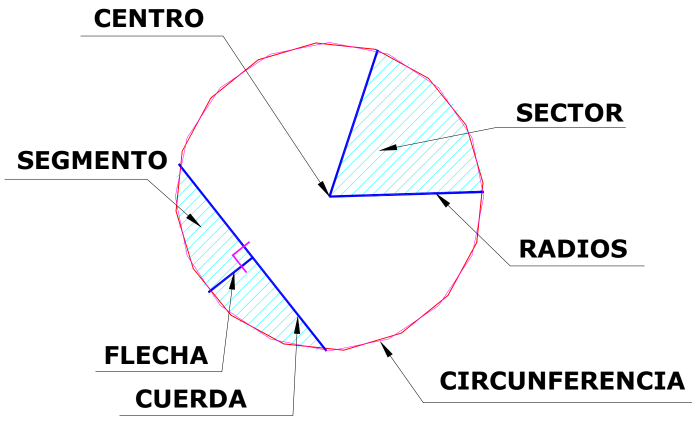
CIRCUNFERENCIA - -

LÍNEA CURVA

Por anteposición con la definición de RECTA.
Toda sucesión de puntos que no sigue una misma dirección es una LÍNEA CURVA.

Si los puntos no están contenidos en un plano se define como LÍNEA ALABEADA (P.Ej: Un Resorte)

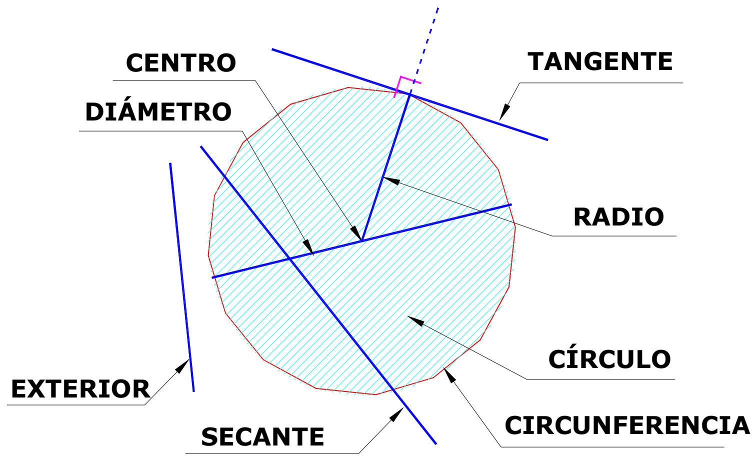


CIRCUNFERENCIA

Lugar geométrico de los puntos coplanares, que equidistan de otro.

CÍRCULO

Conjunto de los puntos del plano contenidos dentro de una circunferencia.



RADIO

Segmento de recta comprendido entre el CENTRO y la circunferencia.

SECANTE

Recta que corta a la circunferencia en dos puntos.

CUERDA

Segmento de una secante comprendido entre los dos puntos de corte de la circunferencia.

DIÁMETRO

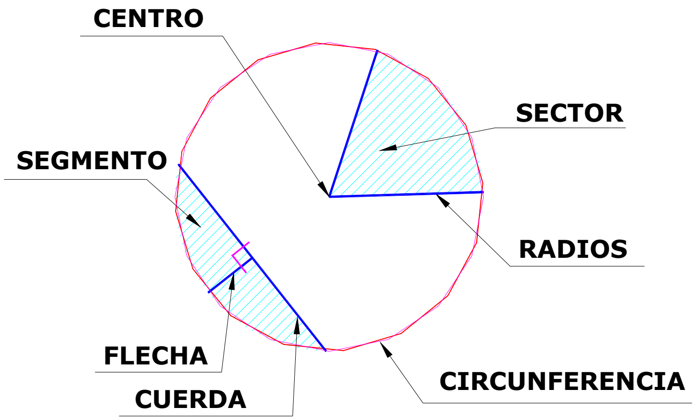
Cuerda que pasa por el centro. Su longitud es de 2 radios y divide al círculo en dos partes iguales, por lo que todo diámetro es un eje de simetría de la circunferencia y del círculo.

FLECHA
Segmento de recta comprendido entre el punto medio de una cuerda y la circunferencia

TANGENTE
Es una recta externa a la circunferencia que la toca en un solo punto, denominado PUNTO DE TANGENCIA. El radio que pasa por el Punto de Tangencia, es PERPENDICULAR a la tangente.

RECTA EXTERIOR
Es la recta que no tiene ningún punto en común con la circunferencia.

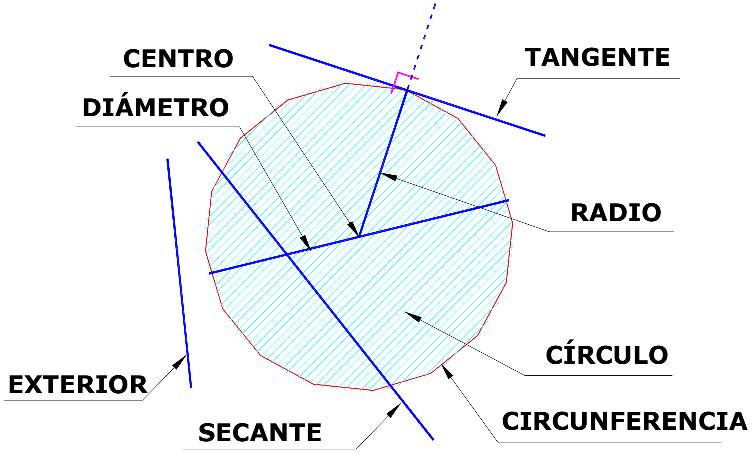
SECTOR
Es la porción de círculo limitada por dos radios.



