رابطهٔ فوق توجه می‌کنیم که $J \subseteq S^{-۱}J \cap M, \qquad S^{-۱}(I \cap M) \subseteq I$ واضح هستند. اکنون فرض کنیم $x \in S^{-۱}J \cap M$ در این صورت $a \in J$ و $s \in S$ وجود دارند به طوری که $a/s = x$. چون $s \geq ۱$، پس $|a/s| = |a|/s \leq |a|$، بنابراین چون J، l—ایده‌آل است، $a/s \in J$. در نتیجه $x \in J$. یعنی $S^{-۱}J \cap M = J$ برقرار است.

برای اثبات رابطهٔ دیگر، فرض کنیم $a/s \in I$ که $a \in M, s \in S$. بنابراین

$$a = sa/s \in I \Rightarrow a \in I \cap M \Rightarrow a/s \in S^{-۱}(I \cap M)$$

بنابراین $S^{-۱}(I \cap M) = I$.

در نتیجه ϕ و ψ همریختی‌های فریمی بوده و $\mathcal{L}(M) \cong \mathcal{L}(S^{-۱}M)$.

۷.۲.۳ تبصره اگر S را بزرگترین حالت ممکن بگیریم، یعنی قراردهیم $S = \{s \in A | s \geq \}$. در این حالت $S^{-۱}M$ را با نماد $\tilde{M}$ نشان می‌دهیم. اگر M یک f—مدول روی حلقهٔ مرتب A باشد، در این صورت $\tilde{M}$ یک f—مدول روی حلقهٔ مرتب $\tilde{A}$ است. که $\tilde{A}$ همواره یک Q—جبر است. بنابراین نتیجهٔ قضیهٔ قبل این است که برای بررسی $\mathcal{L}(M)$، همواره می‌توان فرض کرد که A یک Q—جبراست.

۸.۲.۳ نتیجه اگرA یک حلقه‌مرتب باشد و S یک زیرمجموعهٔ ضربی در A باشد، و اگر M یک f—مدول روی A باشد. در اینصورت $S\mathcal{L}(M) \cong S\mathcal{L}(\tilde{M})$.

۹.۲.۳ قضیه اگر A یک حلقه مرتب کراندار و Q—جبر باشد و M یک f—مدول کراندار روی A باشد آنگاه $S\mathcal{L}(M)$ کاملاً منظم و فشرده است.

اثبات: ابتدا ثابت می‌کنیم که برای هر $a \in M$ و عدد گویای p که در $0 < p \leq 1$ صدق کند در $\mathcal{L}(M)$ داریم $[(a-\overline{p})^+] << [a]$.

برای این منظور ثابت می‌کنیم برای هر $0 < p < q$ داریم $[(a-\overline{p})^+] < [(a-\overline{q})^+]$

$$\begin{aligned}
(a-\overline{q})^+ + (a-\overline{p})^- &= (a-\overline{q}) \vee 0 + (\overline{p} \vee a) \vee 0 \\
&= (a \vee \overline{q}) - \overline{q} + (\overline{p} \vee a) \\
&= 0 \vee (\overline{q} - a) + (\overline{p} - \overline{q}) \vee (a - \overline{q}) \\
&\geq \overline{p} - \overline{q} = \overline{p-q} > 0
\end{aligned}$$

در نتیجه

$$[(a-\overline{q})^+] + [(a-\overline{p})] \supseteq [(a-\overline{q})^+ + (a-\overline{p})^-] \supseteq [\overline{p-q}] = E$$

از طرف دیگر $(a-\overline{p})^+ \wedge (a-\overline{p})^- = 0$. در نتیجه $[(a-\overline{p})^+] \cap [(a-\overline{p})^-] = 0$ بنابراین داریم $[(a-\overline{p})^+] < [(a-\overline{q})^+]$.

حال نشان می‌دهیم که $S\mathcal{L}(M)$ کاملاً منظم است. چون برای هر $J \in S\mathcal{L}(M)$، $J = \bigcup\{[a] | a \in J^+\}$ (در $\mathcal{L}(M)$). داریم $J = S(J) = \bigvee\{S[a] | a \in J^+\}$ (در $S\mathcal{L}(E)$) در نتیجه کافیست ثابت کنیم برای هر $a \in M^+$، $S[a] = \bigvee\{S[(a-\overline{p})^+] | 0 < p \leq 1\}$ در $S\mathcal{L}(M)$ برقرار است. یعنی کافی است ثابت کنیم $S[a] = S(I)$ که در آن $I = \bigcup\{[(a-\overline{p})^+] | 0 < p \leq 1\}$. $S(I) \subseteq S[a]$ واضح است. بنابراین کافی است ثابت کنیم $[a]$، Iـ کوچک است. فرض کنیم $[a] + J = M$. در نتیجه $u \in [a] + J$، پس $r > 0$ در A و $b_1 \in J$ موجودند به طوری که $u \leq ra + b_1$. چون A کراندار است، $n \in N$ وجود دارد به طوری که $0 < r < n$. بنابراین $u \leq ra + b_1 \leq na + b_1$. حال قرار می‌دهیم $b = \frac{1}{n}|b_1|$، درنتیجه داریم

$$
\begin{aligned}
& \circ < \frac{۱}{n} \leq a + \frac{۱}{n} b_۱ = a + b \\
\Rightarrow\ & [a \vee b] = [a] + [b] \supseteq [a+b] \supseteq [\overline{\frac{۱}{n}}] = M \\
\Rightarrow\ & \exists p, q \in Q; \circ < \overline{p} < \overline{q} < a \vee b \\
\Rightarrow\ & \overline{q-p} \leq (a-p) \vee (b-p) \leq (a-p)^{+} \vee b \in I + J \\
\Rightarrow\ & \overline{q-p} \in I + J \\
\Rightarrow\ & I + J = M
\end{aligned}
$$

یعنی $[a]$، Iـ کوچک است و لذا $S\mathcal{L}(\mathcal{M})$ کاملاً منظم است. برای اثبات فشرده بودن $S\mathcal{L}(\mathcal{M})$ کافیست توجه کنیم که چون M کراندار است، $\mathcal{L}(\mathcal{M})$ فشرده بوده لذا $S\mathcal{L}(\mathcal{M})$ نیز فشرده است. در نتیجه حکم ثابت است.

۱۰.۲.۳ نتیجه اگر A یک حلقه مرتب کراندار و M یک $f-$مدول کراندار روی A باشد آنگاه $S\mathcal{L}(M)$ کاملاً منظم و فشرده است.

اثبات: ابتدا ثابت می‌کنیم $\tilde{A}$ کراندار است. برای این منظور فرض کنیم $a/s \in \tilde{A}$ که در آن $a \in A$ و $s \geq ۱$. چون A کراندار است، $n \in N$ وجود دارد به طوریکه $|a| \leq n$. بنابراین

$$|a/s| = |a|/s \leq |a|/۱ \leq n/۱ = n$$

در نتیجه $\tilde{A}$ کراندار است. به همین ترتیب ثابت می‌شود که $\tilde{M}$ نیز کراندار است. پس $\tilde{M}$ یک $f-$مدول روی $\tilde{A}$ است. چون $\tilde{A}$ $Q-$جبر است پس بنا بر قضیهٔ ۲.۲.۳ $S\mathcal{L}(\tilde{M})$ کاملاً منظم وفشرده است. و بنابراین بنا بر قضیهٔ ۸.۲.۳ $S\mathcal{L}(M)$ نیز کاملاً منظم وفشرده است.

اگر L یک لاتیس کامل باشد که عضو $1 \in L$ در آن فشرده باشد، به همان شکل مشابه در ۷.۴.۱ می‌توان اشباع‌گر $s_L : L \to L$ را تعریف کرد. در این صورت $SL = Fix(s)$ همیشه یک لاتیس کامل است که فشرده است که عضو $1 \in L$ در آن فشرده است. برای هرحلقهٔ A، $SId(A)$، اشباع شدهٔ لاتیس همهٔ ایده‌آلهای A، همواره یک فریم است (بناشفسکی—هارتینگ [۳]). برای هر f—حلقهٔ قوی A، $SId(A)$، اشباع شدهٔ لاتیس همهٔ ایده‌آلهای A، با $S\mathcal{L}(A)$ برابر است (بناشفسکی [۱]). ولی برای مدولها و l—مدولها و حتی فضاهای ریس با هرقدر شرط اضافی قوی، برقرار نیست. برای باز شدن بیشتر مطلب به مثال زیر توجه کنید.

۱۱.۲.۳ مثال $S\mathcal{L}(M)$ و $Ssub(M)$ در حات کلی باهم برابر یا حتی یکریخت نیستند. به عنوان مثال فرض کنیم $A = R$ با ترتیب طبیعی، و $M = R^2$ باترتیب مولفه‌ای، یعنی $(x, y) \leq (x', y')$ اگر و تنها اگر $x \leq x'$ و $y \leq y'$. واضح است که M یک f—مدول است، در واقع M یک فضای ریس کراندار، یکنواخت، ارشمیدسی و کامل است. $S\mathcal{L}(M)$ و $Ssub(M)$ برابر و حتی یکریخت نیز نیستند. زیرا:

$\mathcal{L}(M) = \{0, M\} \cong \mathbf{2}$ در حالی که $Ssub(M) = \{Rx | x \in M\}$

چون به ازای هر $x \in M$ و $x \neq$، Rx ماکسیمال است، لذا $s_{sub(M)}(Rx) = Rx$. درنتیجه $S\mathcal{L}(M) = \{0, M\} \cong \mathbf{2}$ در حالی که $Ssub(M) = \{Rx | x \in M\}$ که یکی نیستند.

۳.۳ طیف ℓ—ایدآلهای بسته

۱.۳.۳ نماد گزاری قرار می‌دهیم $c_E : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ با ضابطهٔ $I \longmapsto \overline{I}$، و $Cl(E) = \{I | c_E(I) = \overline{I} = I\}$ را طیف تمام ایدآل‌های بسته می‌نامیم.

طیف ایدآل‌های بسته و طیف ماکسیمال یکریخت هستند اگر فضای ریس کامل و به طور یکنواخت کراندار باشد. قبل از آن قضیهٔ زیر را می‌بینیم.

۲.۳.۳ قضیه فرض کنیم E یک فضای ریس کامل باشد. در این صورت $Cl(E)$ یک فریم زیرچسبان و $c_E : \mathcal{L}(E) \to Cl(E)$ یک خارج قسمت زیرچسبان است و به علاوه اگر E یک فضای ریس به طور یکنواخت کراندار باشد آنگاه c_E هم چگال است.

