TEOREMA DE PITÁGORAS

TEOREMA DE EUCLIDES

TEOREMA DE PITÁGORAS (Demostración gráfica)

En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

Hipótesis

ΔABC es rectángulo en A

Tesis

$AB^2+AC^2=BC^2$

Demostración

Se trazan cuadrados sobre cada uno de los lados del ΔABC y las líneas AF ($\perp$ a la hipotenusa BC), BH y AE

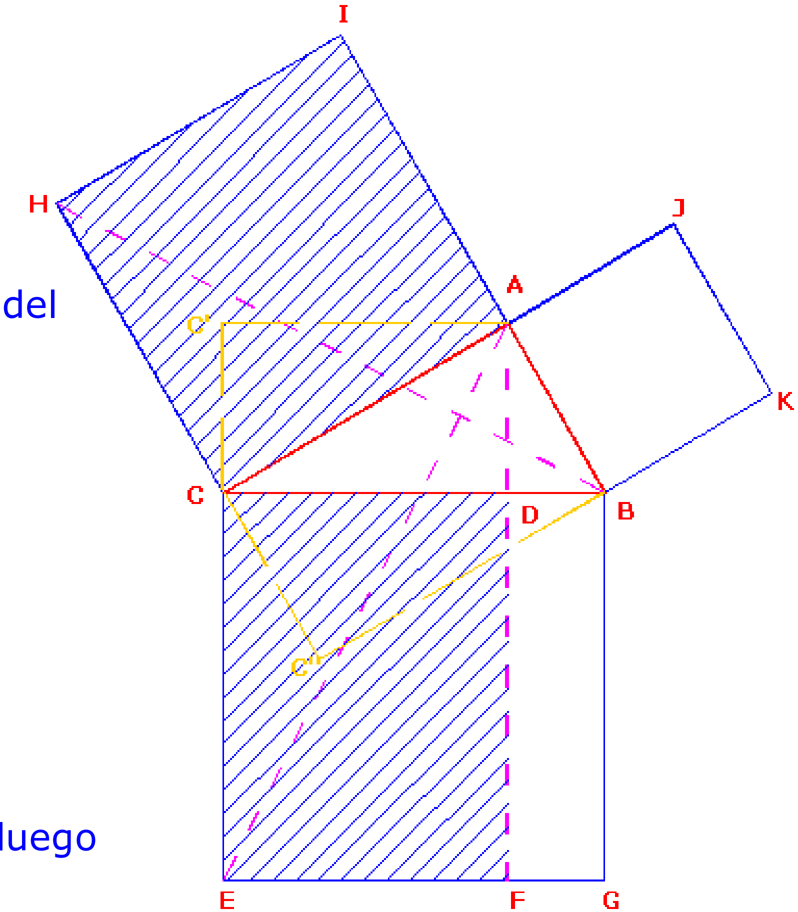
En los Δs ACE y BCH

$\angle$ ACE = $\angle$ BCH (90° +$\angle$ ACB)

AC=CH y CB=CE,

Luego

ΔACE=ΔBCH (2 lados y ángulo comprendido iguales)



El área de ΔACE=1/2 CExCD

1/2 base (CE) x altura (CD=AC')

El área de ΔBCH=1/2 CHxAC

1/2 base (CH) x altura (AC=BC'')

Como ΔACE=ΔBCH, sus áreas también lo serán, luego CExCD = ACxCH, pero ACxCH = AC^2, entonces

CExCD = ACxCH = AC^2

El área de ACHI= ACxCH = AC^2

El área de CDFE= CExCD = AC^2 de donde CDFE (área) = ACHI (área) = AC^2

Por iguales razonamientos se puede demostrar que ABKJ (área) = DBFG (area) = AB^2

CBGE (área) = BC^2 = CDEF (área) + DBGF (área)

Luego

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 \quad (c^2=a^2+b^2)$$

TEOREMA DE PITÁGORAS (Demostración analítica)

En un triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de las longitudes de los catetos es igual al cuadrado de la longitud de la hipotenusa.