π (PI) 3,14159…

Número trascendente definido como:

- Razón de la longitud de una circunferencia a su diámetro.
- Razón de la superficie de un círculo a la superficie de un cuadrado de lado igual al radio de aquel



$$L/D = \pi \qquad A/r.r = \pi$$

La longitud (perímetro) de la circunferencia es igual al producto de π por su diámetro.

El área del círculo es igual al producto de π por el cuadrado de su radio

RADIÁN

Ángulo al centro de una circunferencia cuyo arco correspondiente tiene igual longitud que el radio de la circunferencia.

En una circunferencia de radio igual a la unidad (1,00), el perímetro es igual a:

2π(Si R=2 -> D=2; P=πxD -> P=2π)

El ángulo al centro, que abarca la totalidad de la circunferencia vale 360°; luego:

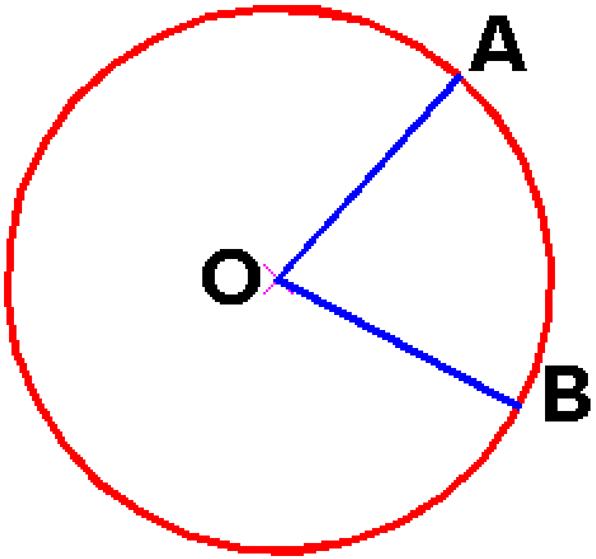
360° = 2π radianes -> 1°= 0,0174532... Radianes -> 1 radián = 57,2958...°

El radián es una unidad de medida de la longitud de los arcos de circunferencia como la abertura del ángulo, no expresa <u>DIRECTAMENTE</u>, el largo del arco medido en unidades de longitud (metro, etc.) el cual será función de su radio.

<u>MEDIDA DE ÁNGULOS EN LAS CIRCUNFERENCIAS</u>

<u>ÁNGULO CENTRAL O AL CENTRO</u>

Es el que tiene su vértice en el centro de la circunferencia



Por definición de la unidad de medida de los arcos (radián).

$\frown$AB es igual al $\angle$ AOB.

Luego

$\angle$ **AOB =**$\frown$**AB**

La amplitud del ángulo al centro de una circunferencia es igual a la longitud del arco abarcado por sus lados

ÁNGULO INSCRITO

Es el que tiene su vértice sobre la circunferencia y sus lados son secantes.

Se pueden presentar tres casos o posibilidades:

1) Que uno de los lados pase por el centro de la circunferencia

Utilizando la construcción auxiliar MA se tiene:

En ΔAMC (Isósceles)

∠C=∠A

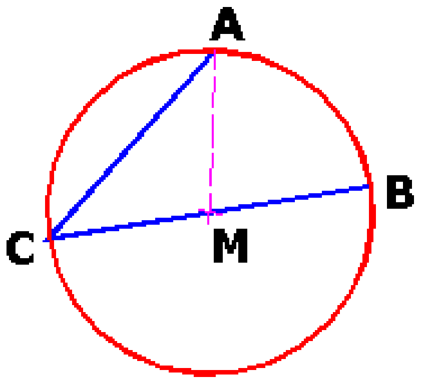
∠C+∠A=∠AMB (Exterior del ΔAMC)