اثبات: فرض کنیم $I, J \in Cl(E)$ و $I \subset J$. ادعا می‌کنیم $E = J + J^{\perp}$ و $E \neq I + J^{\perp}$. فرض کنیم $x \in \overline{J^{\perp}}$. در این صورت دنباله‌ای چون $(x_n)_{n\geq ۱}$ در $J^{\perp}$ وجود دارد به طوری که $x = O - \lim_{n\to\infty} x_n$. برای هر $h \in J$ داریم

$$|x| \wedge |h| = O - \lim_{n\to\infty}(|x_n| \wedge |h|) = O - \lim_{n\to\infty} ۰ = ۰$$

بنابراین $x \in J^{\perp}$، یعنی $J^{\perp}$ بسته است.

چون E کامل است، ارشمیدسی است. پس E یک دنبالهٔ پوچ ناصفر است. در نتیجه $B(J) = \overline{J} = J$ و چون E کامل است $E = B(J) \oplus J^{\perp} = J \oplus J^{\perp}$.

حال برای اثبات $E \neq I + J^{\perp}$، فرض کنیم $x \in J \setminus I$. ادعا می‌کنیم $x \notin I + J^{\perp}$. اگر $x \in I + J^{\perp}$ باشد، $a \in I$ و $b \in J^{\perp}$ موجود است به طوری که $x = a + b$. بنابراین $b = x - a \in J \cap J^{\perp}$، در نتیجه $b = ۰$. و این با $x \notin I$ تناقض دارد.

با توجه به تبصرهٔ ۲.۲.۲ و قضیهٔ ۵.۳.۳ (۴)، $c_E : \mathcal{L}(E) \to \mathcal{L}(E)$ یک عملگر بستار است که اشتراک متناهی را حفظ می‌کند، بنابراین یک هسته است که $fix(c_E) = Cl(E)$، در نتیجه $Cl(E)$ یک فریم، c_E ک خارج قسمت زیر چسبان است.

در پایان، فرض کنیم $E = \overline{J}$ و $u > ۰$ در E چنان باشد که $E = [u]$.

دنبالهٔ $(u_n)_{n\geq ۱}$ در J وجود دارد که $u = O - \lim_{n\to\infty} u_n$. می‌توانیم فرض کنیم $u > n_n > ۰$. با توجه به تعریف، دنبالهٔ پوچ $(x_n)_{n\geq ۱}$ موجود است به طوری که $u - u_n \leq x_n$. چون E یک فضای ریس به طور یکنواخت کراندار است پس

$1 > r > 0$ و $m \in N$ وجود دارد به طوری که $x_m \leq ru$. در نتیجه

$$\begin{aligned} 0 < u - u_m \leq x_m \leq ru \quad &\Rightarrow \quad 0 < (1-r)u \leq u_m \\ &\Rightarrow \quad 0 < u \leq \frac{1}{1-r} u_m \in J \\ &\Rightarrow \quad u \in J \end{aligned}$$

بنابراین $E = J$. پس c_E هم چگال است.

۳.۳.۳ نتیجه فرض کنیم ریس کامل و به طور یکنواخت کراندار باشد. در اینصورت یک یکریختی $h : S\mathcal{L}(E) \to C\mathcal{L}(E)$ وجود دارد به طوری که $hS_E = c_E$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \xrightarrow{S_E} & S\mathcal{L}(E) \\ & c_E \searrow & \downarrow h \\ & & Cl(E) \end{array}$$

اثبات: با توجه به قضیهٔ ۸.۲.۳ و ۶.۱.۳(۳) واضح است.

در ادامه این بخش قصد داریم ثابت کنیم که در طیف فوق طیف ماکسیمال و طیف ایدآل‌های بسته هر دو کاملاً منظم هستند. قبل از آن به لم زیر توجه می‌کنیم:

۴.۳.۳ نتیجه فرض کنیم E یک فضای ریس کامل و به طور یکنواخت کراندار باشد. در این صورت $Cl(E)$ فریم فشرده و کاملاً منظم است.

اثبات: با استفاده از نتیجهٔ ۴.۲.۳ و قضیهٔ ۲.۲.۳ واضح است.

لازم به تذکر است که طیف ایدآل‌های بسته تحت شرایط کمتری نیز کاملاً منظم است. و نتیجهٔ ۴.۳.۳ در بخش بعد به کار گرفته نمی‌شود. در واقع قضیهٔ ۵.۳.۳ است که از اهمیت بیشتری برخوردار است.

۵.۳.۳ قضیه فرض کنیم E یک فضای ریس به طور یکنواخت کراندار و ارشمیدسی باشد در این صورت $Cl(E)$ کاملاً منظم و فشرده است.

اثبات: فشرده بودن $Cl(E)$ واضح است زیرا بنا به قضیهٔ ۴.۲.۳ قسمت دوم، $c_E : \mathcal{L}(E) \to C\mathcal{L}(E)$ یک نگاشت فریمی و هم چگال است، چون $\mathcal{L}(E)$ فشرده است پس $Cl(E)$ نیز فشرده است. حال ثابت می‌کنیم $Cl(E)$ کاملاً منظم است. چون برای هر $J \in Cl(E)$، $J = \bigcup\{[a] | a \in J^+\}$ (در $\mathcal{L}(E)$). داریم $J = \overline{J} = \bigvee\{\overline{[a]} | a \in J^+\}$ (در $Cl(E)$). در نتیجه بنابه ۵.۲.۳ کافی است ثابت کنیم برای هر $a \in E^+$، $\overline{[a]} = \bigvee\{\overline{[(a-p)^+]} | 0 < p \leq 1\}$ در $Cl(E)$ برقرار است. یعنی کافی است ثابت کنیم $\overline{[a]} = \overline{I}$ که در آن $I = \bigcup\{[(a-p)^+] | 0 < p \leq 1\}$. $\overline{I} = \overline{[a]}$ واضح است. حال ثابت می‌کنیم $a \in \overline{I}$. چون $a - (a - n^{-1}) = n^{-1}$ و E ارشمیدسی است، $n^{-1} \downarrow 0$. در نتیجه $a = a - \lim_{n\to\infty} a - n^{-1}$ پس $a = a^+ = O - \lim_{n\to\infty}(a - n^{-1})^+$ لذا $a \in \overline{I}$ و حکم ثابت است.

۶.۳.۳ تعریف فرض کنیم A و B دو فضای ریس باشند و $f : A \to B$ یک نگاشت ریس باشد. f را یک نگاشت ریس پیوسته گوییم هر گاه برای هر دنبالهٔ پوچ $(x_n)_{n\geq 1}$ در A، دنبالهٔ $(f(x_n))_{n\geq 1}$ در B پوچ باشد.

۷.۳.۳ لم فرض کنیم $f : A \to B$ یگ نگاشت ریس باشد. آنگاه:

۱. اگر $x_n \downarrow x$ آنگاه $f(x_n) \downarrow f(x)$.

۲. اگر $a = O - \lim_{n\to\infty} a_n$ آنگاه $f(a) = O - \lim_{n\to\infty} f(a_n)$.

اثبات: (۱) قرار می‌دهیم $t_n = x_n - x$. در این صورت $t_n \downarrow 0$. بنابراین $f(t_n) \downarrow 0$. اما $f(t_n) = f(x_n) - f(x)$، در نتیجه $f(x_n) \downarrow f(x)$.

(۲) دنبالهٔ $(t_n)_{n\geq 1}$ وجود دارد که $t_n \downarrow 0$ و $|a - a_n| \leq t_n$. در نتیجه $f(t_n) \downarrow 0$ و

$$|f(a) - f(a_n)| = f(|a - a_n|) \leq f(t_n)$$

و این بدین معنی است که $f(a) = O - \lim_{n\to\infty} f(a_n)$.

فصل ۴

دوگان کاکوتانی بدون نقطه

۱.۴ فانکتورهای طیفها

۱.۱.۴ نمادگزاری رستهٔ تمام فضاهای ریس به طور یکنواخت کراندار و ارشمیدسی، همراه با نگاشت‌های ریس پیوسته بین آنها را با $\mathcal{B}d\mathcal{AR}sz$ نمایش می‌دهیم.

ما شاید به راحتی ثابت کنیم که $E \longmapsto S\mathcal{L}(E)$ یک فانکتور است. در واقع $L \longmapsto SL$ در حالت کلی فانکتور نیست. برای داشتن یک چنین فانکتور، ایدآل‌های بسته و طیف آنها تعریف می‌شود. در آخرین قضیهٔ این بخش ثابت می‌شود $E \longmapsto Cl(E)$ یک فانکتور است و به این ترتیب مشکل فوق حل می‌شود.

۲.۱.۴ قضیه

۱. اگر $f : E \to D$ یک نگاشت ریس پیوسته باشد آنگاه برای هر ایده‌آل J از E داریم $\mathcal{L}f(\overline{J}) \subseteq \overline{\mathcal{L}f(J)}$.

۲. ضابطهٔ $E \longmapsto Cl(E)$ یک فانکتور از $\mathcal{B}d\mathcal{AR}sz$ به $KCRFrm$ است.

اثبات: (۱) فرض کنیم $a \in \overline{J}$ و در این صورت دنبالهٔ $(a_n)_{n\geq ۱}$ در J یافت می‌شود به طوری که $a = O - \lim_{n\to\infty} a_n$. چون f پیوسته است $f(a) = O - \lim f(a_n)$. بنابراین $f(a) \in \overline{\mathcal{L}f(J)}$. این بدین‌معنی است که $f[\overline{J}] \subseteq \overline{\mathcal{L}f(J)}$ د نتیجه $\mathcal{L}f(\overline{J}) \subseteq \overline{\mathcal{L}f(J)}$.

(۲) با توجه به (۱) داریم $\mathcal{L}f/Cl(E) : Cl(E) \to cl(D)$ خوشتعریف است و چون $\mathcal{L}(.)$ فانکتور است و دیاگرام

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \xrightarrow{c_E} & Cl(E) \\ \mathcal{L}_f & & \downarrow \mathcal{L}f/Cl(E) \\ \mathcal{L}(D) & \xrightarrow{C_D} & Cl(D) \end{array}$$

جابجا می‌شود، $E \longmapsto Cl(E)$ فانکتور است.

۳.۱.۴ نتیجه $\mathcal{C} : KCRFrm \to \mathcal{B}d\mathcal{UAR}sz$ یک فانکتور است .

با توجه به قضیه ۱۸.۳، ضابطهٔ $E \longmapsto Cl(E) = \mathcal{M}E$ یک فانکتور است . آن را با $\mathcal{M}$ نشان می دهیم. در قضیه زیر می بینیم که $\mathcal{C},$ الحاق راست $\mathcal{M}$ است ، و این صورت توپولوژی بدون نقطه قضیه کاکوتانی را بدست می دهد.