Hipótesis

ΔABC es rectángulo en A

$AC=a;\ AB=b;\ BC=c$

Tesis

$a^2+b^2=c^2$

Demostración

Si se traza la altura (AD) correspondiente a la hipotenusa (BC), se tiene:

$BC/AC=AC/CD$

$BC/AB=AB/BD$

(Teorema de Euclides)

o lo que es igual

$c/a=a/CD$

$c/b=b/BD$

Despejando en ambas los catetos

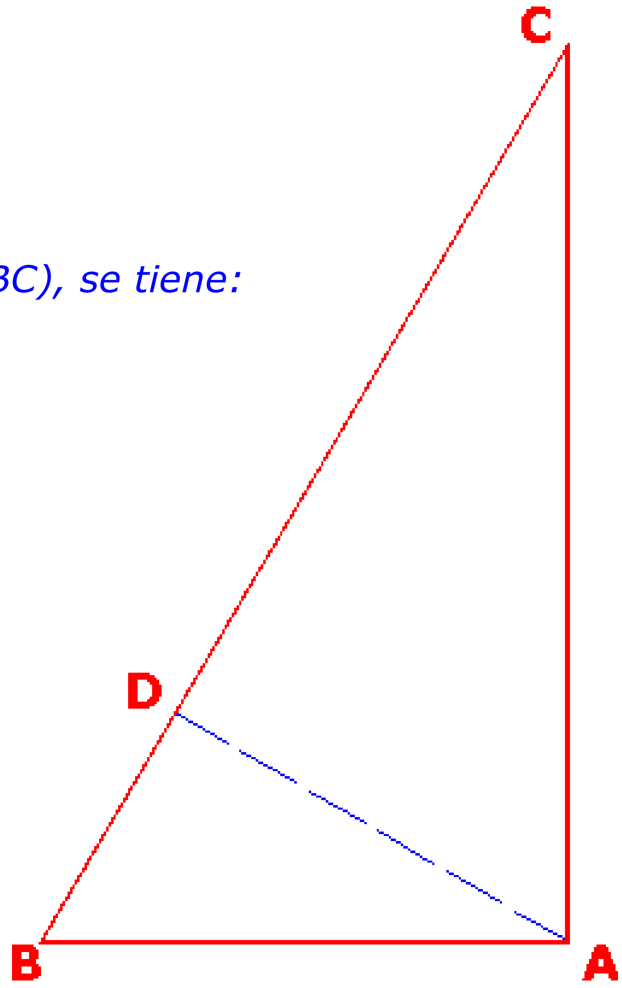
$a^2 = c.CD$

$b^2 = c.BD$

*Sumando ambas ecuaciones y despejando **c** (factor común)*

$a^2+b^2=c\,(CD+BD)$ *pero* $CD+BD = c$*, luego*

$\boldsymbol{a^2+b^2=c^2}$



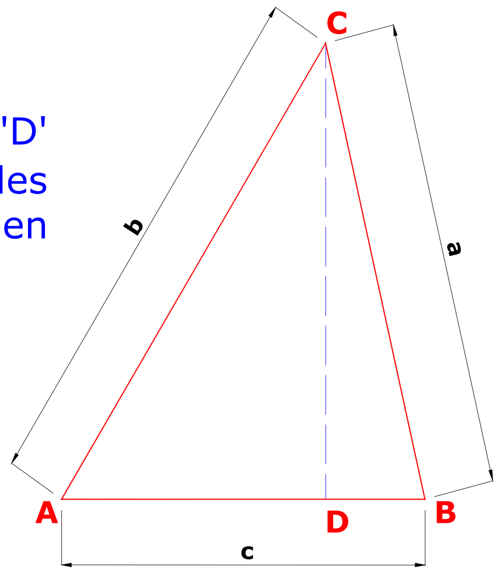
COROLARIOS

$\boldsymbol{a^2=c^2 - b^2}$

$\boldsymbol{b^2=c^2 - a^2}$

TRIÁNGULOS - RELACIONES MÉTRICAS

En los ΔABC y $\Delta A'B'C'$ *se han trazado las alturas* BD *y* B'D' *obteniéndose los triángulos rectángulos* ABD *y* A'B'D', en los cuales aplicando lo establecido en el Teorema de Pitágoras se pueden obtener las siguientes relaciones:



En el ΔABC

$a^2=CD^2+DB^2$ (1)

