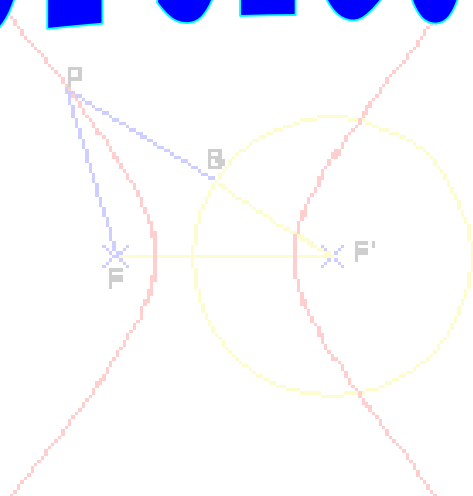
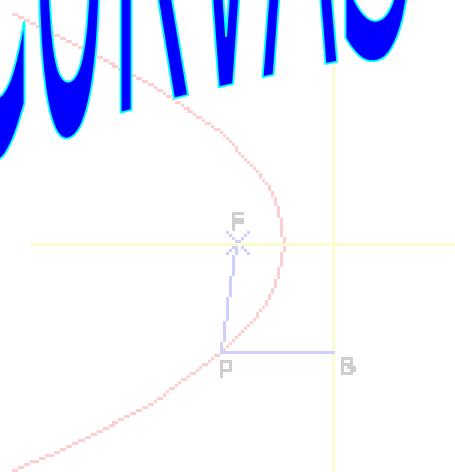
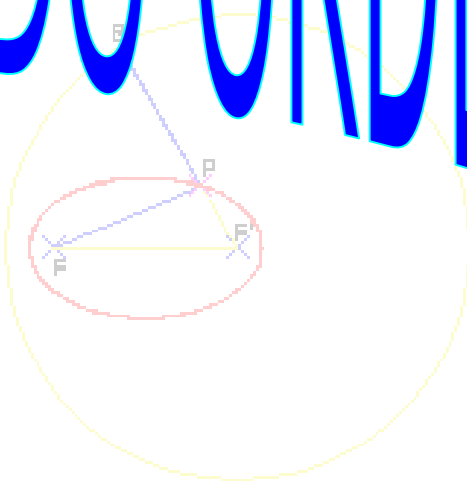
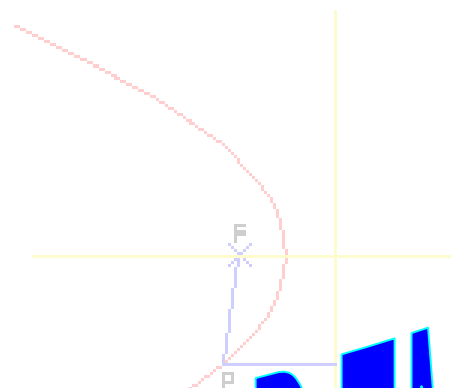
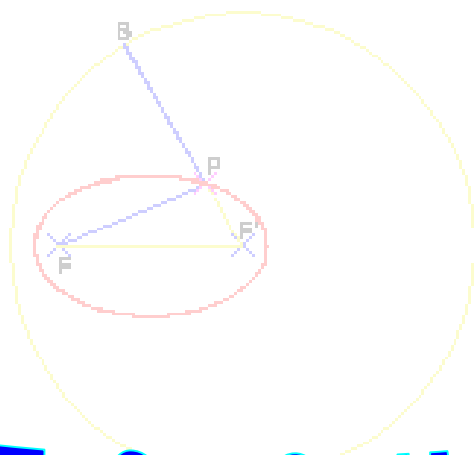
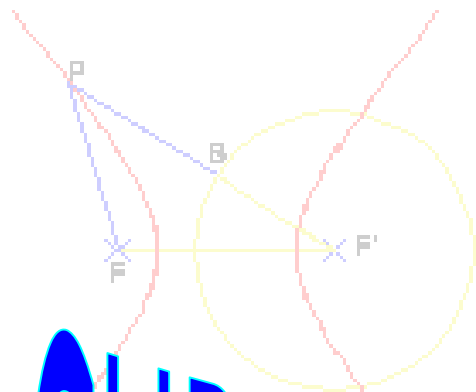


CURVAS DE SEGUNDO ORDEN

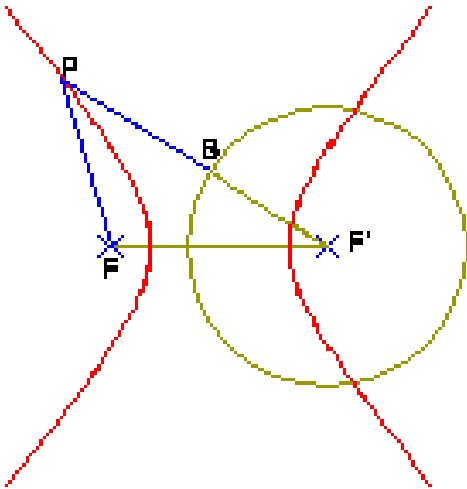
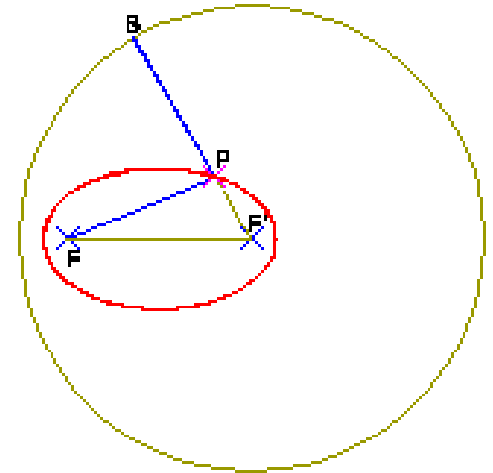


CÓNICAS

LG de los puntos coplanares que equidistan de una circunferencia, distancia medida en forma normal (según su radio) y un punto fijo (F) llamado FOCO

Si el punto de referencia o foco (F) está dentro de la circunferencia, se obtiene una curva cerrada que se denomina

ELIPSE ($FP = BP$)

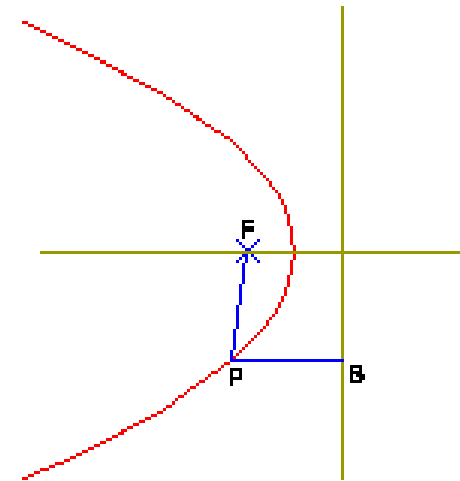


Si el punto está fuera de la circunferencia, se obtiene una curva abierta de dos ramas, que se denomina