۲.۴ فانکتور توابع حقیقی پیوسته

در بخش قبل دیدیم که $E \longmapsto Cl(E)$ که آن را با $\mathcal{M}$ نشان می‌دهیم یک فانکتور است. در این بخش برای این فانکتور یک الحاق راست پیدا می‌کنیم. این فانکتور به ازای هر فریم فشرده و کاملاً منظم L، یک فضای ریس یکنواخت (که در این بخش معرفی می‌شود) و ارشمیدسی نسبت داده می‌شود که با توابع حقیقی پیوسته روی L تعریف می‌شود.

ابتدا فریم اعداد حقیقی را تعریف می‌کنیم. این فریم را با $\mathcal{R}$ نشان می‌دهیم و آن را فریم تولید شده توسط زوج‌های (p,q) از اعداد گویا همراه با روابط زیر می‌گیریم:

$$(p,q) \wedge (r,s) = (p \vee r, q \wedge s) \quad (R_۱)$$

$(R_۲)$ اگر $p \le r < q < s$ آنگاه $(p,q) \vee (r,s) = (p,s)$

$(R_۳)$ $(p,q) = \bigvee\{(r,s)|p < r < s < q\}$

$(R_۴)$ $e = \bigvee\{(p,q)|p,q \in Q\}$

توجه کنید که در نظریهٔ مجموعهٔ زرملو ـ فرانکل $\mathcal{R} \simeq O(R)$. حال فرض کنیم $\mathcal{C}(L)$ مجموعه تمام همریختی‌های فریمی از $\mathcal{R}$ به L باشد. $\mathcal{C}(L)$ به عنوان fـ حلقه توسط ب. بناشفسکی ([۱] و [۲]) مطالعه شده است.

حال عمل‌های $(+, ., \wedge, \vee, -)$ را روی $\mathcal{C}(L)$ تعریف می‌کنیم که با این عمل‌ها تشکیل یک fـ حلقه می‌دهد. (بناشفسکی ([۱] و [۲]))

(۱) فرض کنیم $\diamond : Q^۲ \to Q$ یک عمل پیوسته (با توپولوژی معمولی روی Q) باشد و $\alpha, \beta \in \mathcal{C}(L)$. برای هر $p,q \in Q$، تعریف می‌کنیم

$$\alpha\diamond\beta(p,q) = \bigvee\{\alpha(r,s) \wedge \beta(t,u)|(r,s)\diamond(t,u) \le (p,q)\}$$

که در آن $(r,s)\diamond(t,u) \le (p,q)$ بدین معنی است که هر گاه $r < x < s$ و $t < y < s$ آنگاه $p < x\diamond y < q$.

(۲) $(-\alpha)(p,q) = \alpha(-q,-p)$.

(۳) برای هر $r \in Q$، ثابت متناظر را با $\overline{r}$ نشان می‌دهیم و با $\overline{r}(p,q) = [[p < r < q]]$ تعریف می‌کنیم که در آن علامت $[[...]]$ مقدار درستی گزارهٔ دورن آن است و مقدار ۰ یا ۱ را اختیار می‌کند.

اما در اینجا، $\mathcal{C}(L)$ را به عنوان یک فضای ریس مطالعه می‌کنیم. بنابراین به یک ضرب اسکالر احتیاج داریم که برای هر $r \in Q$ و $\alpha \in \mathcal{C}(L)$ به صورت $r\alpha = \overline{r}\alpha$ تعریف می‌کنیم که ضرب سمت راست تساوی ضرب $\mathcal{C}(L)$ به عنوان حلقه است.

همهٔ ویژگی‌هایی که $\mathcal{C}(L)$ را یک فضای ریس می‌سازد، از fـ حلقه بودن $\mathcal{C}(L)$ نتیجه می‌شود به جز ویژگی‌های زیر

۱. $(r+s)\alpha = r\alpha + s\alpha \quad \alpha \in \mathcal{C}(L), r,s \in Q$

۲. اگر $r \geq \circ$ و $\alpha \geq \circ$ آنگاه $r\alpha \geq \circ$.

برای اثبات (۱) کافی است ثابت کنیم $\overline{r+s} = \overline{r} + \overline{s}$ و برای اثبات (۲) کافی است ثابت کنیم اگر $r \geq \circ$ آنگاه $\overline{r} \geq \overline{\circ}$.

هر دو آنها را لم بعد ثابت می‌کند.

۱.۲.۴ لم فرض کنیم L یک فریم و $r, s \in Q$ و $\alpha \in \mathcal{C}(L)$.

۱. برای هر عمل پیوستهٔ $\diamond : Q^{۲} \to Q$ داریم $\overline{r}\diamond\overline{s} = \overline{r\diamond s}$.

۲. $\alpha \geq \circ$ اگر و تنها اگر $\alpha(-,\circ) = \circ$، که در آن $(-,\circ) = \bigvee\{(p,\circ) | p < \circ\}$.

۳. $\alpha \leq \circ$ اگر و تنها اگر $\alpha(\circ,-) = \circ$، که در آن $(\circ,-) = \bigvee\{(\circ,p) | o < p\}$.

۴. اگر $\alpha \leq \beta$ و $\beta \in \mathcal{C}(L)$، آنگاه برای هر $p \in Q$ $\alpha(p,-) \leq \beta(p,-)$. که در آن $(p,-) = \bigvee_{p<q}(p,q), (-,p) = \bigvee_{q<p}(q,p)$.

اثبات: فرض کنیم $p, q \in Q$.

حالت اول: فرض کنیم $\overline{r\diamond s}(p,q) = \circ$. ثابت می‌کنیم $\overline{r}\diamond\overline{s}(p,q) = \circ$. فرض کنیم $x, y, z, w \in Q$ چنان باشند که $(x,y)\diamond(z,w) \leq (p,q)$. چون $[[p < r\diamond s < q]] = \circ$، یکی از گزاره‌های $x < r < y$ یا $z < s < w$ نادرست است. بنابراین $[[x < r < y]] \wedge [[z < s < w]] = \circ$، و در نتیجه

$$\overline{r}\diamond\overline{s}(p,q) = \bigvee\{[[x < r < y] \wedge [[z < s < w]] | (x,y)\diamond(z,w) \leq (p,q)]] = \circ$$

حالت دوم: فرض کنیم $\overline{r\diamond s}(p,q) = ۱$، بنابراین $p < r\diamond s < q$. قرار دهید $V = \{(t_{۱}, t_{۲}) \in Q^{۲} | p < t_{۱}\diamond t_{۲} < q\}$. در حقیقت V نگارهٔ معکوس بازهٔ باز $< p, q >$ است و لذا $x, y, z, w \in Q$ موجود است به طوری که

$\bigvee \subseteq < x,y > x < z,w >$ $(r,s) \in$. این بدین معنی است که $(x,y)\Diamond(z,w) \leq (p,q)$ و $[[x < r < y]] = ۱ = [[z < s < w]]$.

بنابراین

$$۱ = \bigvee\{[[x < r < y]] \wedge [[z < s < w]] | (x,y)\Diamond(z,w) \leq (p,q)\} = \overline{r}\Diamond\overline{s}(p,q)$$

لذا $\overline{r}\Diamond\overline{s} = \overline{r\Diamond s}$.

(۲) فرض کنیم $\alpha \geq ۰$ و $p < ۰$. داریم

$$\begin{aligned}\alpha(p,۰) = (۰ \vee \alpha)(p \vee ۰) &= \bigvee\{[[r < ۰ < s]] \wedge \alpha(z,w) | (r,s) \vee (z,w) \leq (p,۰)\} \\ &= \bigvee\{[[r < ۰ < s]] \wedge \alpha(z,w) | [[r < ۰ < s]] = ۰\} = ۰\end{aligned}$$

زیرا اگر $(r,s) \vee (z,w) \leq (\beta,۰)$ آنگاه $s \leq s \vee w \leq ۰$ یعنی $[[r < ۰ < s]] = ۰$. در نتیجه $\alpha(-,۰) = ۰$.

برعکس، فرض کنیم $\alpha(-,۰) = ۰$ و $p,q \in Q$. کافی است ثابت کنیم

$$\alpha \wedge ۰(p,q) = [[p < ۰ < q]] = ۰(p,q)$$

حالت اول: فرض کنیم $[[p < ۰ < q]]$. چون برای هر $r > q$، $(p,r) \wedge (p,q) \leq (p,q)$، داریم

$$\begin{aligned}\alpha \wedge ۰(p,q) &= \bigvee\{\alpha(r,s) \wedge [[z < ۰ < w]] | (r,s) \wedge (z,w) \leq (p,q)\} \\ &\geq \bigvee\{\alpha(p,r) \wedge [[p < ۰ < q]] | r > q\} \\ &= \alpha(\bigvee_{r>q}(p,r)) \\ &= \alpha((p,-) \vee (-,۰)) \\ &= \alpha(e) = ۱\end{aligned}$$

در نتیجه $\alpha \wedge \circ(p,q) = 1$.

حالت دوم: فرض کنیم $[[p < \circ < q]] = \circ$.

فرض کنیم $\circ \leq p < q$. لذا اگر $(r,s) \wedge (z,w) \leq (p,q)$ آنگاه $[[z < \circ < w]] = \circ$. در نتیجه

$$\alpha \wedge \circ(p,q) = \bigvee\{\alpha(r,s) \wedge [[z < \circ < w]] | (r,s) \wedge (z,w) \leq (p,q)\} = \circ$$

فرض کنیم $p < q \leq \circ$. لذا اگر $(r,s) \wedge (z,w) \leq (p,q)$ و $[[z < \circ < w]] = 1$ آنگاه $(r,s) \leq (p,q)$. در نتیجه

$$\begin{aligned}
\alpha \wedge \circ(p,q) &= \bigvee\{\alpha(r,s) \wedge [[z < \circ < w]] | (r,s) \wedge (z,w) \leq (p,q)\} \\
&\leq \bigvee\{\alpha(r,s) \wedge [[z < \circ < w]] | (r,s) \leq (p,q)\} \\
&\leq \bigvee\{\alpha(r,s) | (r,s) \leq (p,q)\} \\
&\leq \alpha(\bigvee\{(r,s) | (r,s) \leq (p,q)\}) \\
&= \alpha(p,q) \leq \alpha(-,\circ) = \circ
\end{aligned}$$

بنابراین در هر صورت $\alpha \wedge (p,q) = [[p < \circ < q]]$ برقرار است یعنی $\alpha \geq \circ$.

(۳) از (۲) نتیجه می‌شود.

(۴) فرض کنیم $p \in Q$. آنگاه

$$\begin{aligned}
\alpha(p,-) = (\alpha \wedge \beta)(p,-) &= \bigvee\{\alpha(r,s) \wedge \beta(z,w) | r, z \geq p\} \\
&= \bigvee\{\beta(z,w) | z \geq p\} = \beta(p,-)
\end{aligned}$$

۲.۲.۴ قضیه فرض کنیم L یک فریم باشد

۱. $\mathcal{C}(L)$ ارشمیدسی است.