Sustituyendo

2∠C=∠AMB

Pero ∠AMB= ∩AB; luego

∠C= 1/2 ∩AB



2) Que el centro de la circunferencia esté dentro del ángulo

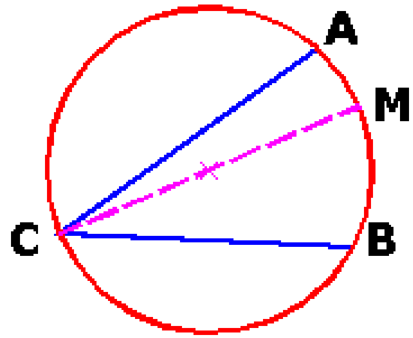
∩AB= ∩AM+ ∩MB

Según demostración anterior

∠ACM= 1/2 ∩AM

∠MCB= 1/2 ∩MB; sumando

∠C= 1/2 ∩AB



3) Que el centro de la circunferencia esté fuera del ángulo

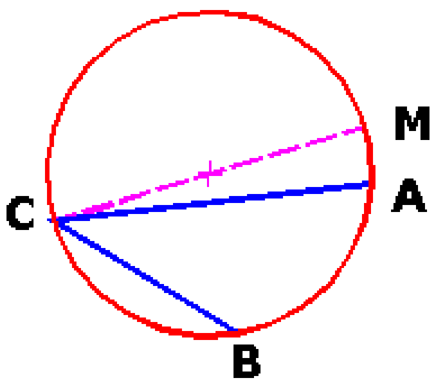
∩AB= ∩MB- ∩MA

Según demostración anterior

∠MCB= 1/2 ∩MB

∠MCA= 1/2 ∩MA; restando

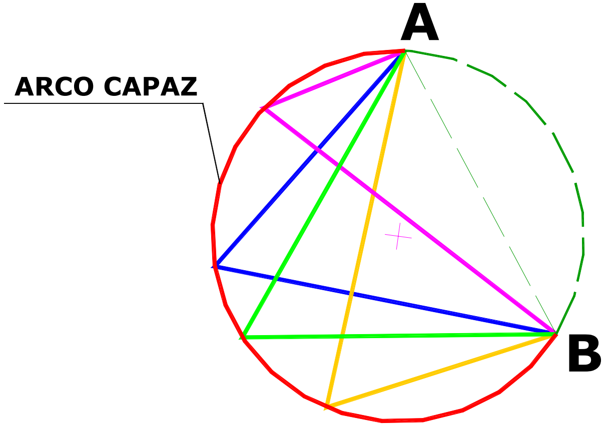
∠C= 1/2 ∩AB



La amplitud del ángulo inscrito a una circunferencia es igual a la mitad de la longitud del arco abarcado por sus lados

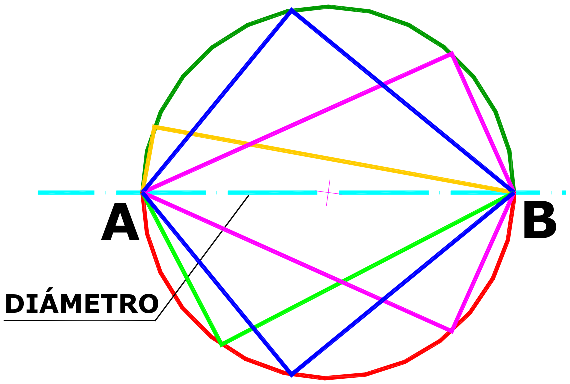
ARCO CAPAZ

Todos los ángulos inscritos en una circunferencia o en circunferencias iguales, que abarcan un mismo arco, o sus extremos están sobre la misma secante (AB en la figura) son iguales.
El arco donde se inscribe su vértice se denomina ARCO CAPAZ del ángulo, y es el LG de dichos ángulos.



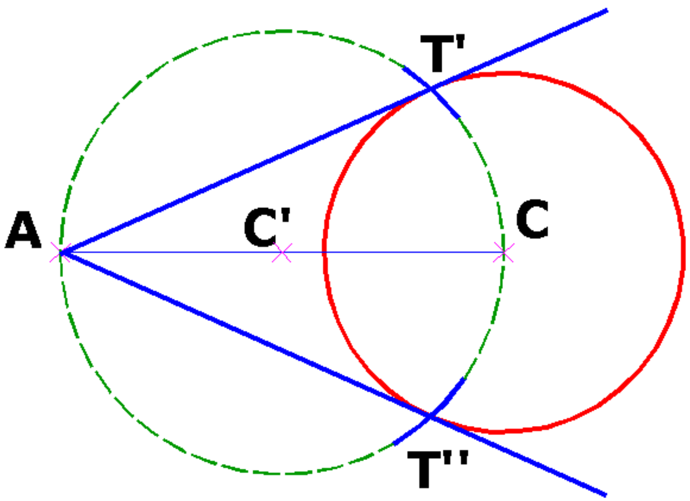
Si el arco abarcado es una semi-circunferencia, o sea la cuerda es un diámetro, el arco será igual a π (180°), el valor de los ángulos será igual a 1/2 $\frown$AB=90°.

El Arco Capaz de los ángulos rectos es una semicircunferencia



APLICACIÓN PRÁCTICA

Ubicar los puntos de tangencia sobre una circunferencia de las rectas que pasan por un punto exterior a ella.



Sea el punto A un punto exterior a la circunferencia de centro C.

Las semicircunferencias $\frown$AC, son los arcos capaces de los ángulos rectos con el vértice (T' y T'') sobre ellas, y extremos en A y en C.

T'C y T''C, que son radios de la circunferencia C' son perpendiculares a AT' y AT'' respectivamente.

Luego AT' y AT'' son las tangentes a la circunferencia de centro C. Siendo T' y T'' los puntos de tangencia

ÁNGULO SEMI-INSCRITO

Es el que tiene su vértice sobre la circunferencia, uno de sus lados es secante y el otro tangente a la circunferencia