HIPÉRBOLA ($FP = BP$)

Si la circunferencia es de radio infinito tiende a ser una línea recta, la figura que se obtiene es una curva abierta de una rama que se denomina

PARÁBOLA ($FP = BP$)



ELIPSE

Por definición, cualquier punto P de la elipse equidistará de la circunferencia (F') y del foco (F). Luego $FP=CP$ y el $\triangle FPC$ será isósceles ($FP=CP$) con FC como base. El punto P deberá pertenecer a la altura ($\perp$ a FC en su punto medio, M) y deberá pertenecer al radio **R** (F'C), luego estará en la intersección de ambas líneas. (Por igual razonamiento se obtiene P', sobre el mismo diámetro CC').

$$FP=CP$$

$$F'C=F'P+CP=R$$

Luego

$$\mathbf{FP+F'P=R \text{ (Constante)}}$$

Por lo que se puede enunciar que:

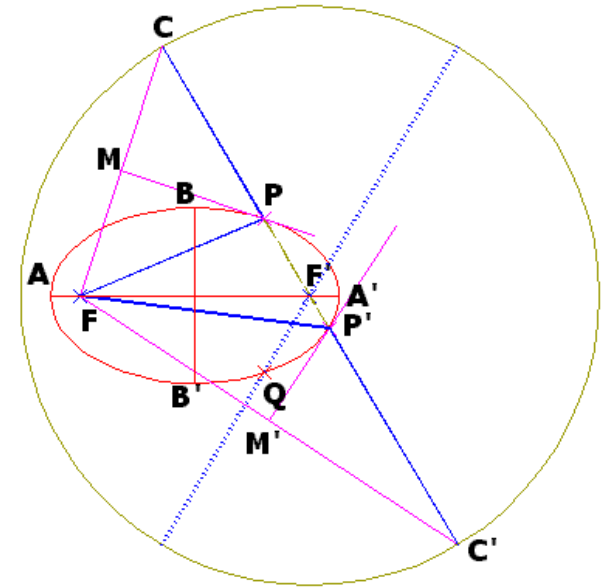
La elipse es el lugar geométrico de los puntos de un plano, cuya suma de distancias a otros dos fijos, llamados focos, es constante.

La suma constante de las distancias a los focos, es igual al radio de la circunferencia llamada **DIRECTRIZ**.

Los segmentos entre los focos y un punto cualquiera (FP y F'P) son los **RADIOS VECTORES** del punto en cuestión.

Las alturas de los triángulos isósceles utilizados para la localización de los puntos P y P' intersectan, en cada caso, a los radios F'C y F'C' en un único punto. Este punto (P y P') pertenece a la elipse y a la altura; cada altura por sólo tener un punto en común con la elipse, necesariamente será tangente a ella y precisamente en ese punto.

Por ser la directriz una circunferencia, la elipse originada será necesariamente simétrica ya que al ir girando el diámetro CC' para obtener los puntos (P y P'), siempre existirá un punto (Q) con iguales distancias, pero del lado opuesto al eje de simetría de la directriz (Diámetro que pasa por FF')



DISTANCIA FOCAL (2c)

Es la distancia entre los focos (FF')

CUERDA

Cualquier segmento que una dos puntos de la elipse

DIÁMETRO (O)

Cualquier cuerda que pase por el centro

DIÁMETROS CONJUGADOS

Dos diámetros son conjugados cuando cada uno pasa por los puntos medios de las cuerdas paralelas al otro.

EJE MAYOR (2a)

Es el diámetro que pasa por los focos. Une los puntos extremos de la elipse en su sentido más largo.

EJE MENOR (2b)

Es el diámetro perpendicular al eje mayor. Une los puntos extremos de la elipse en su sentido más corto. (Los focos distan de cada extremo del eje menor una distancia igual al semieje mayor).

Los ejes mayor y menor son diámetros conjugados.

PARÁMETRO

Se define como la longitud de la semicuerda focal perpendicular al eje mayor.

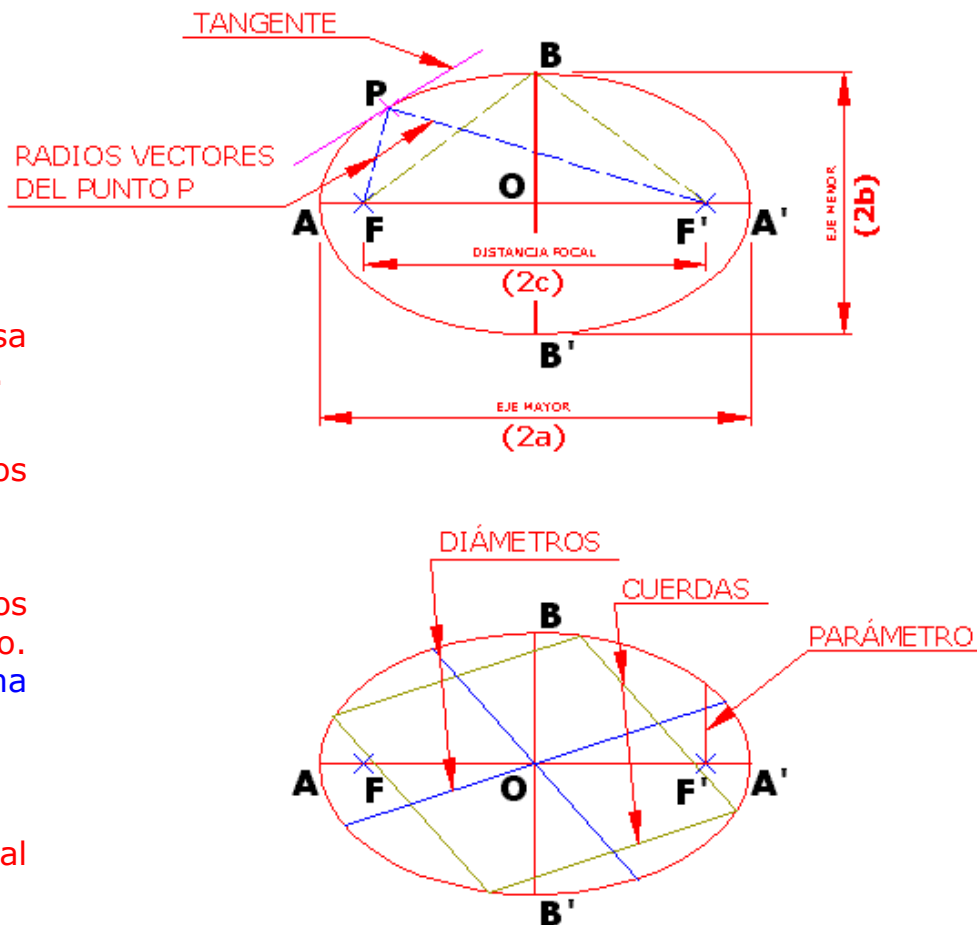
EXCENTRICIDAD

Se define como la razón existente entre la distancia focal y el eje mayor (c/a). A menor excentricidad, menor diferencia entre los ejes mayor y menor. Cuando es nula, los focos coinciden con el centro y la elipse es una circunferencia.