۲. اگر L فشرده باشد آنگاه $\mathcal{C}(L)$ کراندار است.

اثبات: (۱) فرض کنیم $\alpha \in \mathcal{C}(L)$ و $\alpha \leq n^{-1}$ $(n = 1, 2, \cdots)$. لذا با توجه به لم قبل برای هر $n \in N$ داریم $\alpha(n^{-1}, -) = 0$. بنابراین $\alpha(0, -) = \bigvee_{n=1}^{\infty} \alpha(n^{-1}, -) = 0$. در نتیجه بنابر لم قبل $\alpha \leq 0$. این ثابت می‌کند $\mathcal{C}(L)$ ارشمیدسی است.

(۲) فرض کنیم $\alpha \in \mathcal{C}(L)$. داریم $\bigvee_{n=1}^{\infty} \alpha(-n, n) = 1$. چون L فشرده است، n ای وجود دارد به طوری که $\alpha(-n, n) = 1$. در نتیجه $(\alpha - n)(0, -) = \alpha(n, -) = 0$ و همچنین $(\alpha + n)(-, 0) = \alpha(-, -n) = 0$. بنابراین با لم قبل، $-n \leq \alpha \leq n$. در نتیجه $\alpha \in [1]$. این بدین معنی است که $\mathcal{C}(L) = [1]$، یعنی $\mathcal{C}(L)$ کراندار است.

۳.۲.۴ تبصره فرض کنیم $f : L \to L'$ یک همریختی فریمی باشد. نگاشت $C(f) : \mathcal{C}(L) \to \mathcal{C}(L')$ را با ضابطهٔ $\alpha \longmapsto f \circ \alpha$ تعریف می‌کنیم. چون $C(f)$ یک همریختی فریمی است([۱] را نگاه کنید)، $\vee, \wedge, ., +$ را حفظ می‌کند. حال فرض کنیم $r \in Q$. داریم

$$C(f)(r\alpha) = C(f)(\overline{r}), C(f)(\alpha) = \overline{r}.C(f)(\alpha) = rC(f)(\alpha)$$

زیرا $C(f)(\overline{r}) = \overline{r}$ (f ۰ و ۱ را حفظ می‌کند). در نتیجه $C(f)$ یک نگاشت ریس است. در نتیجه قضیهٔ زیر را داریم.

۴.۲.۴ قضیه اگر $f : L \to L'$ یک همریختی فریمی باشد $C(f) : \mathcal{C}(L) \to \mathcal{C}(L')$ یک نگاشت ریس است.

۵.۲.۴ قضیه (۱) اگر $f : E \to D$ یک نگاشت ریس باشد، E فضای ریس یکنواخت و D ارشمیدسی باشد، آنگاه f نگاشت ریس پیوسته است .

(۲) برای هر فریم فشرده و کاملاً منظم L ، $\mathcal{C}(L)$ یکنواخت است .

(۳) برای هر همریختی فریمی $f : L \to L'$ در کاتگوری $KCR\mathrm{frm}$ ، $\mathcal{C}(f)$ یک نگاشت ریس پیوسته است .

(۴) اگر L فشرده باشد، آنگاه $\mathcal{C}(L)$ کراندار است .

اثبات: (۱) فرض کنیم $x_n \downarrow 0$، $\text{in } E$. فرض کنیم $k \in N$. چون E یکنواخت است . $m_k \in N$ موجود است به طوری که $m \geq m_k$؛ $0 \leq x_m < \overline{k^{-1}}$. بنابراین $0 \leq f(x_m) \leq f(\overline{k^{-1}}) = k^{-1}f(u)$، که در آن $E = [u]$. چون D و $\inf\{k^{-1}f(u) | k = 1, 2, \cdot\} = 0$، بنابراین $f(x_n) \downarrow 0$. یعنی f پیوسته است.

(۲) فرض کنیم $\alpha_n \in \mathcal{C}(L)$ یک دنباله باشد که $\alpha_n \downarrow 0$ و r و $0 < p < r$ و $r > 0$. برای هر $n \geq 1$ داریم $\alpha_n(-, p) \leq \alpha_{n+1}(-, p)$ و $\alpha_n(p, -) \geq \alpha_{n+1}(p, -)$. ثابت کنیم $0 < p < r$ و $n \in N$ وجود دارند به طوری که $\alpha_n \leq \overline{p}$. فرض کنیم برای هر n, p، $\alpha_n \not\leq \overline{p}$ در نتیجه $\alpha_n(p, -) \neq 0$ و $\alpha_n(-, p) \neq 1$. قرار می دهیم $a_p = \bigvee_{n=1}^{\infty} \alpha_n(-, p)$. داریم $a_p \neq 1$ و $a_p \wedge b_p = 0$. و همین طور داریم $b_p \neq 0$، زیرا اگر $0 < q < r$ وجود داشته باشد به طوری که $b_p = 0$. در این صورت برای هر p، $q < p < r$ داریم $a_p \geq \alpha_m(-, p) \vee \alpha_m(q, -) = 1$ لذا با به بکار بردن فشردگی L، $n \in N$ وجود دارد به طوری که $\alpha_n(-, p) = 1$ و این تناقض است. حال چون L کاملاً منظم است، $\alpha \in \mathcal{C}(L)$ یافت می شود به طوری که $0 < coz(\alpha) \leq b_p$. قرار می دهیم.

$\beta = \frac{1}{n}|\alpha|$، که در آن $n\overline{p} \geq \alpha$. داریم $coz(\beta) \wedge a_p = 0$ و $0 < \beta \leq \overline{p}$. در نتیجه

$$
\begin{aligned}
(\beta - \alpha_n)(0, -) &= \bigvee\{\beta(r, s) \wedge \alpha_n(z, w) | (r, s) - (z, w) \leq (0, -)\} \\
&= \bigvee\{\beta(r, s) \wedge \alpha_n(z, w) | z < w \leq r < s\} \\
&= \bigvee\{\beta(r, s) \wedge \alpha_n(z, w) | z < w \leq r < s \ \text{و}\ w > 0 \ \text{و}\ r \leq p\} \\
&\quad (\text{زیرا}\ \alpha_n > 0 \ \text{و}\ 0 < \beta \leq p) \\
&\leq coz\beta \wedge \alpha_n(-, p) \leq coz\beta \wedge a_p = 0
\end{aligned}
$$

بنابر این برای هر n، $0 < \beta \leq \alpha_n$ (با استفاده از لم ۱.۴). که با $\alpha_n \downarrow 0$ در تناقض است. بنابراین n و $0 < p < r$ وجود دارد به طوری که $\alpha_n \leq \overline{p} < \overline{r}$. این یکنواخت بودن $\mathcal{C}(L)$ را ثابت می کند.

(۳) از (۱) و (۲) نتیجه می شود.

برای اثبات (۴) فرض کنید $\alpha \in \mathcal{C}(L)$. دا ریم $\bigvee_{n=1}^{\infty} \alpha(-n,n)$ چون L فشرده است nی یافت می شود به طوری که $\alpha(-n,n) = 1$. در نتیجه $(\alpha - n)(0,-) = \alpha(n,-) = 0$ و بنابراین $\alpha(-,-n) = \alpha + n(-,0) = 0$ و با استفاده از لم ۱.۴، $-n \leq \alpha \leq n$. لذا $\alpha \in [\overline{1}]$. این کراندار بودن $\mathcal{C}(L)$ را ثابت می کند.□

۳.۴ الحاق بین فانکتورها

از قضیهٔ ۲.۱.۴ یادآوری می‌کنیم که فانکتور $\mathbf{C}\mathcal{L} = \mathcal{M} : \mathbf{BUARsz} \to \mathbf{KCRFrm}$ با ضابطهٔ $E \longmapsto \mathcal{M}E$ یک فانکتور است. در قضیهٔ زیر اثبات می کنیم که $\mathcal{M}$ الحاق چپ C است.

۶.۲.۴ قضیه $\mathcal{M}$ الحاق چپ $\mathcal{C}$ است.

اثبات: فرض کنید L یک فریم فشرده وکاملاً منظم باشد. $\varphi_L : \mathcal{LC}(L) \to L$ را با ضابطه$\varphi_L(I) = \bigvee_{x \in I^+} coz(x)$ تعریف می کنیم. به سادگی می توان دید که φ_L یک همریختی فریمی پوشاست . همچنین φ_L هم چگال است. برای این منظور فرض کنیم $coz(\alpha) = e$. در نتیجه داریم، $coz(|\alpha|) = e$ لذا $|\alpha|(0,-) = e$ لذا $q > 0$ وجود دارد به طوری که $|\alpha|(q,-) = e$ یعنی $q > 0$ وجود دارد به طوری که $|\alpha| > q > 0$ بنابراین، $[\alpha] = \mathcal{C}(L) = e_{\mathcal{LC}(L)}$

چون $C_{\mathcal{C}(L)} : \mathcal{LC}(L) \to Cl\mathcal{C}(L)$ کوچکترین خارج قسمت هم چگال $\mathcal{LC}(L)$ است، یک همریختی یکتا چون $\sigma_L : \mathcal{MC}(L) \to L$ وجود دارد به طوری که $\sigma_L \circ C_{\mathcal{C}(L)} = \varphi_L$. به عبارت دیگر همریختی یکتایی چون $\sigma_L : \mathcal{MC}(L) \to L$ وجود دارد به طوری که برای هر $\alpha \in \mathcal{C}(L)$، $\sigma_L(<\alpha>) = coz(\alpha)$ که در آن $\overline{[\alpha]} = <\alpha>$.

حال، برای هر $E \in \mathcal{B}d\mathcal{UAR}sz$، $\tau_E : E \to \mathcal{C}(\mathcal{M}(E)$ را به صورت $\tau_E(a) = \hat{a}$ تعریف می کنیم که در آن $\hat{a}(p,q) =< ((a-\overline{p}) \wedge (\overline{q}-a))^+ >$. ثابت می کنیم. (σ_L, τ_A) یک الحاق می دهد. برای شروع ثابت می کنیم τ_A پیوسته است . باید ثابت کنیم که برای هر عمل $\diamond = +, \vee, \wedge$ و برای هر $a, b \in E$ و $r \in Q$ داریم $\widehat{a \diamond b} = \hat{a} \diamond \hat{b}$، و $\widehat{(ra)} = r\hat{a}$. ابتدا توجه می کنیم که برای هر $x, y \in E$، داریم $(x \wedge y)^+ = x^+ \wedge y^+$. بنابراین رابطه های

$$\widehat{(-a)}(p,q) =< (-a-\overline{p})^+ \wedge (\overline{q}+a)^+ >= \hat{a}(-q,-p) = (-\hat{a})(p,q)$$

و برای هر $r \geq ۰$،

$$\widehat{(ra)} =< (ra-\overline{p})^+ \wedge (\overline{q}-ra)^+ >= (a-r^{-۱}\overline{p})^+ \wedge (r^{-۱}\overline{q}-a)^+ >= \hat{a}(r^{-۱}\overline{p}, r^{-۱}\overline{q}) = (r\hat{a})(p,q)$$

رابطهٔ $\widehat{(ra)} = r\hat{a}$ را ثابت می کند.