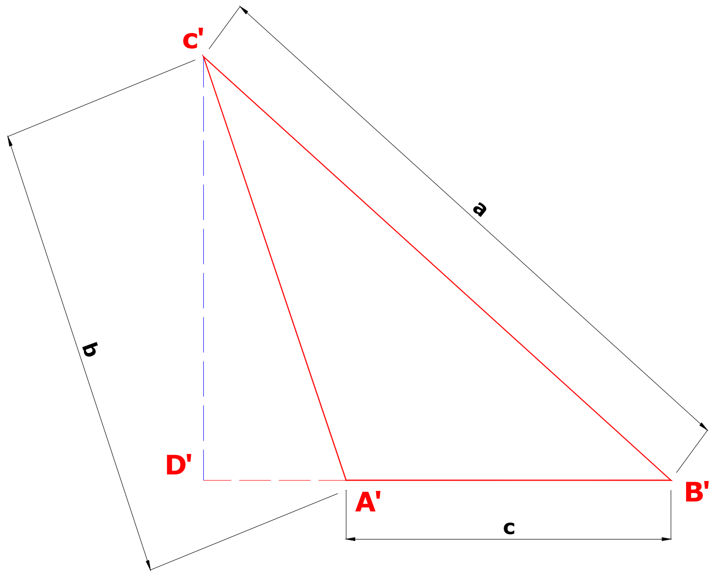
$b^2=CD^2+AD^2 \rightarrow CD^2=b^2-AD^2$ (2)

$DB=c-AD \rightarrow DB^2=(c-AD)^2$ (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1)

$a^2= b^2-AD^2 +(c-AD)^2 \rightarrow a^2= b^2-AD^2 +c^2+AD^2-2c.AD$

$$\mathbf{a^2= b^2+c^2-2c.AD}$$



En el $\Delta A'B'C'$

$a^2=C'D'^2+D'B'^2$ (1)

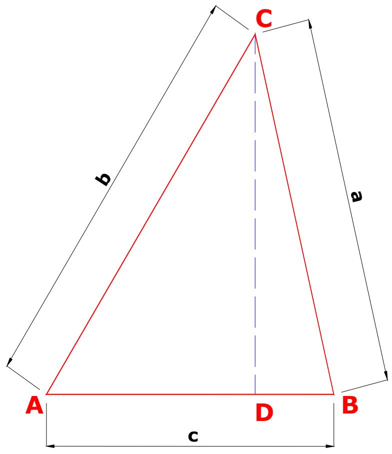
$b^2=C'D'^2+A'D'^2 \rightarrow C'D'^2=b^2-A'D'^2$ (2)

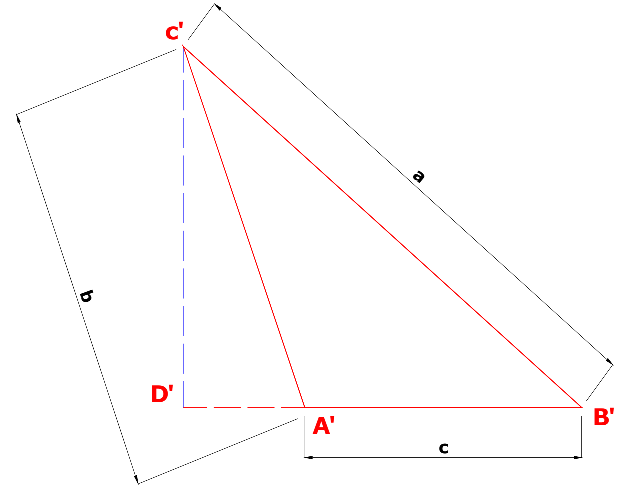
$D'B'=c+A'D' \rightarrow D'B'^2=(c+A'D')^2$ (3)

Sustituyendo (2) y (3) en (1)