Se pueden presentar dos casos o posibilidades

1) Que el ángulo sea agudo

Sea ∠BAT un ángulo semi-inscrito en la circunferencia C

∠BAT=∠ADB por tener sus lados perpendiculares

∠ADB=1/2 ∩AEB por ser inscrito en C

Luego

∠BAT=1/2 ∩AB

2) Que el ángulo sea obtuso

Sea ∠BAT' un ángulo semi-inscrito en la circunferencia C

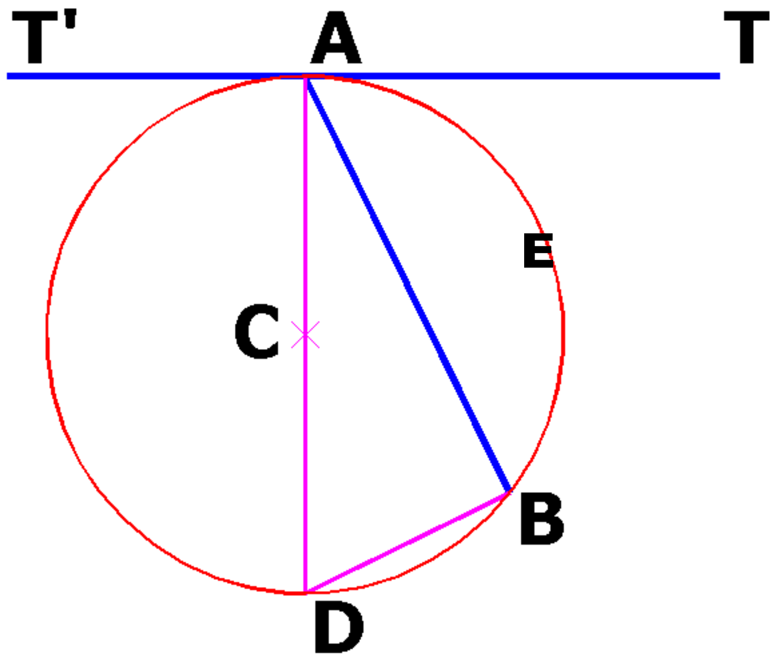
∠BAT'=∠BAD+∠ABD (∠T'AD)

∠BAT'= 1/2 ∩BD + 1/2 ∩DA

∠BAT'= 1/2 (∩BD + ∩DA)

∠BAT'= 1/2 ∩ADB

La amplitud del ángulo semi-inscrito a una circunferencia es igual a la mitad de la longitud del arco abarcado entre el lado y su vértice



ÁNGULO EXINSCRITO

Es el que tiene su vértice sobre la circunferencia, uno de sus lados es una cuerda y el otro la rama exterior de una secante

Sea $\angle$ ABE un ángulo exinscrito en la circunferencia C

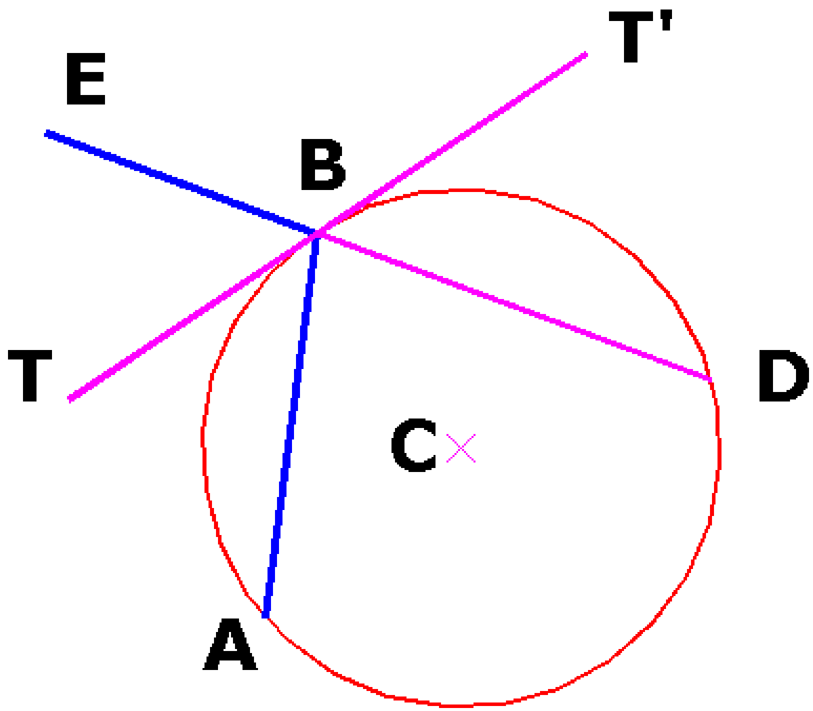
$\angle ABE = \angle ABT + \angle TBE$

$\angle TBE = \angle DBT'$ (Opuestos por el vértice)

$\angle ABE = \angle ABT + \angle DBT'$

$\angle ABE = 1/2 \frown AB + 1/2 \frown BD$

$\angle ABE = 1/2 (\frown AB + \frown BD)$



La amplitud del ángulo exinscrito a una circunferencia es igual a la semisuma de la longitud de los arcos abarcados entre el vértice y los extremos del lado interior y la prolongación del lado exterior

ÁNGULO INTERIOR

Es el que tiene su vértice en el área interna de la circunferencia

Sea ∠AED un ángulo interior a la circunferencia O

∠AED=∠DCA + ∠BAC (Externo a un triángulo)

