FIGURAS PLANAS

- ÁNGULOS

FIGURAS TRIDIMENSIONALES

- ÁNGULO DIEDRO

# FIGURAS PLANAS

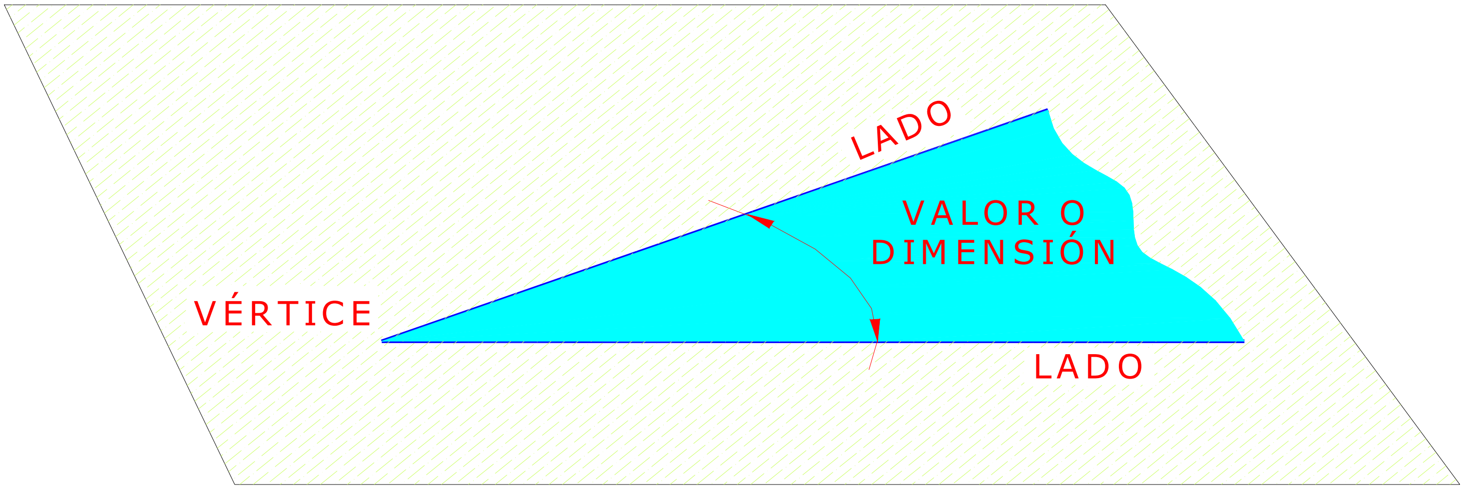
Se llaman así a todas las figuras geométricas cuyos puntos (TODOS) están contenidos en un plano

- ÁNGULOS
- POLÍGONOS
- CÓNICAS

## ÁNGULOS

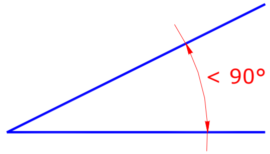
Es la porción de un plano contenido entre dos semirrectas que tienen su origen en común. *Se designan con una letra griega o tres letras con el vértice en medio y arriba un símbolo que indica un ángulo (a; b; AÔM; ∠ABC; etc)*

- LADOS: Son las semirrectas
- VÉRTICE: Es el punto común de los lados
- VALOR O DIMENSIÓN: Es la abertura de los lados.
  *Normalmente se expresa en GRADOS o en RADIANES*

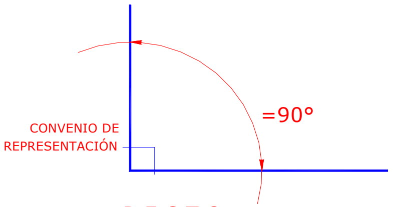


*Según su DIMENSIÓN los ángulos pueden ser:*

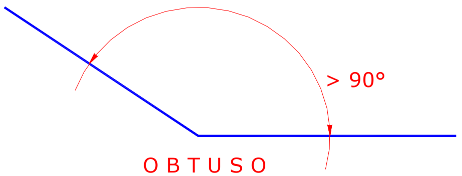
- **AGUDOS** : Cuando su valor es menor de 90°
- **OBTUSOS**: Cuando su valor es mayor de 90°
- **RECTOS** : Cuando su valor es igual a 90° ($\pi/2$)
- **LLANOS** : Cuando su valor es igual a 180° ($\pi$)