فرض کنیم $p, q, r, s, , w, z \in Q$ چنان باشند که $(r,s) + (w,z) \leq (p,q)$. داریم

$$\begin{aligned}(a+b-\overline{p}) \geq (a-\overline{r}+b-\overline{w}) &= ۲((a-\overline{r}) \wedge (b-\overline{w}) + (a-\overline{r}) \wedge (b-\overline{w}))\\ &= ۲(۲((a-\overline{r}) \wedge (b-\overline{w})) + d) \geq ۴((a-\overline{r}) \wedge (b-\overline{w}))\end{aligned}$$

که در آن $d = (a-\overline{r}) \vee (b-\overline{w}) - (a-\overline{r}) \wedge (b-\overline{w}) \geq ۰$. در نتیجه $(a-\overline{r})^+ \wedge (b-\overline{w})^+ \leq \frac{۱}{۴}(a+b-\overline{p})^+$.

به طور مشابه، $(\overline{s}-a)^+ \wedge (\overline{z}-b)^+ \leq \frac{۱}{۴}(\overline{q}-a-b)^+$. لذا

$$\left\langle ((a-\overline{r}) \wedge (\overline{s}-a))^+ \right\rangle \cap \left\langle ((b-\overline{w}) \wedge (\overline{z}-b))^+ \right\rangle \subseteq \left\langle ((a+b-\overline{p}) \wedge (\overline{q}-a-b)^+ \right\rangle$$

بنا براین $\hat{a}+\hat{b}(p,q) \leq \widehat{a+b}(p,q)$. در نتیجه با استفاده از منظم بودن $\mathcal{R}$، تساوی ثابت می شود.

حال عمل $\wedge$ را در نظر می گیریم. و $p, q, r, s, t, u \in Q$ را در نظر می گیریم به طوری

که $(r,s)\wedge(t,u)\leq(p,q)$ آنگاه داریم $p\leq r\wedge t, s\wedge u\leq q$. بنابراین

$$(a-\overline{r})\wedge(b-\overline{t})\leq(a-\overline{p})\wedge(b-\overline{p})=(a\wedge b)-\overline{p}$$

از طرف دیگر

$$(\overline{s}-a)\wedge(\overline{u}-b)\leq(\overline{q}-a)\vee(\overline{q}-b)=\overline{q}-(a\wedge b)$$

بنابراین $\hat{a}\wedge\hat{b}(p,q)\leq\widehat{a\wedge b}(p,q)$ که با استفاده از منظم بودن$\mathcal{R}$، $\hat{a}\wedge\hat{b}=\widehat{a\wedge b}$ را نشان می دهد.

برای عمل $\vee$، از رابطهٔ $a\vee b=-((-a)\wedge(-b))$، می توان استفاده کرد. در نتیجه τ_E یک نگاشت ریس است. پیوستگی τ_E از قضیهٔ ۴—۵(۱) نتیجه می شود.

حال، معادلات الحاق را ثابت می کنیم:

$$\sigma_{\mathcal{M}E}\mathcal{M}_{\tau_E}=id_{\mathcal{M}E},(\mathcal{C}\sigma_L)\tau_{\mathcal{C}L}=id_{\mathcal{C}L}$$

کافیست ثابت کنیم برای هر $a\in E$، $\alpha\in\mathcal{C}(L)$ و $p,q\in Q$

$coz(((\alpha-\overline{p})\wedge(\overline{q}-\alpha))^{+})=\alpha(p,q)$ و $coz(\hat{a})=<a>$.

برای این منظور فرض کنیم $p<q\leq \circ$. داریم $\overline{q}-a\leq\overline{p}-a$. در نتیجه $|a|\geq(-a)^{+}\geq(\overline{q}-a)^{+}\geq\circ$ یعنی $(\overline{q}-a)^{+}\in<a>$ بنابراین $((a-\overline{p})\wedge(\overline{q}-a))^{+}\in<a>$. در حالت $\circ\leq p<q$ داریم $a-\overline{p}<a$ و بنابر این $\circ<(a-\overline{p})^{+}<a^{+}\in<a>$ در نتیجه $((a-\overline{p})\wedge(\overline{q}-a))^{+}\in<a>$. این بدین معنی است که $coz(\hat{a})=\bigvee_{\substack{\circ\leq p<q\\ p<q\leq\circ}}\hat{a}(p,q)\leq<a>$. برای اثبات عکس نامساوی، فرض کنیم $q\in Q$چنان باشد که $q>$۲a. داریم $\hat{a}(\circ,q)=\langle(a\wedge(\overline{q}-a))^{+}\rangle=<a^{+}>$ در نتیجه $a^{+}\in\hat{a}(\circ,-)$. به طوری مشابه ثابت می شود که $a^{-}\in\hat{a}(-,\circ)$. لذا $a=a^{+}-a^{-}\in coz\hat{\alpha}$. یعنی $coz(\hat{a})=<a>$.

معادله دوم الحاق با استفاده از روابط زیر ثابت می شود:

$$\begin{aligned} coz\left((\alpha-\overline{p})^{+}\wedge(\overline{q}-\alpha)^{+}\right) &= \left((\alpha-\overline{p})^{+}\wedge(\overline{q}-\alpha)\right)^{+}(\circ,-) \\ &= \bigvee\{(\alpha-\overline{p})\vee\circ(r,s)\wedge(\overline{q}-\alpha)\vee\circ(z,w)|r,z\geq\circ\} \\ &= \bigvee\{(\alpha-\overline{p})(r,s)\wedge(\overline{q}-\alpha)(z,w)|r,z>\circ\} \\ &= \bigvee\{\alpha(r+p,s+p)\wedge\alpha(q-w,q-z)|r,z\geq\circ\} \\ &= \alpha\left(\bigvee_{\substack{r,z\geq\circ \\ s>r\ u>z}}(r+p,s+p)\wedge(q-w,q-z)\right) \\ &= \alpha((p,-)\wedge(-,q)) \\ &= \alpha(p,q) \end{aligned}$$

این قضیه را اثبات می کند. □

۴.۴ صورت بدون نقطهٔ قضیهٔ استون وایراشتراس

در این بخش قضیهٔ استون— وایراشتراس را برای $C(L)$ به عنوان فضای ریس اثبات می‌کنیم. این قضیه را صورت بدون نقطهٔ قضیهٔ استون— وایراشتراس تعمیم یافته می نامیم، زیرا هم صورت بدون نقطه است و هم کلی ترین شکل تعمیم یافته است. صورت کلاسیک این قضیه برای $C(X)$ به عنوان فضای ریس در [۱۸] بیان و اثبات شده است.

برای بعضی تعریفها و نتایج که در زیر آورده شده است به [۴] رجوع کنید.

۱.۳.۴ تعریف فرض کنیم L یک فریم باشد. زیر مجموعهٔ $S\subseteq C(L)$ را جدا کننده می‌گوییم هر گه L توسط $Coz(S)$ تولید شود.

۲.۳.۴ تبصره تعریف کلاسیک جداکننده نقاط با این تعریف معادل است، زیرا:

۳.۳.۴ قضیه فرض کنیم X یک فضای فشرده و هاسدورف باشد و A یک زیر جبر یکه از $C(X)$ باشد. اگر مجموعه های همصفر A، $O(X)$ را تولید کنند آنگاه A جداکنندهٔ نقاط است. همچنین اگر A زیر لاتیس $C(X)$ باشد، عکس این مطلب نیز برقرار است.

۴.۳.۴ قضیه (قضیهٔ استون— وایراشتراس) هر $\mathcal{R}$—زیر جبر $C(L)$ که جدا کننده باشد در $C(L)$ به طور یکنواخت چگال است.

در اینجا نماد تحدید $\alpha \in C(L)$ به یک عضو w از L را تعریف می‌کنیم که تحدید یک تابع پیوسته به یک مجموعه باز، متناظر است.

۵.۳.۴ قضیه تحدید $\alpha \in C(L)$ به یک عضو w از L که با نماد $\alpha|_w$ نشان می‌دهیم، عبارت است از $\mathcal{R} \to \downarrow w$ که $\alpha|_w(r,s) = \alpha(r,s) = \alpha(r,s) \wedge w$، که در واقع ترکیب α با نگاشت خارج قسمتی $L \to \downarrow w$ با ضابطهٔ $x \rightsquigarrow x \wedge w$ است.

۶.۳.۴ لم برای هر $\alpha \in C(L)$ و عدد طبیعی k، w_m که $m \in \mathbb{Z}$ وجود دارند که تشکیل یک پوشش می‌دهند، و همچنین $r_m \in \mathbb{Q}$ به طوری که برای هر $k \in \mathbb{Z}$

$$-۱/k \leq (\alpha - r_m)|_{w_m} \leq ۱/k$$

.

۷.۳.۴ قضیه (صورت بدون نقطهٔ قضیهٔ استون— وایراشتراس تعمیم یافته) هر زیر فضا—لاتیس E که جدا کننده باشد و ۱ را در برداشته باشد، به طور یکنواخت در $C(L)$ چگال است.