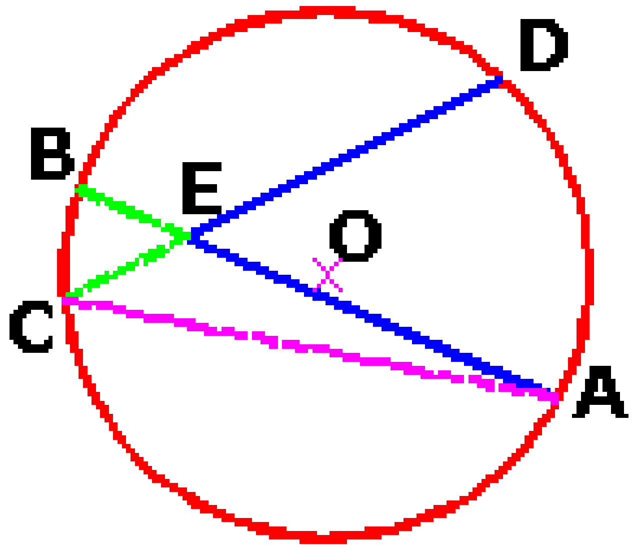
∠DCA=1/2 ∩AD

∠BAC=1/2 ∩BC

∠AED=1/2 ∩AD + 1/2 ∩BC

∠AED=1/2 (∩AD + ∩BC)

La amplitud del ángulo interior a una circunferencia es igual a la semi-suma de las longitudes de los arcos abarcados por sus lados y su prolongación



ÁNGULO EXTERIOR

Es el que tiene su vértice fuera del área interna de la circunferencia

Se pueden presentar los siguientes casos:

Los dos lados secantes

Un Lado secante y el otro tangente

Los dos lados tangentes

(En los tres casos)

Sea $\angle CAD$ un ángulo exterior a la circunferencia O

$\angle CED = \angle CAD + \angle ACE$ (*Externo a un triángulo*)

$\angle CAD = \angle CED - \angle ACE$

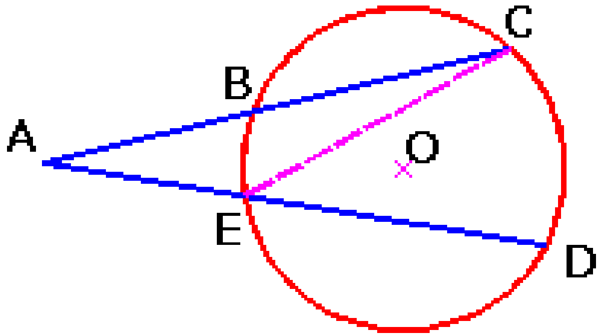
$\angle ACE = 1/2 \cap BE$

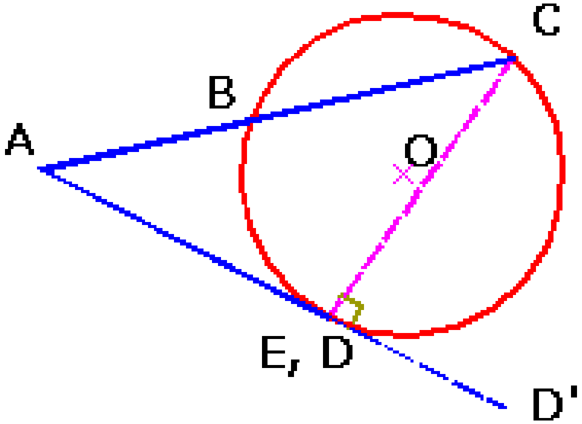
$\angle CED = 1/2 \cap CD$

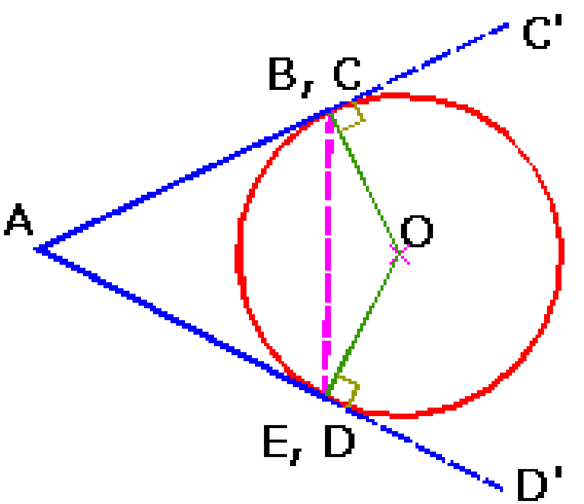
$\angle CAD = 1/2 \cap CD - 1/2 \cap BE$

$\angle CAD = 1/2 (\cap CD - \cap BE)$

La amplitud del ángulo exterior a una circunferencia es igual a la semi-diferencia de las longitudes de los arcos abarcados entre sus lados





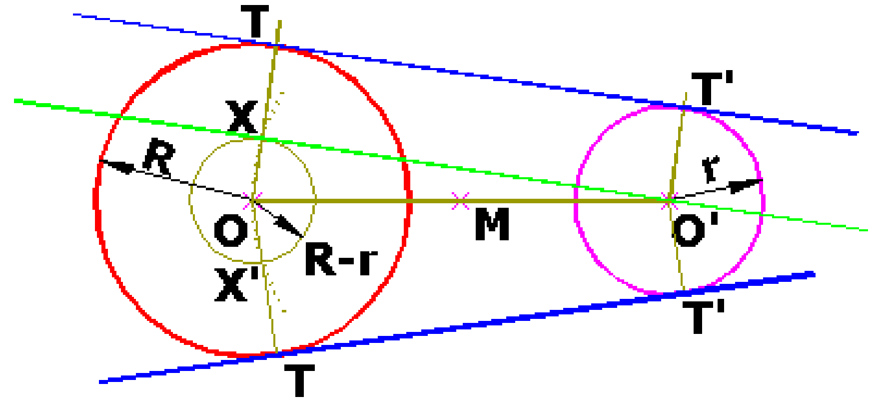


TANGENTES A DOS CIRCUNFERENCIAS

Un método aceptado en geometría para la solución de problemas consiste en suponerlos resueltos e inferir las acciones requeridas para llegar a esa solución. Un ejemplo de este método es encontrar las líneas tangentes a dos circunferencia que no tienen puntos en común.