ECUACIÓN DE LA ELIPSE

Referida a su centro como eje de coordenadas la elipse tiene la siguiente ecuación:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$$

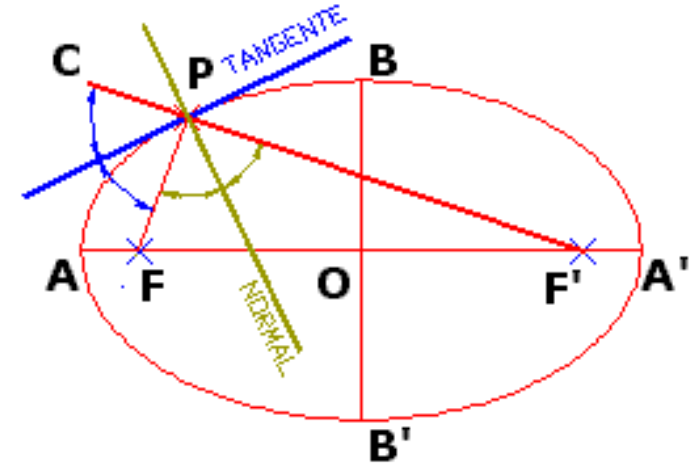


TANGENTES A LA ELIPSE

La tangente a una elipse, en un punto de ella, es la bisectriz del ángulo formado por un radio vector al punto y la prolongación del otro.

RECTA NORMAL

Es la perpendicular a la tangente en el punto de tangencia. Es la bisectriz del ángulo que forman los radios vectores del ese punto.



TANGENTE A LA ELIPSE QUE PASA POR UN PUNTO FUERA DE ELLA

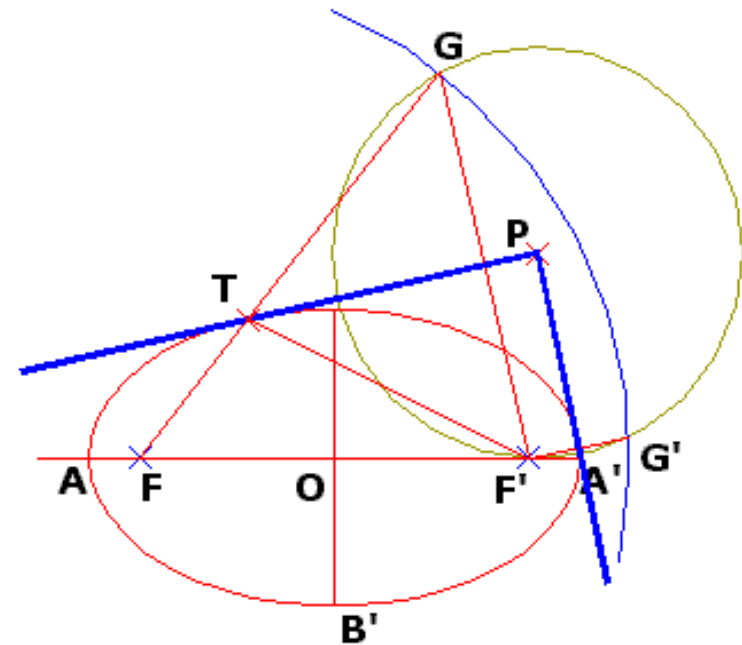
Por definición de elipse, el punto G está situado en la directriz (Circunferencia de radio $2a$ con centro en F).

La tangente PT es la mediatriz del segmento $F'G$ (Altura y base del $\triangle GTF'$ que es isósceles). Luego G y F' son simétricos respecto a la tangente PT y son equidistantes del punto P.

En consecuencia G estará situado en la intersección de los LG, directriz de la elipse y circunferencia de radio PF' y centro en P.

Determinado G, se traza la mediatriz de GF' que es la tangente buscada.

Por razonamiento similar se obtiene la otra tangente a la elipse que pasa por el punto P



TRAZADO DE LA ELIPSE

Conocidos los ejes mayor ($2a$) y menor ($2b$), basándonos en la definición de la elipse y en sus propiedades, se podrá trazar la elipse con el siguiente procedimiento:

Se trazan los dos semiejes, perpendiculares entre sí en el punto medio de cada uno.

Con centro en uno de los extremos del eje menor se trazan arcos de circunferencia de radio igual al semieje mayor (a). Los puntos de intersección sobre el eje mayor definirán los focos (F y F')

Con centro en uno de los focos (F') y radio $2a$ se traza la circunferencia directriz de la elipse.

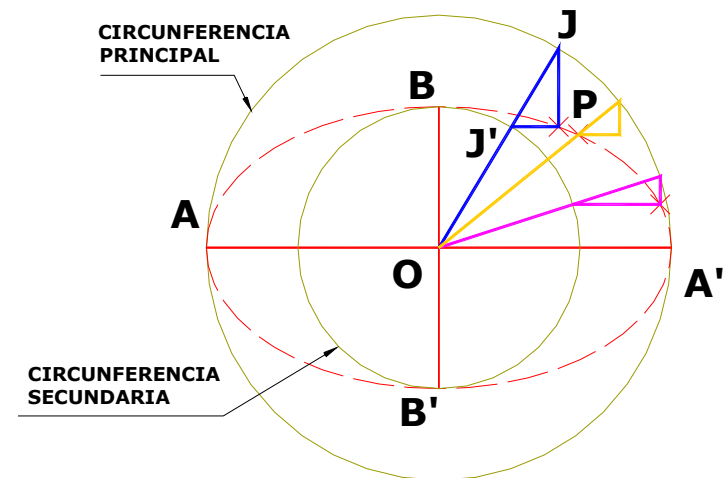
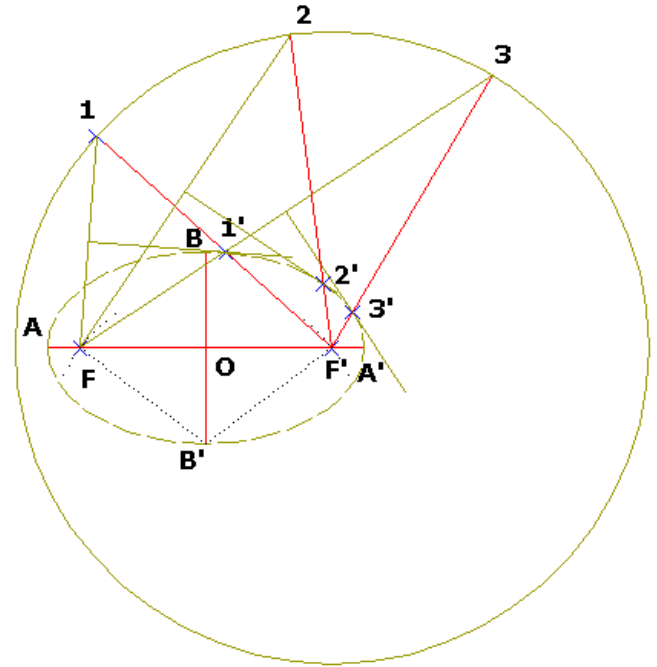
Se traza un radio a un punto cualquiera (1) de la directriz, y se traza el segmento que une ese punto con el foco (F) de la elipse.