$a^2= b^2-A'D'^2 +(c+A'D')^2 \rightarrow a^2= b^2-A'D'^2 +c^2+A'D'^2.$

$$\mathbf{a^2= b^2+c^2+2c.A'D'}$$





$$a^2= b^2+c^2-2c.AD$$

$$a^2= b^2+c^2+2c.A'D'$$

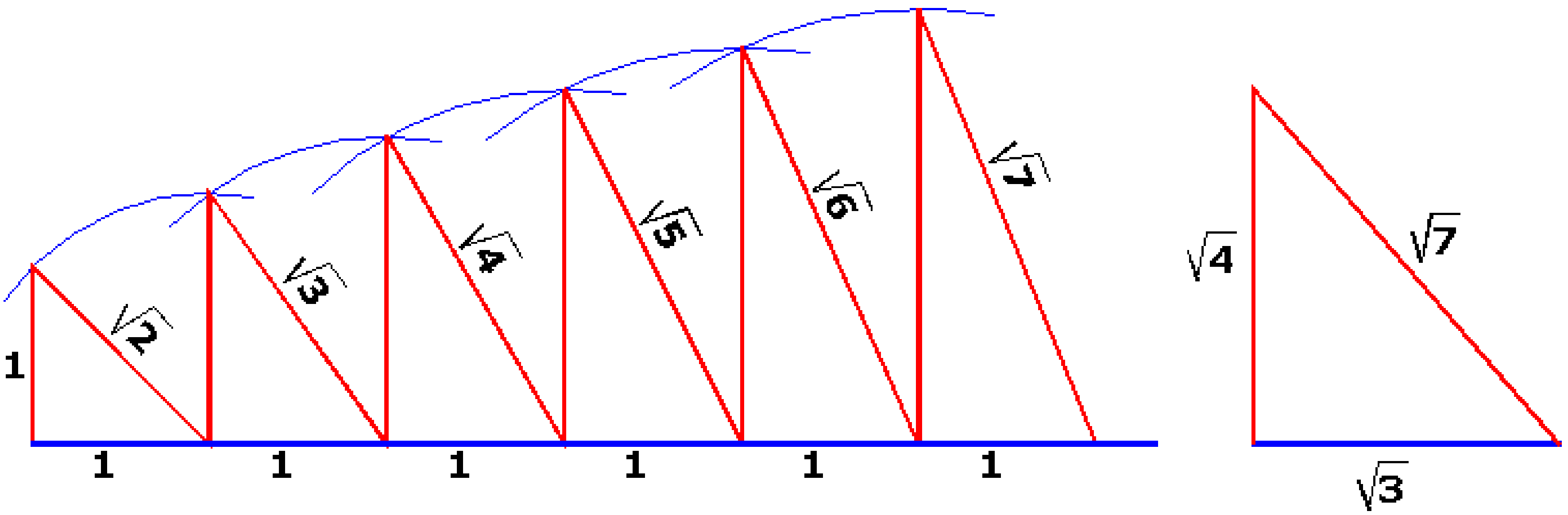
En todo triángulo, el cuadrado de un lado opuesto a un ángulo agudo, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados menos el doble producto de uno de estos lados por la proyección del otro sobre él.

En todo triángulo obtusángulo, el cuadrado del lado opuesto al ángulo obtuso, es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados más el doble producto de uno de estos lados por la proyección del otro sobre él.

Conocidas las dimensiones de los tres lados de un triángulo, se podrá conocer que tipo de triángulo es por simple comparación de la relación matemática de sus lados, así:

Supóngase que ***a*** *es el lado mayor y* ***b*** *y* ***c*** *los otros dos lados*
Si $a^2<b^2+c^2$ *-> el triángulo es* ***Obtusángulo***
Si $a^2>b^2+c^2$ *-> el triángulo es* ***Acutángulo***
Si $a^2=b^2+c^2$ *-> el triángulo es* ***Rectángulo***

Aplicando el Teorema de Pitágoras se podrá encontrar, gráficamente, la dimensión de un segmento cuya longitud sea igual al valor de un radical de segundo grado:

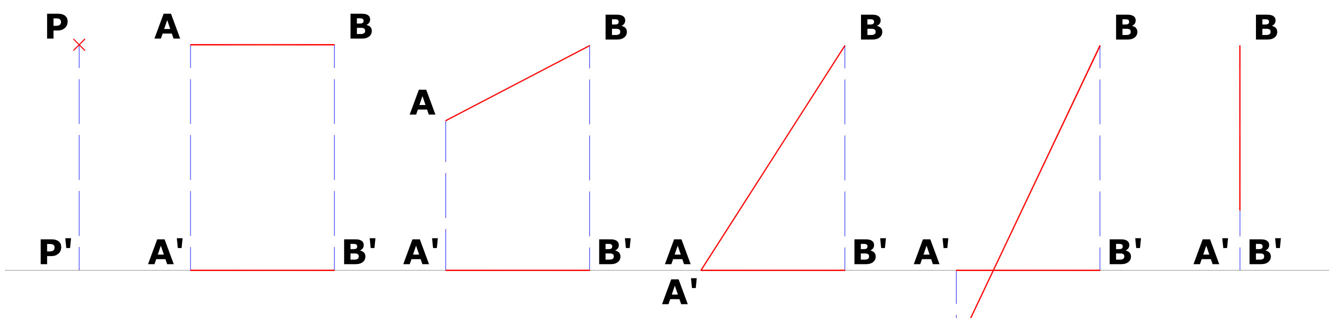


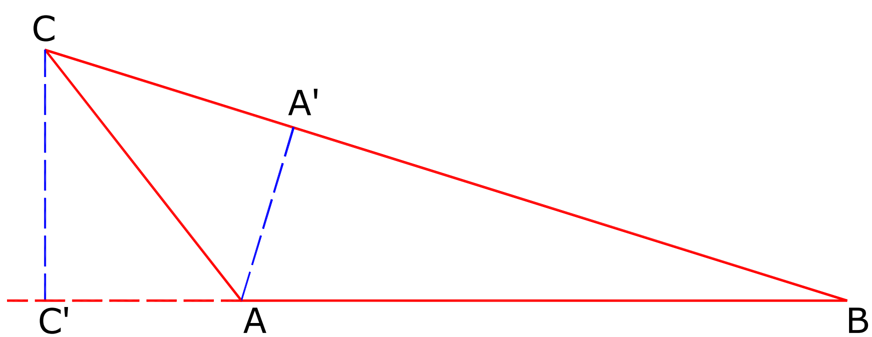
PROYECCIONES

Se llama proyección de un punto (P) sobre una recta al pié (P') de la perpendicular bajada desde el punto hasta la recta. La proyección de un segmento, será la porción de la recta (*segmento*), definido por las proyecciones de los puntos que lo determinan. La perpendicular bajada hasta la recta se denomina PROYECTANTE.

La figura representa las proyecciones sobre una recta de un punto (P) y de varios segmentos(AB) colocados en diferentes posiciones.

La longitud de la proyectante de cada punto, por ser perpendicular a la recta, representa la distancia del punto a la recta.





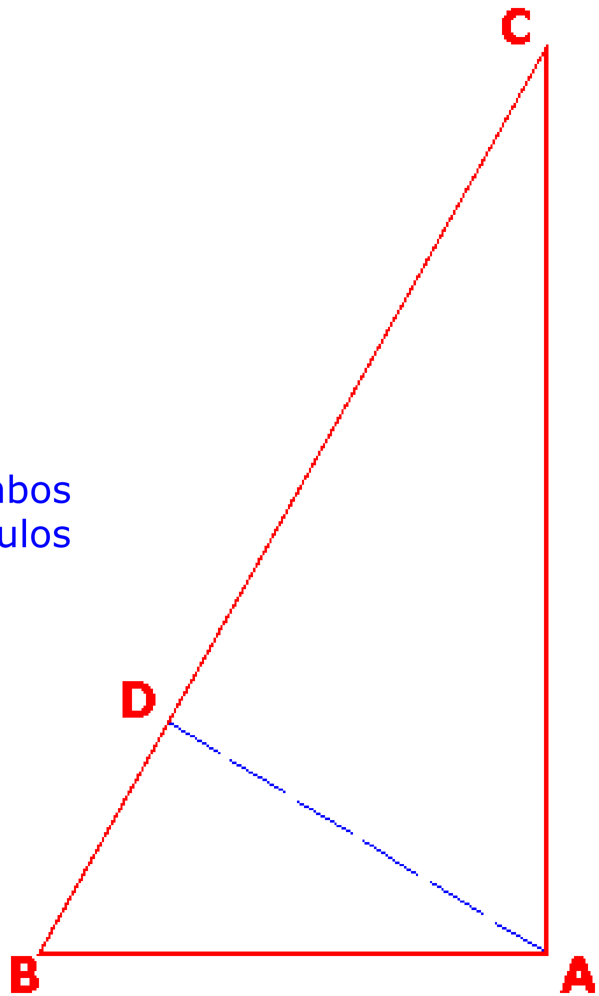
En un triángulo la proyección de un lado sobre otro la definen el vértice común y la proyección del otro vértice sobre el lado o su prolongación.