Se plantean dos casos generales:Tangentes Externas y Tangentes Internas.

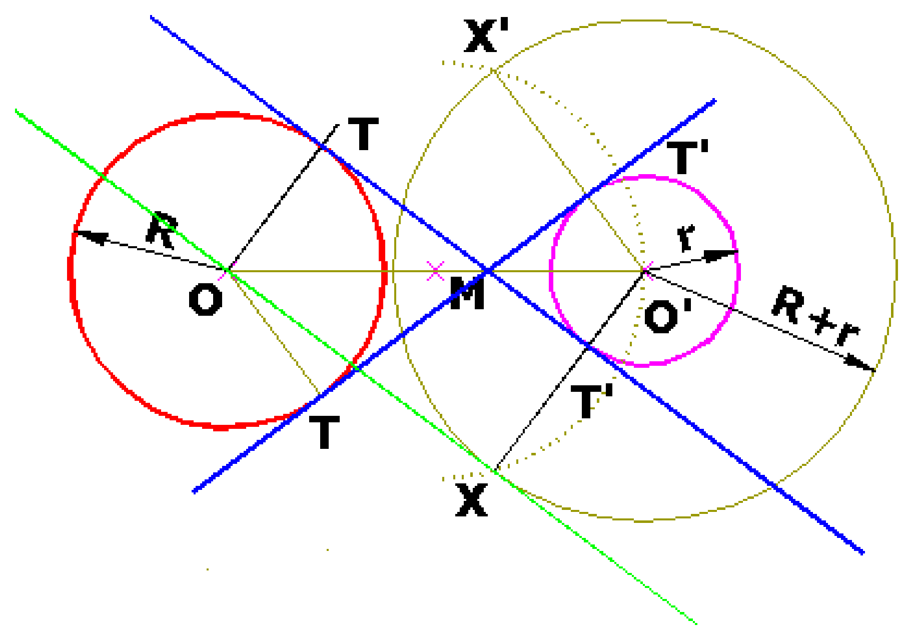
La solución al problema planteado son las rectas TT', tangentes a ambas circunferencias en cada caso.



Como esas rectas son tangentes a las circunferencias, serán perpendiculares a los radios en los puntos de tangencia. Las rectas O'X, trazadas paralelas a TT', formarán con estas, los paralelogramos TT'XO' luego, si se puede determinar la posición de O'X (Caso 1) o de OX (Caso 2), una paralela a ella por el punto T' o T, será la tangente buscada.

La distancia O'T' es r (Caso 1) entonces la distancia OX será Rr. En el segundo caso, la distancia OT es R y la distancia O'X será R+r.

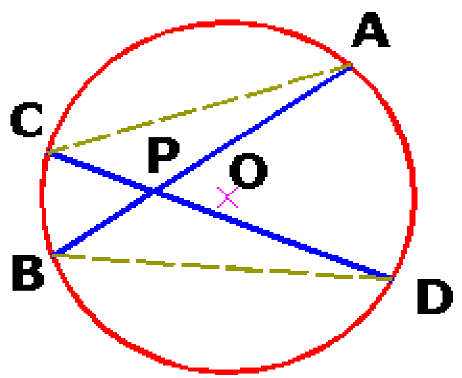
Los puntos X y T' podrán ser determinados trazando el LG del vértice recto del triángulo que tiene por hipotenusa OO' (Circunferencia de diámetro OO') que corte las circunferencias con centros O y O' de radios Rr y R+r respectivamente



PROPORCIÓN DE LAS SECANTES A LA CIRCUNFERENCIA

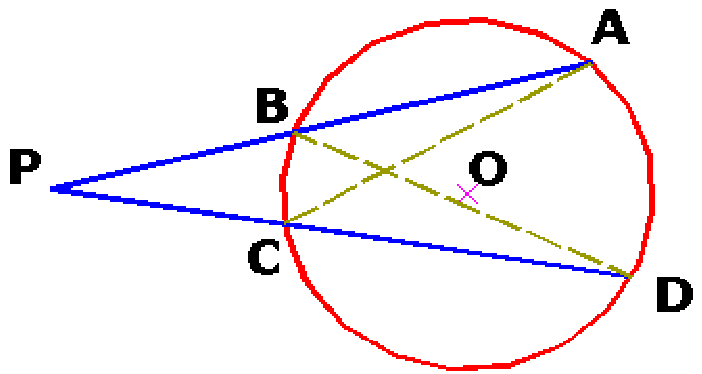
El producto de las distancias desde un punto cualquiera del plano de la circunferencia, a los puntos de intersección de una secante que pase por dicho punto, es constante.