El punto de corte ($1'$) de la mediatriz del segmento ($1F$) con el radio ($F'1$) es un punto de la elipse.

Se determinan tantos puntos como sean necesarios, que unidos con un trazo continuo definirán la elipse buscada.

MÉTODO CIRCUNFERENCIAS CONCÉNTRICAS

En los triángulos rectángulos JPJ' que se forman con la hipotenusa coincidiendo con el segmento de los radios de las circunferencias principal y secundaria, comprendido entre ambas, y tiene como catetos rectas paralelas a los ejes de la elipse, los vértices rectos (P) son puntos de la elipse. Estos puntos están hacia el lado del eje mayor respecto a los radios considerados.

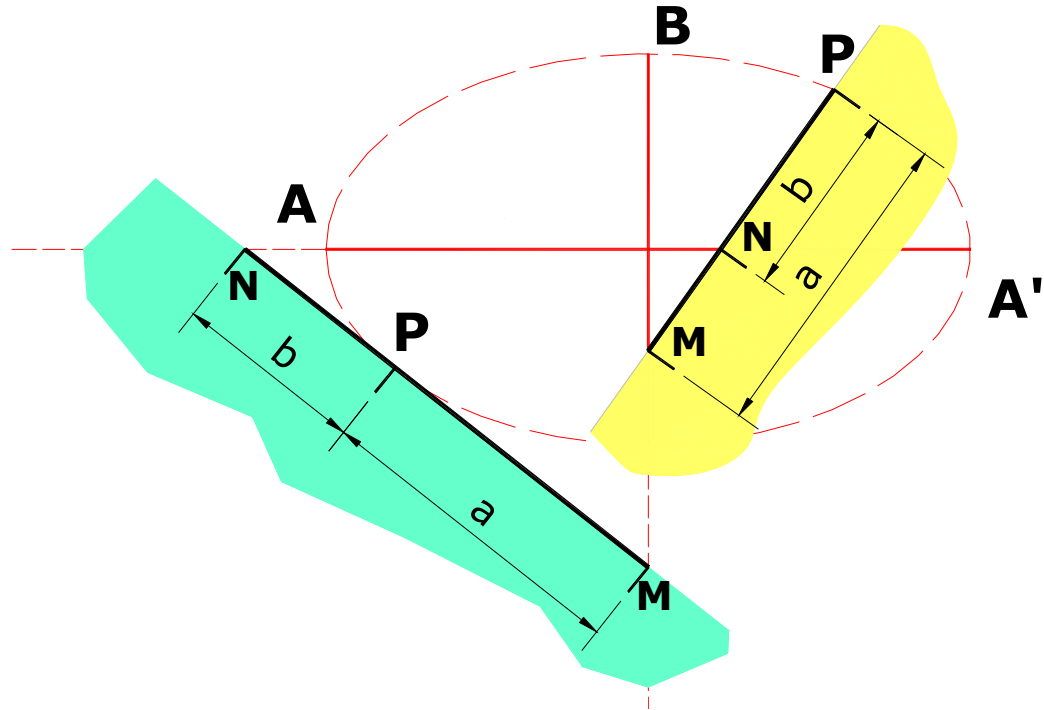


MÉTODO DE LA TIRA DE PAPEL O MÉTODO DEL PAPELITO

El Lugar Geométrico de un punto (P) de una recta que se mueve de forma que otros dos de sus puntos (M; N), describen sendas rectas perpendiculares entre sí, es una elipse cuyos ejes coinciden con la dirección de dichas rectas y miden el doble que los segmentos limitados entre ambos puntos sobre las rectas (M; N) y el punto problema(P).

En un borde recto de una tira de papel, se dibujan dos segmentos equivalentes a las distancias **a** y **b** (semiejes) de la elipse que se quiere trazar. No importa si se dibujan uno a continuación del otro (Ejemplo verde) o ambos desde un mismo punto. (Ejemplo amarillo)

Manteniendo el extremo libre del segmento equivalente al semieje menor sobre la dirección del Eje Mayor, y el extremo libre del segmento equivalente al semieje mayor en la dirección del Eje Menor, se desplaza la tira de papel marcando, en cada caso, la posición del punto P, éstos unidos definirán la elipse.



El sistema utilizado en el ejemplo verde, dá mejores resultados para el trazado de elipses con excentricidades pequeñas (ejes similares en tamaño)

PUNTOS DE LA ELIPSE DETERMINADOS POR SUS DISTANCIAS A LOS FOCOS

Por definición la elipse es el LG de los puntos cuyas distancias a los *focos* es constante. Como se vió antes esa suma es igual a la magnitud del *eje mayor*.

Una forma ordenada de obtener puntos que cumplan con esa condición es la siguiente:

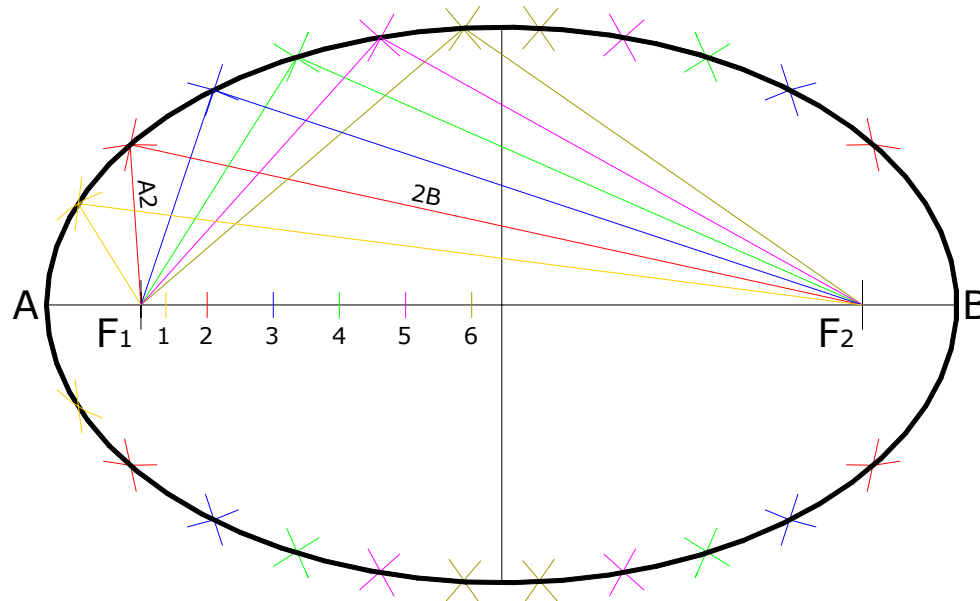
Se ubican unos puntos cualesquiera sobre el semieje mayor ubicados entre el foco y el centro de la elipse (Ej. 1; 2; 3; 4 y 5)

Con centro en uno de los focos, se trazan arcos de circunferencia con radios igual a las distancias desde un extremo de eje mayor a cada uno de los puntos sobre el eje mayor (Ej. A2)

Cada arco así trazado se corta con otro trazado con centro en el otro foco y radio igual a la distancia del punto correspondiente hasta el otro extremo del eje mayor (Ej. 2B)

El resto de los puntos se obtienen por simetría. También pueden ser obtenidos, en cada caso trazando los mismos arcos pero intercambiando los centro (focos) de los arcos.

El foco es el límite y de tomarlo como punto los arcos correspondientes se cortarían en los puntos A y B. No hay limitaciones ni en el número de puntos que se utilicen ni en su ubicación



HIPÉRBOLA

Por definición, cualquier punto P de la hipérbola equidistará de la circunferencia (F') y del foco (F). Luego $FP=CP$ y el $\triangle FPC$ será isósceles ($FP=CP$) con FC como base. El punto P deberá pertenecer a la altura (Mediatriz de FC) y deberá pertenecer al radio **R** (C'C), luego estará en la intersección de ambas líneas. (Por igual razonamiento se obtiene P', sobre el mismo diámetro CC').

$$PF=PC$$

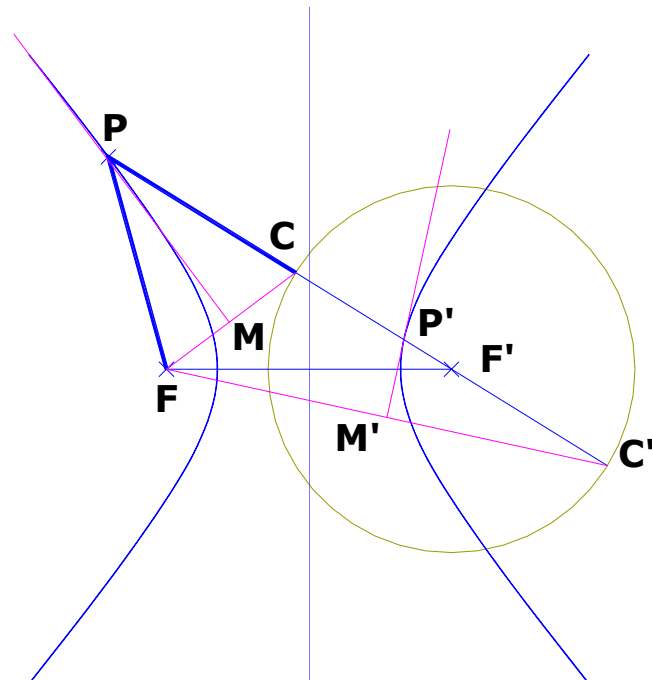
$$PF'-PC=R$$

Luego

$$PF' - PF = R \text{ (Constante)}$$

Por lo que se puede enunciar que:

La hipérbola es el lugar geométrico de los puntos de un plano, cuya diferencia de distancias a otros dos fijos, llamados focos, es constante.



La diferencia constante de las distancias a los focos, es igual al radio de la circunferencia llamada **DIRECTRIZ**.

Los segmentos entre los focos y un punto cualquiera (FP y F'P) son los **RADIOS VECTORES** del punto en cuestión.

Las alturas de los triángulos isósceles utilizados para la localización de los puntos P y P' intersectan, en cada caso, a los radios F'C y F'C' en un único punto. Este punto (P y P') pertenece a la hipérbola y a la altura; cada altura por sólo tener un punto en común con la hipérbola, necesariamente será tangente a ella y precisamente en ese punto.

Por ser la directriz una circunferencia, la hipérbola originada será necesariamente simétrica ya que al ir girando el diámetro CC' para obtener los puntos (P y P'), siempre existirá un punto (Q) con iguales distancias, pero del lado opuesto al eje de simetría de la directriz (Diámetro que pasa por FF')

DISTANCIA FOCAL (2c)

Es la distancia entre los focos (FF')

CUERDA

Cualquier segmento que una dos puntos de la hipérbola

DIÁMETRO

Cualquier cuerda que pase por el centro (O)

DIÁMETROS CONJUGADOS

Dos diámetros son conjugados cuando cada uno pasa por los puntos medios de las cuerdas paralelas al otro. Uno siempre será imaginario (Corta a la hipérbola en el infinito) y el otro real

EJE REAL O TRANSVERSAL (2a)

Es el diámetro que une los vértices

EJE IMAGINARIO O NO TRANSVERSAL (2b)

Es el diámetro perpendicular al eje mayor. Tiene una longitud igual a la cuerda de la circunferencia que pasa por los con centro en O (radio=c), perpendicular al eje mayor en uno de los vértices.

$$c^2 = a^2 + b^2$$

PARÁMETRO

Se define como la longitud de la semicuerda focal perpendicular al eje mayor.