BC' es la proyección de BC sobre el lado AB CA' y BA' son, respectivamente, las proyecciones de AC y AB sobre el lado BC.

TEOREMAS DE EUCLIDES

1.- En un triángulo rectángulo, un cateto es media proporcional entre la hipotenusa y su proyección sobre ella.

2.- En un triángulo rectángulo, la altura sobre la hipotenusa es media proporcional de los dos segmentos en que ésta queda dividida.



Hipótesis

ΔABC es rectángulo en A

AD es la altura correspondiente a la hipotenusa

Tesis

1) BC/AC=AC/CD; BC/AB=AB/BD

2) CD/AD=AD/DB

Demostración

1) En los ΔABC y ΔADC

∠ABD = ∠DAC Agudos de lados ⊥

∠ADB = ∠ADC Ambos son rectos

luego, como la suma de los ángulos internos es igual en ambos triángulos, necesariamente ∠BAD = ∠ACD, o sea ambos triángulos tienen sus tres ángulos iguales por lo que

ΔABC ~ ΔADC luego

BC/AC=AC/CD

Por razonamiento similar

ΔABC ~ ΔABD luego

BC/AB=AB/BD

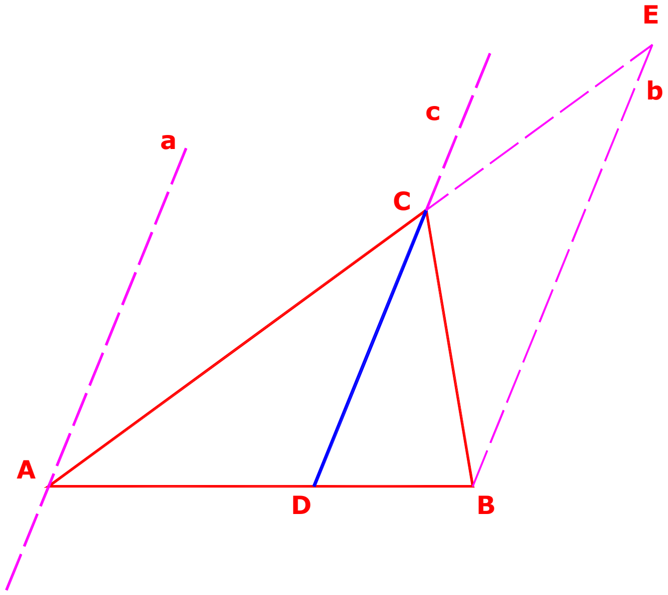
2)Por los razonamientos anteriores

ΔABC ~ ΔADC y ΔABC ~ ΔABD luego ΔADC ~ ΔABD; entonces

CD/AD=AD/DB → AD^2=CD x DB → AD=$\sqrt{\text{CD X AD}}$

PROPIEDAD DE LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO INTERIOR

En todo triángulo, la bisectriz de un ángulo interior divide al lado opuesto en dos segmentos que son proporcionales a los otros dos lados.



Hipótesis

CD es la bisectriz del ∠ ACB

Tesis

AD/DB=AC/CB

Demostración

Trace la recta b||CD por el vértice B
Prolónguese AC (Recta c) hasta cortar a b en el punto E
Se puede suponer que por A pasa la recta a||CD||b

AD/DB=AC/CE (1)

Paralelas a; b y c cortadas por las secantes AE y AB

∠ AEB = ∠ DCA --> Correspondientes ||'s b y c, cortadas por la secante BC
Pero ∠ ACD = ∠ DCB --> CD bisectriz de ∠ ACB
∠ DCB = ∠ CBE Alternos internos, ||'s b y c cortadas por BC
Luego ∠ CBE = ∠ AEB --> ΔABE es isósceles por tener dos ángulos iguales --> BC=CE
Sustituyendo en (1)

AD/DB=AC/BC

l.q.q.d.