اثبات: فرض کنیم $\alpha \in C(L)^+$ و k یک عدد طبیعی باشد. فرض کنید $C = \{w_m | m \in \mathbb{Z}\}$ یک پوشش در L باشد، و $r_m \in \mathbb{Q}$ که در لم ۶.۴.۴ آورده شده است

و

$$-1/k \leq (\alpha - r_m)|_{w_m} \leq 1/k, \quad m \in \mathbb{Z}$$

فرض کنیم $w \in C$. با استفاده از کاملاً منظم بودن L،

$$w = \bigvee\{x \in L : x \prec w\} = \bigvee\{\bigvee\{coz(\alpha) : \alpha \in E, coz(\alpha) \leq x\} : x \prec w\}$$
$$= \bigvee\{coz(\alpha)|\alpha \in E, coz(\alpha) \prec w\}$$

در نتیجه $\{coz(\alpha)|\alpha \in E, coz(\alpha) \prec w, w \in C\}$ یک پوشش برای L است. بنابراین با استفاده از فشردگی L، $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ یافت می‌شوند به طوری که $coz(\alpha_1) \vee \cdots \vee coz(\alpha_n) = e$ و $coz(\alpha_i) \prec w_i$. بنابراین یک $r > 0$ وجود دارد به طوری که $r \leq |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n|$. قرار می‌دهیم $\beta_i = \frac{|\alpha_i|}{r} \wedge 1/n$. داریم $\beta_i \in E$، $coz(\beta_i) = coz(\alpha_i) \prec w_i$، و $\beta_1 + ... + \beta_n = 1$. حال قرار می‌دهیم $\beta = r_1\beta_1 + \cdots + r_n\beta_n,\ \beta \in E$. اکنون ادعا می کنیم $|\alpha - \beta| \leq 1/k$.
برای این منظور، فرض کنیم $w \in C' = \{w_1, coz(\beta_1)^*\} \wedge \cdots \wedge \{w_n, coz(\beta_n)^*\}$ که با توجه به گزارهٔ ۱ از [۳] یک پوشش است. داریم

$$(\alpha - \beta)|_w = \sum(\alpha\beta_i - r_i\beta_i)|_w = \sum((\alpha - r_i)|_w)(\beta_i|w)$$

حال برای هر $i, w \leq w_i$ یا $w \leq coz(\beta_i)^*$، و بنابراین $-1/k \leq (\alpha - r_i)|_w \leq 1/k$ یا $\beta_i = 0$، زیرا $coz(\beta_i|_w) = coz(\beta_i) \wedge w$. در نتیجه

$$-1/k\beta_i|_w \leq ((\alpha - r_i)|_w)(\beta_i|_w) \leq 1/k\beta_i|_w$$

لذا با جمع روی i، داریم $-1/k \leq (\alpha - \beta)|_w \leq 1/k$. چون w در یک پوشش تغییر می‌کند، $-1/k \leq \alpha - \beta \leq 1/k$. این همان چیزی است که می‌خواستیم.

۸.۳.۴ تبصره چون هر $\mathbb{R}$—جبر بسته از $C(L)$ یک زیر لاتیس از $C(L)$ است ([۴])و قضیهٔ ۷.۴.۴، قضیهٔ ۴.۴.۴ را نتیجه می دهد.

۵.۴ صورت بدون نقطهٔ قضیهٔ کاکوتانی

هدف نهایی که گفته شد در این فصل بررسی می‌شود. این هدف نهایی صورت بدون نقطهٔ دوگان کاکوتانی است. هر فضای ریس کراندار ارشمیدسی و یکنواخت E را می‌توان در $C(L)$ نشاند، که L یک فریم فشرده و کاملاً منظم است.

۱.۴.۴ لم با نمادهای قضیه ۱.۳.۴، σ_L یکریختی است و τ_E یک به یک است .

اثبات: چون L کاملا منظم است $\{coz(\alpha)|\alpha \in \mathcal{C}(L)\}$، L را تولید می کند. بنابر این چون $\sigma_L(<\alpha>) = coz(\alpha)$ پس σ_L پوشاست. برای اثبات یک به یک بودن σ_L،توجه می کنیم که σ_L چگال است و L و $\mathcal{MC}(L)$ هر دو فشرده و منظم هستند.
برای نشان دادن یک به یک بودن τ_E، فرض کنیم $\hat{a} = 0$ بنابراین $<a> = coz(\hat{a}) = <0> = \{0\}$، در نتیجه $<a> = <0>$، یعنی $a = 0$. پس τ_E یک به یک است.

۲.۴.۴ تبصره از یک الحاق کاتگوریکی، با استفاده از محدود کردن اشیأ دو طرف کاتگوری ها، می توان یک هم ارزی بین دو زیر کاتگوری حاصل، بدست آورد.
این الحاق خاص از طرف فریم ها به محدود کردن اشیأ احتیاج ندارد، زیرا برای هر فریم فشرده و کاملاً منظم L، $\sigma_L : \mathcal{MC}(L) \to L$ یکریختی است. و با استفاده از تعریف زیر طرف فضاهای ریس را محدود می کنیم.

۳.۴.۴ تعریف فضای ریس E را **کامل** می گوییم هر گاه τ_E پوشا باشد.

۴.۴.۴ تبصره چون $\tau_{\mathcal{C}(E)}$ یکریختی است پس $\mathcal{C}(L)$ به طور کامل است. بنابر این، الحاق قضیه ۱.۳.۴ یک هم ارزی بین دو کاتگوری فریم‌های کاملاً منظم و فشرده، و

فضاهای ریس کراندار یکنواخت ارشمیدسی کامل است. و این صورت توپولوژی بدون نقطه قضیه کاکوتانی است که از اصل انتخاب پاک شده است.

فصل ۵

نمایش نگاشت ریس در توپولوژی بدون نقطه

در این فصل، صورت بدون نقطهٔ یک قضیهٔ نمایش در آنالیز را می‌سازیم. این قضیه یک نمایش کلاسیک برای توابع ریس حقیقی روی $C(X)$ است، که برای هر نگاشت ریس حقیقی $\phi : C(X) \to \mathbb{R}$ که $\phi(۱) = ۱$، یک نقطه چون $x \in X$ نسبت می دهد که $\phi = \hat{x}$، که در آن ضابطهٔ $\hat{x}$ عبارت است از $\hat{x}(\alpha) = \alpha(x)$ برای هر $\alpha \in C(X)$ ([۱۶] ص. ۱۶۳ را ببینید). در اثبات کلاسیک بدون مشخص کردن نقطهٔ x از اصل انتخاب استفاده می‌شود.

در این رساله بجای فضای فشرده و هاسدورف از فریم فشرده و کاملاً منظم M و بجای $\hat{x}$ از $\tilde{p}$ که در آن $p \in M$ یک عضو اول است، استفاده می‌شود. $\tilde{p}$ با استفاده از برشهای ددکیند در ساختن عدد حقیقی $\tilde{p}(\alpha)$ تعریف می‌شود. سپس اثبات می شود که هر نگاشت ریس $\phi : C(M) \to \mathbb{R}$ به صورت $\tilde{p}\phi(۱)$ است، که در آن $p = \bigvee coz(ker\phi)$ (لم ۲.۲.۵). در ادامه یک تناظر یک به یک بین نگاشتهای ریس، اعضای اول، و ℓ—ایدآلهای اولی که در $Fix(\eta)$ هستند ایجاد می‌کنیم (قضیهٔ ۴.۲.۵). اگر هم M کاملاً منظم نباشد، می‌توانیم یک فریم کاملاً منظم چون K_M پیدا کنیم که

$C(M) \simeq C(K_M)$ و همین طور یک تناظر یک به یک بین نگاشتهای ریس و اعضای اول $\sum K_M$ داریم (قضیهٔ ۵.۲.۵). سپس رابطهٔ بین ^ و $\tilde{q}$ در گزارهٔ ۶.۲.۵ مطالعه می‌شود، و می‌بینیم که $\tilde{p}$ و $\tilde{q}$ در چه صورت برابر هستند.

۱.۵ صورت بدون نقطهٔ $\hat{x}$

فرض کنیم M فریم، $a \in M$، و $\alpha \in C(M)$. مجموعه های $\{r \in \mathbb{Q} : \alpha(-,r) \leq a\}$ و $\{s \in \mathbb{Q} : \alpha(s,-) \leq a\}$ را به ترتیب با $U(a,\alpha)$ و $L(a,\alpha)$ نشان می‌دهیم. برای هر $r \in L(a,\alpha)$ و $s \in U(a,\alpha)$ واضح است که $r \leq s$. در واقع:

۱.۱.۵ لم فرض کنیم M یک فریم باشد، و $p \in M$ اول باشد، و $\alpha \in C(M)$، در این صورت $L = L(p,\alpha), U = U(p,\alpha)$ یک برش ددکیند است که آن را با $\tilde{p}$ نمایش می‌دهیم.

اثبات: چون p اول است، با استفاده از $\alpha(-,r) \wedge \alpha(r,-) = \circ$ داریم $L \cup U = \mathbb{Q}$. چون $\bigvee_L \alpha(-,r) \leq p$؛ $L \neq \mathbb{Q}$ و به طور مشابه $U \neq \mathbb{Q}$. این لم را اثبات می‌کند.

۲.۱.۵ گزاره اگر p اول باشد، آنگاه $\tilde{p} : C(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ یک همریختی f—حلقه هاست. در حالت خاص، $\tilde{p} : C(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت ریس کراندار است.

اثبات: فرض کنیم $\diamond : \mathbb{R}^۲ \longrightarrow \mathbb{R}$ یک عمل پیوسته باشد. ثابت می کنیم که برای هر $\alpha, \beta \text{ in } C(M)$ داریم $\tilde{p}(\alpha\diamond\beta) = \tilde{p}(\alpha) \diamond \tilde{p}(\beta)$. فرض کنیم که $r \in L(p, \alpha\diamond\beta)$ و $s \in U(p, \alpha\diamond\beta)$. داریم $\alpha\diamond\beta(-,r) \leq p$ و بنابر این بر اساس تعریف

$$\bigvee\{\alpha(-,z) \wedge \beta(-,w) : (-,z) \diamond (-,w) \leq (-,r)\} \leq p$$

چون p اول است، $\alpha(-,z) \leq p$ یا $\beta(-,w) \leq p$. در نتیجه $z \leq \tilde{p}(\alpha)$ یا $w \leq \tilde{p}(\beta)$. بنابر این

$$(\tilde{p}(\alpha), \tilde{p}(\beta)) \notin (-\infty, z) \times (-\infty, w)$$

یعنی

$$(\tilde{p}(\alpha), \tilde{p}(\beta)) \notin \bigcup\{(-\infty, z) \times (-\infty, w) : (-,z) \diamond (-,w) \leq (-,r)\}.$$

حا چون $\diamond$ پیوسته است. و به طور مشابه $\tilde{p}(\alpha) \diamond \tilde{p}(\beta) \notin (-\infty, r)$. بنابراین $\tilde{p}(\alpha) \diamond \tilde{p}(\beta)$ با $\tilde{p}(\alpha \diamond \beta)$ برابر است. حال چون عملهای $+, ., \vee, \wedge$ پیوسته هستند، $\tilde{p} : C(M) \longrightarrow \mathbb{R}$ عملهای $+, ., \vee, \wedge$ را حفظ می کند. و براحتی دیده می‌شود که $\tilde{p}(۱) = ۱$. $\square$

۲.۵ نمایش نگاشت ریس روی $C(M)$ در توپولوژی بدون نقطه

۱.۲.۵ لم فرض کنیم M یک فریم باشد. نگاشتهای $e : \mathcal{L}C(M) \to M$ و $\ell : M \to \mathcal{L}C(M)$ را به ترتیب با ضابطه های $e(I) = \bigvee Coz(I)$ و $\ell(x) = \{\alpha \in C(M) : coz(\alpha) \leq x\}$ تعریف می‌کنیم. در این صورت

(۱) e الحاق چپ ℓ است.