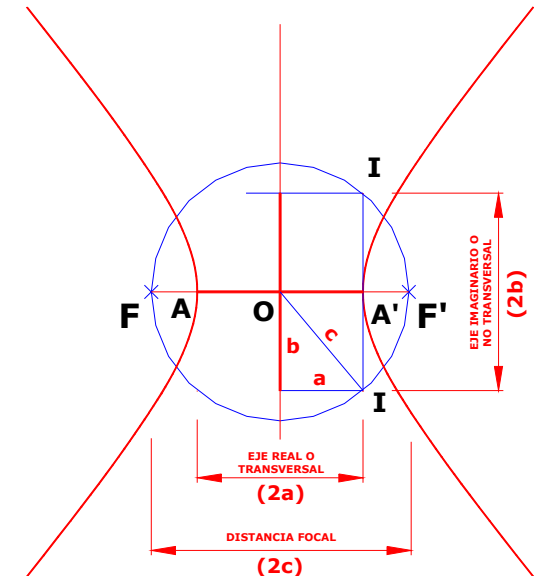
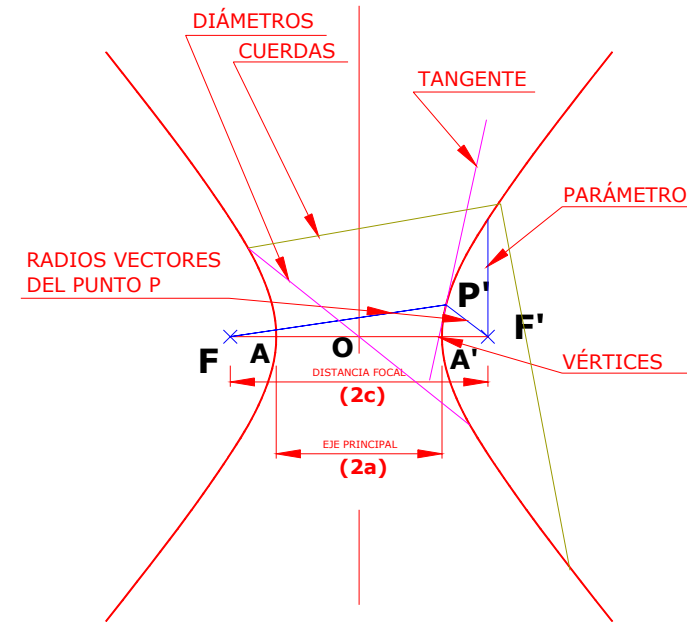
EXCENTRICIDAD

Se define como la razón existente entre la distancia focal y el eje real (c/a).

ECUACIÓN DE LA HIPÉRBOLA

Referida a su centro como eje de coordenadas la hipérbola tiene la siguiente ecuación:

$$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$$



TANGENTES A LA HIPÉRBOLA

La tangente a una hipérbola, en un punto de ella, es la bisectriz del ángulo formado por los radios vectores de un punto.

RECTA NORMAL

Es la perpendicular a la tangente en el punto de tangencia. Es la bisectriz del ángulo que forman un radio vector del punto y la prolongación del otro.

TANGENTE A LA ELIPSE QUE PASA POR UN PUNTO FUERA DE ELLA

El punto G deberá estar situado en la circunferencia directriz. La tangente PT es la mediatriz del segmento F'G (Altura y base del $\Delta GTF'$ que es isósceles). Luego G y F' son simétricos respecto a la tangente PT y son equidistantes del punto P.

En consecuencia G estará situado en la intersección de los LG, directriz de la elipse y circunferencia de radio PF' y centro en P.

Determinado G, se traza la mediatriz de GF' que es la tangente buscada.

Por razonamiento similar se obtiene la otra tangente a la elipse que pasa por el punto P.

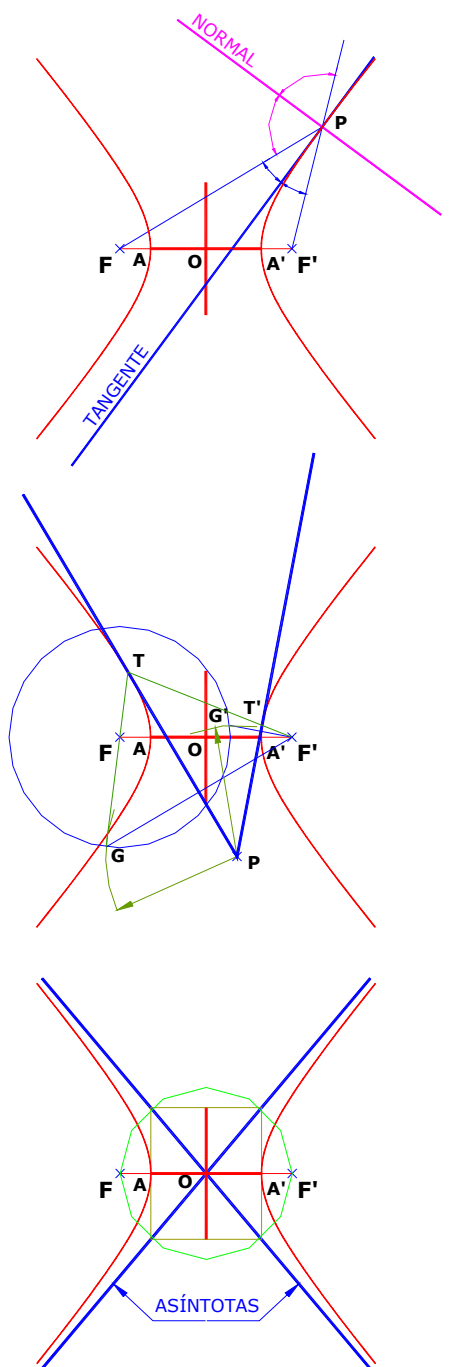
ASÍNTOTAS

Son un caso particular de las tangentes. Tienen el punto de tangencia en el infinito. Pasan por el centro y los vértices del cuadrilátero inscrito en la circunferencia de centro O y radio igual a media distancia focal (c). Los puntos de la hipérbola, cortados por una misma secante, equidistan de los puntos de intersección de dicha secante con sus asíntotas.

ECUACIÓN DE LA PARÁBOLA

Referida al vértice de la parábola como origen de coordenadas y teniendo al eje como eje de las abscisas. La parábola tiene la siguiente ecuación:

$$y^2 = 2px \quad (\text{Donde } p \text{ es el parámetro})$$



TRAZADO DE LA HIPÉRBOLA

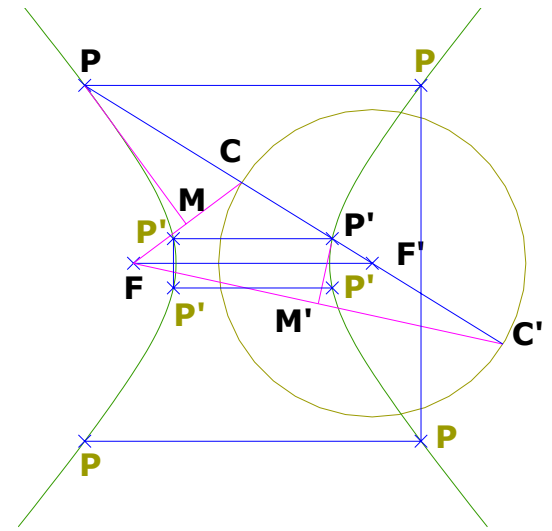
Conocidos los focos y el radio de la directriz, basándonos en la definición de la hipérbola y en sus propiedades, se podrá trazar la hipérbola con el siguiente procedimiento:

Se traza un diámetro cualquiera (CC') de la directriz y se prolonga. Sobre esta recta deberá estar el punto P de la hipérbola con focos F y F' .