El punto puede ser interior o exterior a la circunferencia



Sean AB y CD secantes a la circunferencia O que pasan por el punto P

En ambos casos
ΔPAC ~ ΔPDB -> Tienen 3 ángulos iguales
∠DPB = ∠CPA -> Opuestos por el vértice o común
∠ BDP = ∠ PAC -> Ángulos inscritos que abarcan el mismo arco (∩BC)



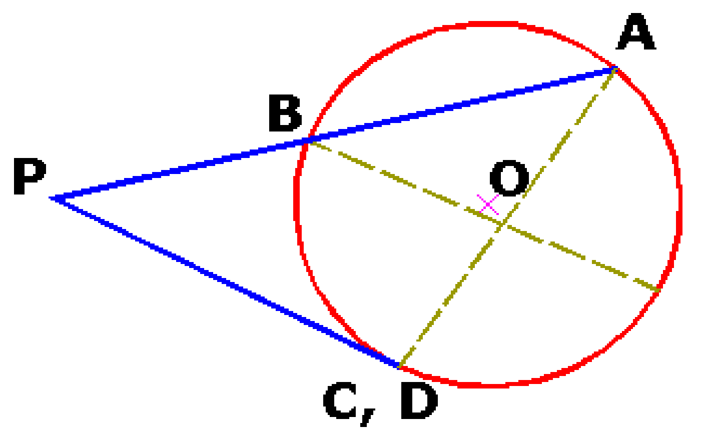
Si dos ángulos son iguales el tercero también lo será
Luego
PA/PD = PC/PB ->

PA x PB = PD x PC = K (Constante)

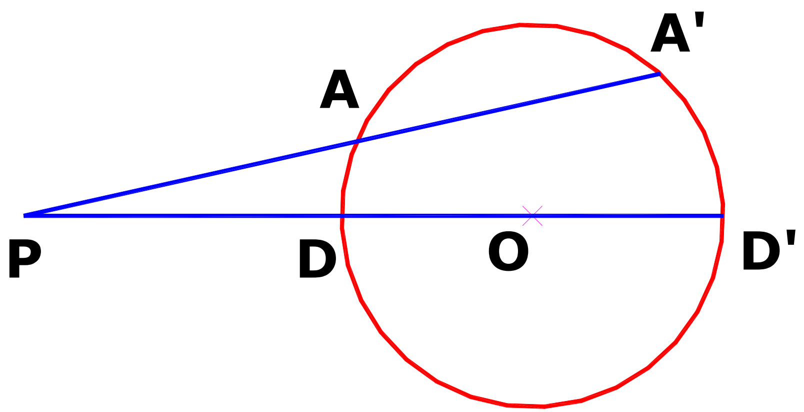
Si los puntos C y D se acercan hasta coincidir en el punto de tangencia de la recta PC con la circunferencia

PC = PD
Luego

PA x PB = (PC)^2 = K (Constante)



POTENCIA DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA



Se ha demostrado que:

PAxPA'=PDxPD'=K

Pero

PD =PO-OD

PD'=PO+OD'=PO+OD

PAxPA'=(PO-OD)x(PO+OD)

PAxPA'=PO^2 – OD^2

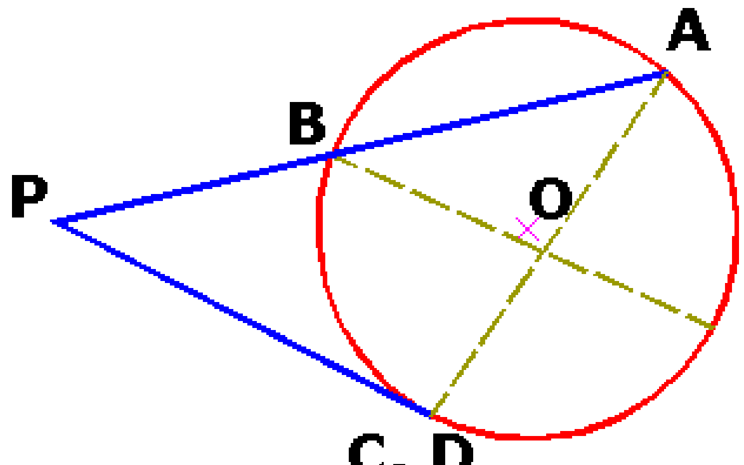
PAxPA'= d^2 – R^2 =K

Siendo **d** la distancia al centro y **R** el radio de la circunferencia

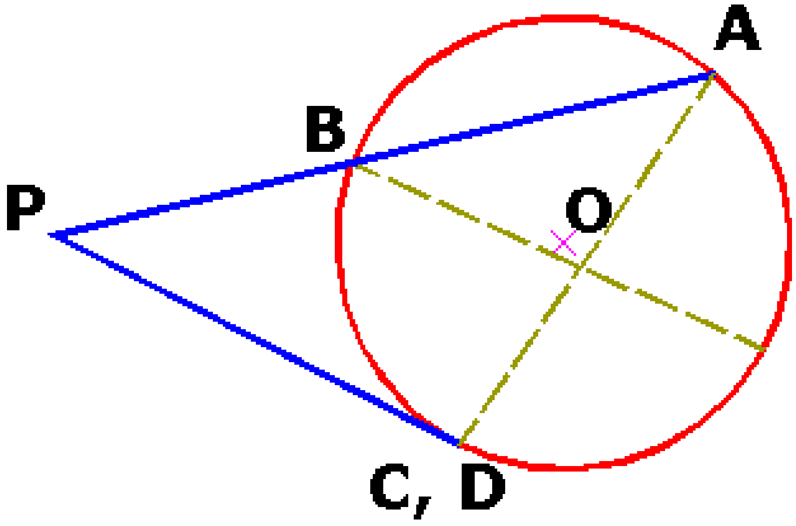
Este producto constante de las distancias de un punto dado, hasta las intersecciones de una secante cualquiera, trazada desde él hasta la circunferencia, se llama:

POTENCIA DEL PUNTO RESPECTO A LA CIRCUNFERENCIA

*Si el punto está en el exterior de la circunferencia, ambos segmentos tendrán el mismo sentido, luego su producto será positivo (**potencia positiva**). Si está sobre la circunferencia, uno de los segmentos será nulo (**potencia nula o cero**). Si el punto está en el interior de la circunferencia los segmentos tendrán sentido distinto luego su producto será negativo (**potencia negativa**)*



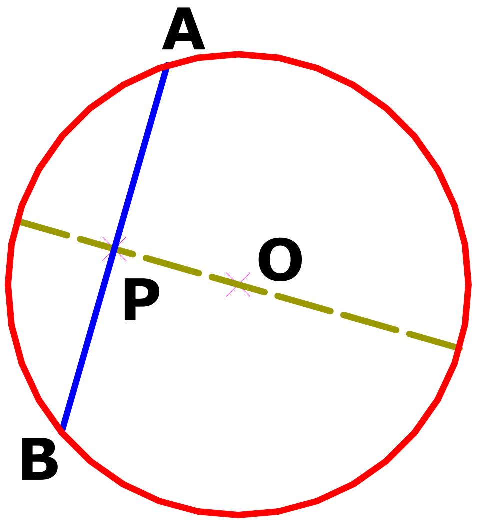
POTENCIA DE UN PUNTO RESPECTO A UNA CIRCUNFERENCIA



PUNTO EXTERIOR

Es igual al cuadrado del segmento de tangente a la circunferencia, comprendido entre el punto dado y el punto de contacto.

PA x PB = (PC)² = K



PUNTO INTERIOR

Es igual al cuadrado, cambiado de signo, del segmento de la semicuerda perpendicular al diámetro de la circunferencia que pasa por el punto.

AP=BP, por definición de potencia

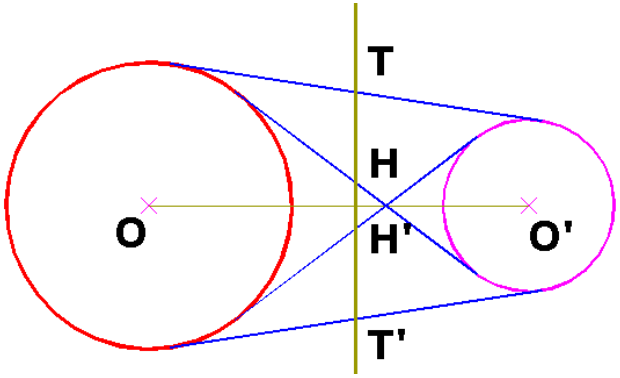
PA x PB pero |PA|= -|PB|

-|PA| x |PB|=-|PB| ²

EJE RADICAL DE DOS CIRCUNFERENCIAS

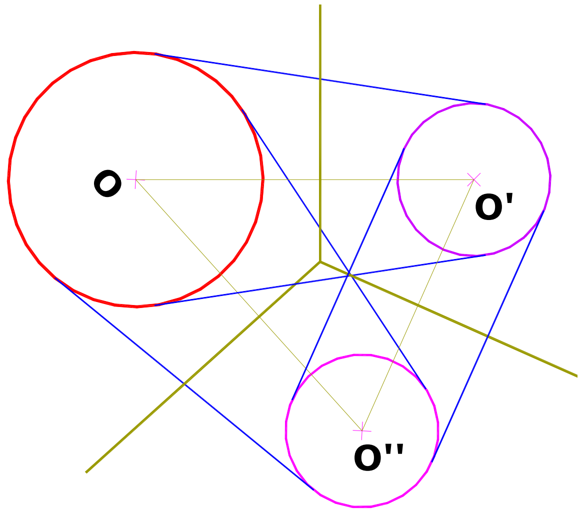
Se define como el LG de los puntos de igual potencia respecto a las circunferencias

La recta que pasa por los puntos medios de las tangentes comunes a las dos circunferencias es el Eje Radical, ya que los segmentos de tangentes son iguales y por lo tanto sus cuadrados, o sea la Potencia de cada punto sobre la recta.



CENTRO RADICAL

Los ejes radicales de tres circunferencias tomadas dos a dos, se cortan en un punto que se llama el Centro Radical que necesariamente tiene la misma potencia respecto a las tres circunferencias.



CIRCUNFERENCIAS ORTOGONALES

Dos circunferencias que se cortan son ortogonales si los radios de cada una de ellas a los puntos de intersección, son tangentes en esos puntos a la otra circunferencia respetivamente. O sea, ambos radios son pependiculares entre sí.

La condición para que dos circunferencias que se cortan sean ortogonales es que la potencia del centro de cada una respecto a la otra, sea igual al cuadrado de su radio.