(۲) $\eta = \ell \circ e : \mathcal{L}C(M) \to \mathcal{L}C(M)$ یک هسته است و $I \in Fix(\eta)$ اگر وتنها اگر $x \in M$ و جود داشته باشد که $I = \{\alpha : coz(\alpha) \leq x\}$.

(۳) اگر M کاملاً منظم باشد، $e \circ \ell = id_M$.

(۴) اگر M فشرده باشد آنگاه η هم چگال است.

اثبات: (۱) واضح است.

(۲) ویژگی توسیع و خود توانی η از (۱) نتیجه می‌شود. حال فرض کنیم $I, J \in \mathcal{L}C(M)$ و $\alpha \in \eta(I) \cap \eta(J)$، داریم

$$coz(\alpha) \leq (\bigvee Coz(I)) \wedge (\bigvee Coz(J)) = \bigvee Coz(I \cap J)$$

بنابراین $\alpha \in \eta(I \cap J)$. این طرف نابدیهی برابری $\eta(I) \cap \eta(J) = \eta(I \cap J)$ را اثبات می‌کنند. برای اثبات قسمت دوم فرض کنیم $I = \eta(I)$. داریم $I = \eta(I) = \ell e(I) = \{\alpha : coz(\alpha) \leq \bigvee Coz(I)\}$. بر عکس فرض کنیم $I = \{\alpha : coz(\alpha) \leq x\}$ و $\alpha \in \eta(I)$. بنابراین $coz(\alpha) \leq e(I) = \bigvee Coz(I) \leq x$، در نتیجه $\alpha \in I$. پس $\eta(I) = I$.

(۳) فرض کنیم M کاملاً منظم است. لذا $e\ell(x) = \bigvee\{\alpha \in C(M) : coz(\alpha) \leq x\} = x$.

(۴) فرض کنیم M فشرده باشد، و $\eta(I) = C(M)$. در نتیجه $\alpha_۱, \cdots, \alpha_k \in I$ وجود دارد به طوری که $coz(\alpha_۱) \vee \cdots \vee coz(\alpha_k) = e$. قرار می‌دهیم $\alpha = |\alpha_۱| + \cdots + |\alpha_k| \in I$. داریم $\alpha(۰, -) = coz(\alpha) = e$، و با استفاده از فشردگی $r > ۰$ و جود دارد به طوری که $\alpha(r, -) = e$. بنبراین $۰ < r \leq \alpha$ و در نتیجه $r \in I$، یعنی $I = C(M)$. لذا η هم چگال است. □

۲.۲.۵ لم فرض کنیم M یک فریم باشد.

(۱) برای هر نگاشت ریس کراندار $\phi : C(M) \to \mathbb{R}$ و هر عضو اول p که $e(ker\phi) \leq p$، داریم $\phi = \tilde{p}$.

(۲) اگر $e(ker\phi) < e$ آنگاه $ker\phi \in Fix(\eta)$، و اگر M کاملاً منظم باشد آنگاه $e(ker\phi)$ یک عضو اول در M است.

اثبات: فرض کنید $\alpha \in ker\phi$. در این صورت $coz(\alpha) \leq e(ker\phi) \leq p$، بنابراین برای هر $r, s \in \mathbb{Q}$ که $r < ۰ < s$، داریم

$$\alpha(-, r) \vee \alpha(s, -) \leq coz(\alpha) \leq p$$

لذا با توجه به تعریف $\tilde{p}(\alpha) = 0$، بنابراین $\alpha \in ker\tilde{p}$ که $ker\phi \subseteq ker\tilde{p}$ را اثبات می‌کند. در نتیجه $\tilde{p}$ توسط ϕ تجزیه می‌شود، یعنی $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ وجود دارد به طوری که $d \circ \phi = \tilde{p}$. اما چون $d(1) = d(\phi(1)) = \tilde{p}(1) = 1$ و همینطور نگاشت همانی تنها تبدیل خطی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است که ۱ را حفظ می‌کند، داریم $\phi = \tilde{p}$. $\square$

(۲) ابتدا اثبات می‌کنیم که برای هر عضو اول $p \in M$، داریم $ker\tilde{p} = \ell(p)$. فرض کنیم $\alpha \in C(M)$. در این صورت $\alpha \in ker\tilde{p}$ اگر و تنها اگر $coz(\alpha) \leq p$ و این با $\alpha \in \ell(p)$ معادل است. حال فرض کنیم $e(ker\phi) < e$. با استفاده از PIT، یک عضو اول چون $p \in M$ وجود دارد به طوری که $e(ker\phi) \leq p$. بنابراین با استفاده از (۱) $ker\phi = ker\tilde{p} = \ell(p)$. در نتیجه $\eta(ker\phi) = ker\phi$. در پایان برای اثبات اول بودن $e(ker\phi)$ فرض کنیم $x \wedge y \leq e(ker\phi)$. داریم

$$\ell(x) \wedge \ell(y) = \ell(x \wedge y) \leq \ell e(ker\phi) = \eta(ker\phi) = ker\phi$$

چون $ker\phi$ اول است، $\ell(x) \leq ker\phi$ یا $\ell(y) \leq ker\phi$. لذا چون M کاملاً منظم است، با استفاده از لم ۱.۲.۵(۳)، $x = e\ell(x) \leq e(ker\phi)$ یا $y = e\ell(y) \leq e(ker\phi)$. یعنی یک عضو اول است. $\square$

۳.۲.۵ لم فرض کنیم M یک فریم فشرده و کاملاً منظم باشد، $\phi : C(M) \to \mathbb{R}$ یک نگاشت ریس باشد، p یک عضو اول از M باشد، و U یک ℓ—ایدآل از $C(M)$ باشد به طوری که $U \in Fix(\eta)$. در این صورت $\phi = \phi(1)e\widetilde{(ker\phi)}$، $e(ker\tilde{p}) = p$ و $U = ker\widetilde{e(U)}$.

اثبات: فرض کنیم $\phi(1) \neq 0$. قرار می‌دهیم $\phi' = \frac{\phi}{\phi(1)}$. واضح است که ϕ' یک نگاشت ریس کراندار است و $ker\phi' = ker\phi$. اگر $e(ker\phi) = e$ آنگاه $\eta(ker\phi) = \ell e(ker\phi) = \ell(e) = C(M)$. چون M فشرده است، بنا به لم ۱.۲.۵(۴)، η هم چگال است، بنابراین $ker\phi = C(M)$ که تناقض است. پس بنا به لم ۲.۲.۵(۲)،

$e(ker\phi)$ یک عضو اول است، و در نتیجه بنا به لم ۲.۲.۵(۱)، $\frac{\phi}{\phi(1)} = \phi' = \widetilde{ker\phi}$. لذا $\phi = \phi(1)e(\widetilde{ker\phi})$.

با توجه به اثبات ۲.۲.۵(۲) و با استفاده از $ker\tilde{p} = \ell(p)$ داریم $e(ker\tilde{p}) = e\ell(p) = p$.

در پایان، فرض کنیم $\alpha \in C(M)$. در این صورت $\alpha \in U$ اگر و تنها اگر برای هر $r < 0 < s$، $\alpha(-,r) \vee \alpha(s,-) \leq coz(\alpha) \leq e(U)$، یا به طور معادل $\widetilde{e(U)}(\alpha) = 0$. بنابراین کافیست ثابت کنیم $e(U)$ یک عضو اول است. برای این منظور فرض کنیم $x \wedge y \leq e(U)$. لذا

$$\ell(x) \wedge \ell(y) = \ell(x \wedge y) \leq \ell e(U) = \eta(U) = U$$

بنابراین $\ell(x) \leq U$ یا $\ell(y) \leq U$. در نتیجه با توجه به کاملاً منظم بودن M، $x = e\ell(x) \leq e(U)$ یا $y = e\ell(x) \leq e(U)$. یعنی $e(U)$ اول است. □

نماد $R(C(M),\mathbb{R})$ را برای مجموعهٔ همهٔ نگاشتهای ریس ناصفر روی $C(M)$ باشد و $\mathcal{U}$ مجموعهٔ همهٔ ℓ—ایدآلهای اول از $Fix(M)$ باشد. حال نگاشتهای زیر را تعریف می‌کنیم: $F : R(C(M),\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+ \times \sum M$ با ضابطهٔ $F(\phi) = (\phi(1), e(ker\phi))$

$G : \mathbb{R}^+ \times \sum M \to R(C(M),\mathbb{R})$ با ضابطهٔ $G(r,p) = r\tilde{p}$

$H : R(C(M),\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^+ \times \mathcal{U}$ با ضابطهٔ $H(\phi) = (\phi(1), ker\phi)$

$K : \mathbb{R}^+ \times \mathcal{U} \to R(C(M),\mathbb{R})$ با ضابطهٔ $K(r,U) = r\widetilde{e(U)}$.

۴.۲.۵ قضیه برای هر فریم کاملاً منظم M، F وارون G، و همچنین H وارون K است. همچنین تحدید e و ℓ به ترتیب روی $\mathcal{U}$ و $\sum M$، وارون یکدیگر هستند.

اثبات: فرض کنیم $\phi \in R(C(M),\mathbb{R})$، $p \in \sum M$، $U \in \mathcal{U}$، و $r \in \mathbb{R}^+$. با استفاده از لم ۲.۲.۵(۲)، $e(ker\phi)$ اول است، و $\phi(1) > 0$. داریم

$$G \circ F(\phi) = G(\phi(1), e(ker\phi)) = \phi(1)e(\widetilde{ker\phi}) = \phi$$

$$F \circ G(r,p) = F(r\tilde{p}) = (r\tilde{p}(1), e(ker(r\tilde{p}))) = (r, e\ell(p)) = (r,p)$$

$$K \circ H(\phi) = K(\phi(1), ker\phi) = \phi(1)e(\widetilde{ker\phi}) = \phi$$

$$H \circ K(r,U) = H(\widetilde{re(U)}) = (\widetilde{re(U)}(1), ker(\widetilde{re(U)})) = (r,u)$$

و در پایان، با استفاده از لم ۱.۲.۵ (۳) داریم $e \circ \ell = id_M$ و $\ell \circ e(U) = \eta(U) = U$. □

۵.۲.۵ گزاره فرض کنیم K_M زیر فریم تولید شده توسط $Coz(M)$ در M باشد. آنگاه

(۱) $\omega = c(i) : C(K_M) \to C(M)$ یک همریختی $f-$حلقه‌هاست، که $i : K_M \hookrightarrow M$ نگاشت شمول است.

(۲) K_M کاملاً منظم است. به علاوه، اگر M فشرده باشد آنگاه K_M نیز چنین است.