La distancia FP deberá ser igual a la distancia CP, luego P estará además sobre la mediatriz del segmento FC.

En consecuencia P está en la intersección de la directriz y de la prolongación del diámetro. Por procedimiento análogo se podrá determinar P'.

Por la simetría de la curva por cada punto que se determine se pueden obtener cuatro de la curva.

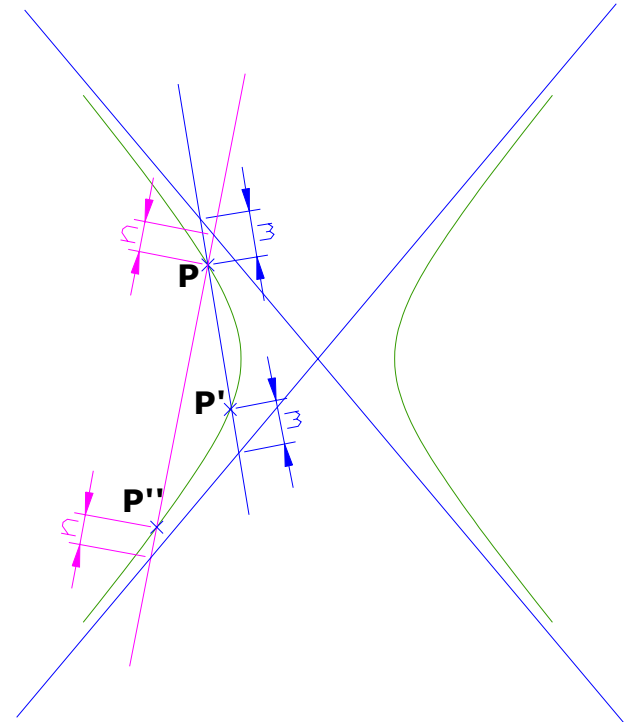


OTRO PROCEDIMIENTO

Conocido un punto (P) de la hipérbola y sus asíntotas, se podrá determinar la hipérbola con el siguiente procedimiento:

Cualquier secante cortará a la curva en dos puntos. La distancia desde el punto de la curva hasta su asíntota será igual para ambos puntos (medido sobre la secante).

Luego si se trazan varias secantes por el punto conocido y se lleva la distancia hasta la asíntota, sobre la misma secante pero desde la otra asíntota, se determinará otro punto de la curva. Por procedimientos análogos desde estos nuevos puntos se obtendrán otros. Por la simetría de la curva se obtendrán, como se dijo anteriormente, tres puntos adicionales por cada uno determinado.



PARÁBOLA

Por definición, cualquier punto P de la parábola equidistará de la directriz y del foco (F). Luego $FP=PM$ y el $\triangle FPM$ será isósceles ($FP=MP$) con FM como base. El punto P deberá pertenecer a la altura (mediatriz de FM) y deberá pertenecer al radio de la directriz ($\perp$), luego estará en la intersección de ambas líneas.

PF=PM

Por lo que se puede enunciar que:

La parábola es el lugar geométrico de los puntos de un plano, que equidistan de un punto llamado foco y una recta.

Las alturas de los triángulos isósceles ($\triangle FPM$) utilizados para la localización de los puntos P intersectan a las perpendiculares MP en un único punto. Este punto (P) pertenece a la parábola y a la altura; por sólo tener un punto en común con la parábola, necesariamente será tangente a ella y precisamente en ese punto.

VERTICE

Es el punto de la parábola más cercano a la directriz. Por definición $FA=AO$.

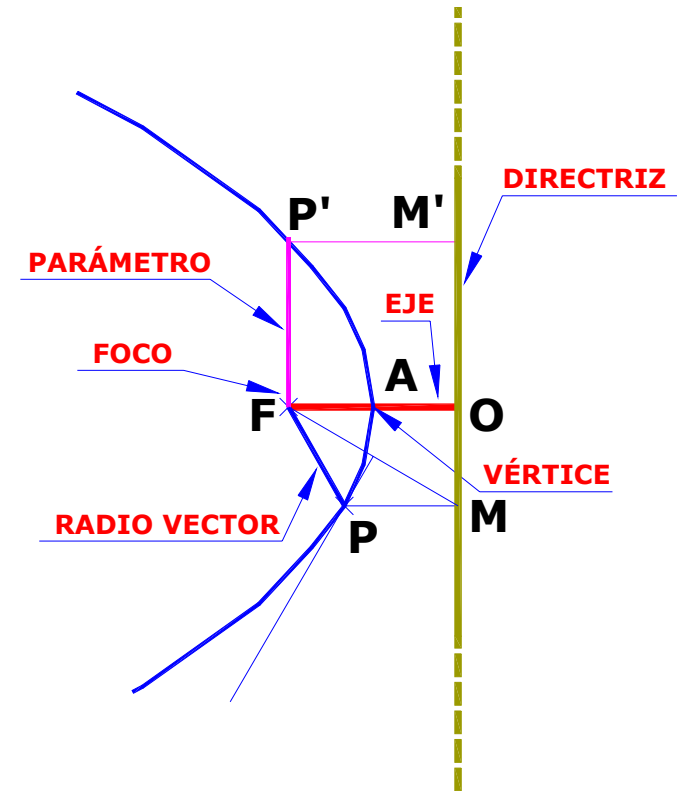
PARÁMETRO

Se define como la longitud del eje de la parábola entre el Foco y la Directriz.

Por definición de la parábola, la semicuerda focal mide lo mismo que el parámetro, es por esta razón que a la semicuerda focal en la elipse y la hipérbola se la define como parámetro.

RADIO VECTOR

Es la distancia entre el foco y un punto de la parábola



TANGENTES A LA PARÁBOLA

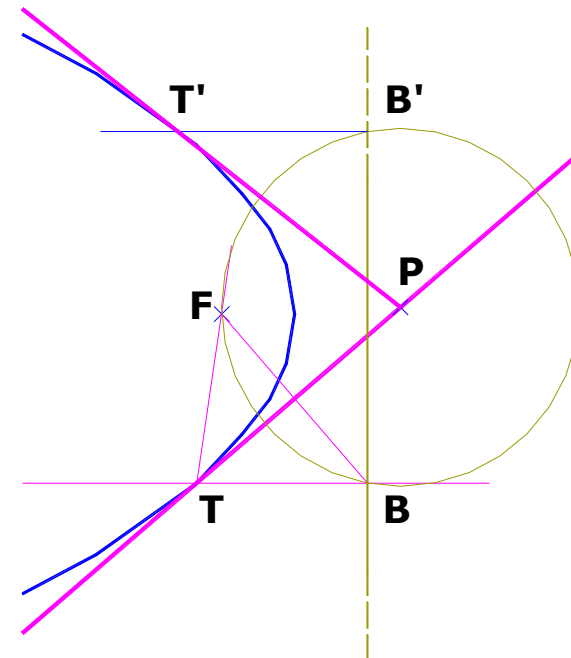
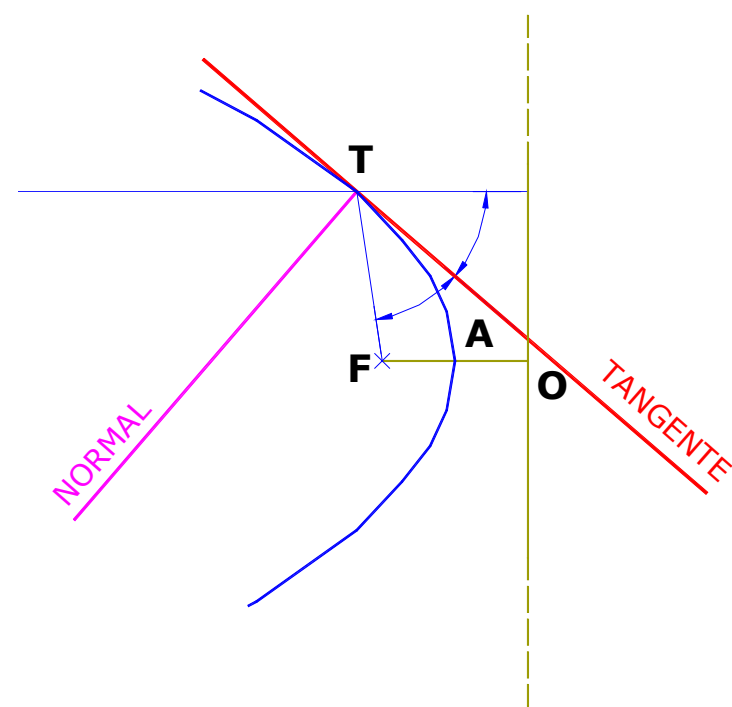
La tangente a la parábola en un punto cualquiera (T) de ella, es la bisectriz del ángulo que forman el radio vector (TF) y la perpendicular a la directriz desde el punto.

La normal se define como la perpendicular a la tangente en el punto dado. En la parábola la normal es la bisectriz del radio vector y la prolongación de la perpendicular a la directriz.

TANGENTE A LA PARÁBOLA DESDE UN PUNTO EXTERIOR

Sea PT la recta que pasando por el punto P, es tangente a la parábola en el punto T.

T en consecuencia debe pertenecer a la parábola y entonces $FT=BT$. Como PT debe ser, por definición, la mediatriz de FB, los puntos F y B deben equidistar del punto P. El punto B debe pertenecer a la directriz (definición), luego B estará ubicado sobre la directriz en el punto de intersección con una circunferencia de centro P y radio PF. Determinada la posición de B, se determina T en la intersección de la $\perp$ a la directriz en B con la mediatriz de FB (tangente) y la parábola. como la circunferencia corta a la directriz en dos puntos, existirán dos tangentes



TANGENTE A LA PARÁBOLA EN SU VÉRTICE

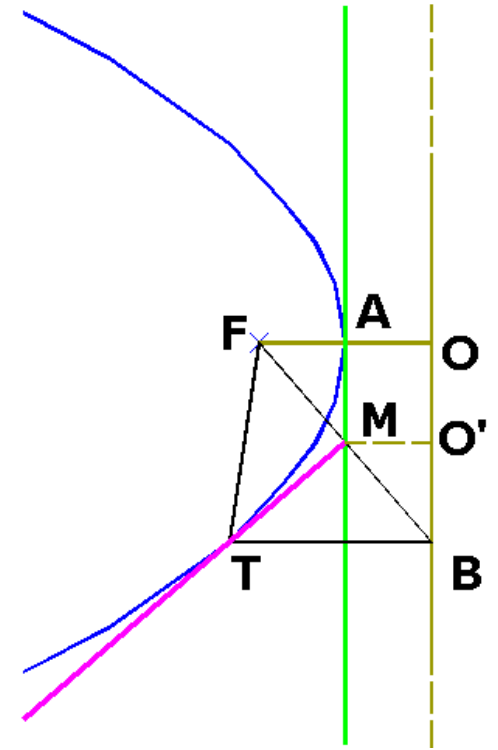
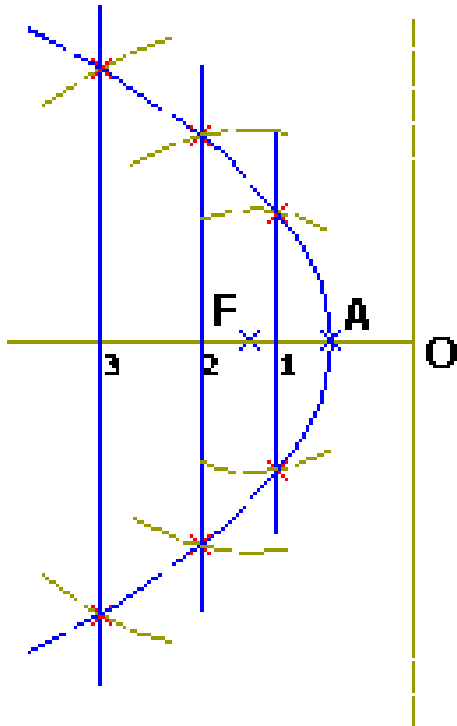
La tangente a la parábola en el vértice, es el LG de los pies de las perpendiculares a otras tangentes trazadas desde el foco

Todas las tangentes que se tracen serán mediatrices de los segmentos FB, luego $FM=MB$.

Por definición: $FA=AO$

y como $\triangle FAM=\triangle MO'B$

$O'M = OA$. Luego AM es paralela a la directriz y tangente a la parábola en el vértice A y M , pie de las perpendiculares a las tangentes, pertenece a AM y sus prolongaciones.



TRAZADO DE LA PARÁBOLA

Conocidos el foco y la directriz, se determina el punto A (Vértice) en el punto medio de FO .

Se trazan perpendiculares al eje por cualquier punto de éste.

Con centro en F y radio igual a la distancia entre cada perpendicular y la directriz, se trazan arcos que cortarán a la correspondiente perpendicular determinando los puntos de la parábola. Se cumple en cada caso que la distancia entre F y el punto es igual a la distancia del punto a la directriz

APLICACIÓN PRÁCTICA

A background graphic featuring a blue wireframe structure, possibly representing a dome or a complex geometric shape, with several dashed lines and arrows pointing towards it from the left side.