(۳) اگر M فشرده باشد آنگاه $F : R(C(M), \mathbb{R}) \rightleftarrows \mathbb{R}^+ \times \sum K_M : G$ وارون یکدیگر هستند، که در آن $F(\phi) = (\phi(1), e(ker(\phi \circ \omega)))$ و $G(r,p) = r\widetilde{p} \circ \omega^{-1}$.

اثبات: (۱) واضح است که ω یک همریختی $f-$حلقه‌هاست. برای پوشا بودن ω، فرض کنیم $\alpha : \mathcal{R} \to M$ در $C(M)$ باشد. برای هر $r, s \in Q$، $\alpha(r,s) = coz((\alpha - r)^+ \wedge (s-\alpha)^+) \in Coz(M) \subseteq K_M$، و لذا $Im(\alpha) \subseteq K_M$. بنابراین $\omega(\alpha) = i \circ \overline{\alpha} = \alpha$، که در آن $\overline{\alpha}$ تحدید نگاره α است.

(۲) برای هر $\alpha : \mathcal{R} \to M$، $coz(\alpha) = coz(\overline{\alpha})$، و برای هر $\beta : \mathcal{R} \to K_M$، $coz(\beta) = coz(\omega(\beta))$. بنابراین $Coz(K_M) = Coz(M)$. در نتیجه K_M توسط $Coz(K_M)$ تولید می شود. لذا K_M کاملاً منظم است.

(۳) با استفاده از (۲) K_M فشرده و کاملاً منظم است، و با استفاده از لم ۲.۲.۵ (۲)، $e(ker(\phi \circ \omega))$ یک عضو اول از K_M است. در نتیجه F خوشتعریف است. حال فرض

کنیم $(r,p)\in\mathbb{R}^+\times\sum K_M$ و $\phi\in R(C(M),\mathbb{R})$. آنگاه

$$F\circ G(r,p)=F(r\tilde{p}\circ\omega^{-۱})$$

$$=(r\tilde{p}(۱),e(ker(r\tilde{p}\circ\omega^{-۱}\circ\omega)))=(r,e(ker(r\tilde{p})))=(r,e\ell(p))=(r,p)$$

$$G\circ F(\phi)=G(\phi(۱),e(ker\widetilde{(\phi\circ\omega)}))=\phi(۱)e(ker\widetilde{(\phi\circ\omega)})\circ\omega^{-۱}=\phi\circ\omega\circ\omega^{-۱}=\phi$$

این حکم را اثبات می‌کند. □

۶.۲.۵ گزاره فرض کنیم M یک فریم باشد. یک همریختی f−حلقه‌ها چون $\psi:C(M)\to C(\sum M)$ باضابطهٔ $\psi(\alpha)=\tau\circ\sum\alpha$ وجود دارد به طوری که برای هر $p\le q$، $\hat{p}\circ\psi=\tilde{q}$.

اثبات: چون برای هر $\alpha\in C(M)$، $\psi(\alpha)$ پیوسته است، ψ خوشتعریف است. حال فرض کنیم $\diamond\in\{+,\vee,\wedge,.\}$. نشان می‌دهیم $\psi(\alpha\diamond\beta)=\psi(\alpha)\diamond\psi(\beta)$.

اتدا توجه می‌کنیم که برای هر $\alpha\in C(M)$ و $p\in\sum M$، $\psi(\alpha)$ یک عدد حقیقی است که برای هر $r,s\in Q$،

$$r\le\psi(\alpha)(p)\le s\Leftrightarrow\alpha((-,r)\vee(s,-))\le p$$

قرار می‌دهیم $\psi(\alpha)(p)=a$ و $\psi(\beta)(p)=b$. داریم

$$r\le a\le s\Leftrightarrow\alpha((-,r)\vee(s,-))\le p$$

$$r\le b\le s\Leftrightarrow\beta((-,r)\vee(s,-))\le p$$

حال نشان می‌دهیم

$$r\le a\diamond b\le s\Leftrightarrow(\alpha\diamond\beta)((-,r)\vee(s,-))\le p$$

فرض کنیم $r \leq a \diamond b \leq s$. فرض کنیم $x, y \in \mathbb{Q}$ چنان باشند که $(-, x) \diamond (-, y) \leq (-, r)$. در نتیجه

$$\begin{aligned}(-\infty, x) \times (-\infty, y) \subseteq \diamond^{-۱}(-\infty, r) &\Rightarrow (a, b) \notin (-\infty, x) \times (-\infty, y)\\ &\Rightarrow a \not< x \;\; or \;\; b \not< y\\ &\Rightarrow \alpha(-, x) \wedge \beta(-, y) \leq p\end{aligned}$$

لذا

$$\alpha \diamond \beta(-, r) = \{\alpha(-, x) \wedge \beta(-, y) : (-, x) \diamond (-, y) \leq (-, r)\} \leq p$$

و به طور مشابه $\alpha \diamond \beta(s, -) \leq p$.

بر عکس، فرض کنیم $\alpha \diamond \beta((-, r) \vee (s, -)) \leq p$. کافیست نشان دهیم که $(a, b) \notin \diamond^{-۱}(-\infty, r), \diamond^{-۱}(s, -)$. فرض کنیم که $(-\infty, x) \times (-\infty, y) \subseteq \diamond^{-۱}(-\infty, r)$، لذا $(-, x) \diamond (-, y) \leq (-, r)$. بنابراین $\alpha(-, x) \wedge \beta(-, y) \leq p$، در نتیجه $\alpha(-, x) \leq p$ یا $\beta(-, y) \leq p$. لذا $x \leq a$ یا $y \leq b$. بنابراین، $(a, b) \notin (-\infty, x) \times (-\infty, y)$. در نتیجه

$$(a, b) \notin \bigcup\{(-\infty, x) \times (-\infty, y) : (-, x) \diamond (-, y) \leq (-, r)\} = \diamond^{-۱}(-\infty, r)$$

و به طور مشابه $(a, b) \notin \diamond^{-۱}(s, +\infty)$.

برای اثبات قسمت دوم فرض کنیم p, q عضوهای اول باشند که $p \leq q$ و $\alpha \in C(M)$. نشان می‌دهیم که $\hat{p} \circ \psi(\alpha) = \tilde{q}$. برای این منظور فرض کنیم $r \leq \psi(\alpha)(p) \leq s$، لذا $\alpha((-, r) \vee (s, -)) \leq p \leq q$. در نتیجه $r \leq \tilde{q}(\alpha) \leq s$ و بنابراین $\psi(\alpha)(p) = \tilde{q}(\alpha)$. $\square$

۷.۲.۵ نتیجه فرض کنیم p, q دو عضو اول در M باشند. آنگاه

(۱) $\tilde{p} = \tilde{q} \Leftrightarrow Coz(M) \cap \downarrow p = Coz(M) \cap \downarrow q$

(۲) اگر $p \leq q$ آنگاه $(p, q) \cap Coz(M) = \emptyset$، که در آن $(p, q) = \{x \in M : p < x < q\}$.

(۳) $Coz(M) \cap (p, e) = \emptyset$.

اثبات: (۱) $\tilde{p} = \tilde{q}$ اگر و تنها اگر برای هر $\alpha \in C(M)$ و $r, s \in \mathbb{Q}$ داشته باشیم $\alpha(r, s) \leq p \Leftrightarrow \alpha(r, s) \leq q$. چون هر عضو $Coz(M)$ به صورت $\alpha(r, s)$ است، نتیجه حاصل می‌شود.

(۲) فرض کنیم $p \leq q$. با توجه به گزارهٔ ۶.۲.۵، $\tilde{p} = \hat{p}\psi = \tilde{q}$، و با استفاده از (۱) داریم $Coz(M) \cap \downarrow p = Coz(M) \cap \downarrow q$. در نتیجه $(p, q) \cap Coz(M) = \emptyset$.

(۳) فرض کنیم که $x \in (p, e)$. با استفاده از PIT، یک عضو اول چون $q \geq x$ وجود دارد. بنابراین $x \in (p, q)$ و با توجه به (۲) $(p, q) \cap Coz(M) = \emptyset$، لذا $x \notin Coz(M)$. یعنی $Coz(M) \cap (p, e) = \emptyset$. $\square$

مراجع

1 J. Adamek, H. Herrlich and G. Strecker., *Abstract and Concrete Categories*, Wiley Interscience. (1990).

2 B. Banaschewski, *Pointfree topology and the spectra of f-rings*, Ordered algebraic structures (curacoa, 1995), Kluwer Acad. Publ., Dordrecht (1997), 123-148.

3 ——, *Completion in Pointfree Topology*, Lecture Notes in Math. & Appl. Math., No. 2, (1996), 1-26.

4 ——, *The real numbers in pointfree topology*, Texts in Mathematics (Series B), Vol. **12**, University of Coimbra, 1997.

5 ——, *Functorial maximal spectra*, J. of Pure and Applied Algebra, **168**(2-3) (2002), 327-346.

6 ——, *Stone's Real Gelfand Duality in pointfree Topology*, Ordered algebraic structures, Kluwer Acad. Publ., Printed in the Netherlands, (2002), 157-177.

7 —— and C. Gilmour, *Realcompactness and the cozero part of a frames* Appl. Cat. Stru. 9 (2001) 395-417.

8 —— and R. Harting, *Lattice aspects of radical ideals and choice principles*. Proc. London Math. Soc. 50 (1985), 385-404.

9 ——, and C. J. Mulvey, *A constructive proof of the Stone-Weierstrass Theorem*, J. Pure Appl. Algebra 116 (1997), no.1-3, 25-40.

10 G. Birkhoff, *Lattice Theory*, American Mathematical Colloquium Publications, 1967.

11 N. Bourbaki, *General Topology*, Part 1, Addison-Wesley,(1966).

12 S. Burris, H. P. Sanakappanavar, *A course in universal algebra*, Springer-Verlag, 1981.

13 —— and M. Mahmoudi, *Frames*, Tech. Rep., Shahid Beheshti Univ., (1995).

14 L. Gillman and M.Jerison, *Ring of continous functions*. Grad. Texts in Math 43, Springer Verlag, 1976.

15 I. M. James, *Topologies and Unifomities*, Springer-Verlag, New York, 1987.

16 P. T. Johnstone, *Stone Spaces*, Cambridge University Press, 1982.

17 S. MacLane, *Categories for working Mathematician,* Graduate Texts in Mathematics 5, Springer. Verlag, (1971).

18 P. Meyer-Nieberg, *Banach Lattices*, Springer-Verlag, 1991.

19 S. Kakutani, *Concrete representation of abstract (M-)spaces (A characterization of the space of continous functions)*. Ann. Math (2) 42, 994-1024. MR 3-7.

20 M. H. Stone, *A general spectra theory*, I. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 26, 280-3, MR 1-338, 1940.

21 M. H. Stone, *A general spectra theory*, II. Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 27, 83-7, MR 2-318, 1941.