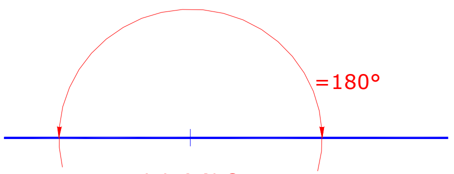

A G U D O



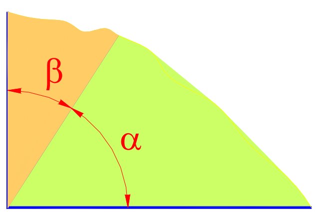

R E C T O




O B T U S O

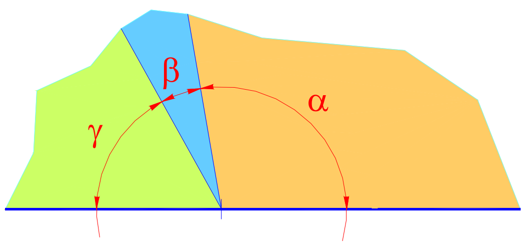



L L A N O




C O M P L E M E N T A R I O S

$\alpha + \beta = 90°$




S U P L E M E N T A R I O S

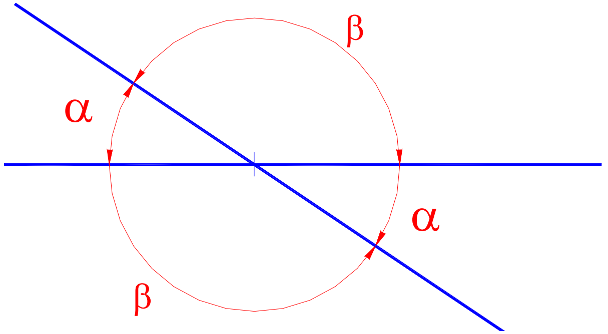
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

- **COMPLEMENTARIOS**: Son dos o más ángulos que suman 90°($\pi/2$)
- **SUPLEMENTARIOS** : Son dos o más ángulos que suman 180°($\pi$)

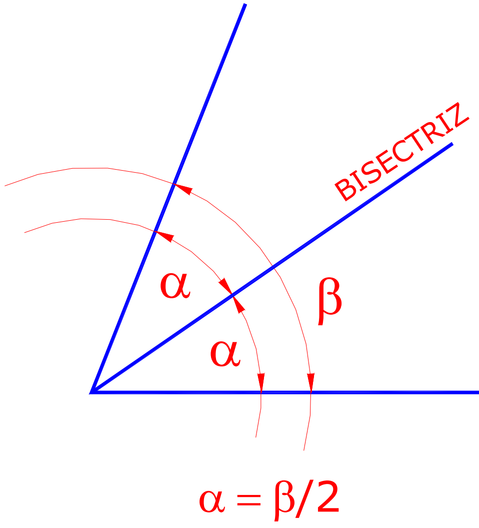
*Según su POSICIÓN RELATIVA los ángulos pueden ser:*

**ADYACENTES** : Cuando tienen un lado y el vértice común

**OPUESTOS POR EL VÉRTICE:** Cuando tienen el vértice común y los lados de uno de ellos son la prolongación de los lados del otro.
*Necesariamente son IGUALES*




**BISECTRIZ**: Es la línea que partiendo del vértice divide al ángulo en dos partes iguales



**perpendicular** (Del lat. *perpendicularis*).
Dicho de una línea o un plano: Que forma ángulo recto con otra línea o con otro plano.

**paralelo, la** (Del lat. *paralelos, y este del gr.* $\pi\alpha\rho\alpha\lambda\lambda\eta\lambda o\zeta$).
Dicho de dos o más líneas o planos: Equidistantes entre sí y que por más que se prolonguen no pueden encontrarse.

Dos rectas coplanares perpendiculares a otra recta, son paralelas

Dos rectas perpendiculares a un plano son paralelas

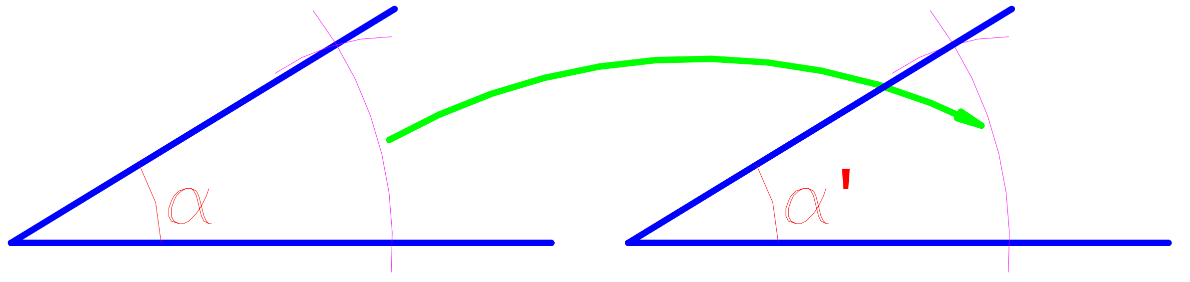
En el espacio existen infinitas rectas que son perpendiculares a otra recta

Por un punto exterior a una recta pasan INFINITAS rectas perpendiculares a ella

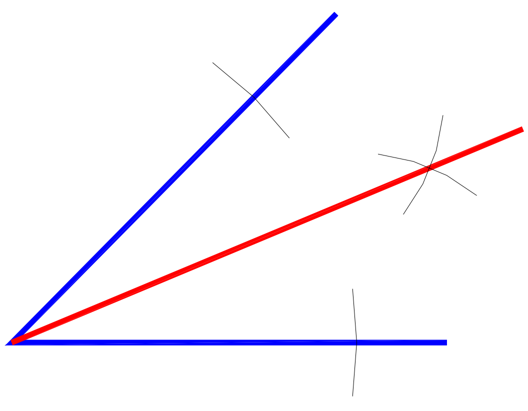
Por un punto exterior a un plano sólo pasa UNA recta perpendicular al plano

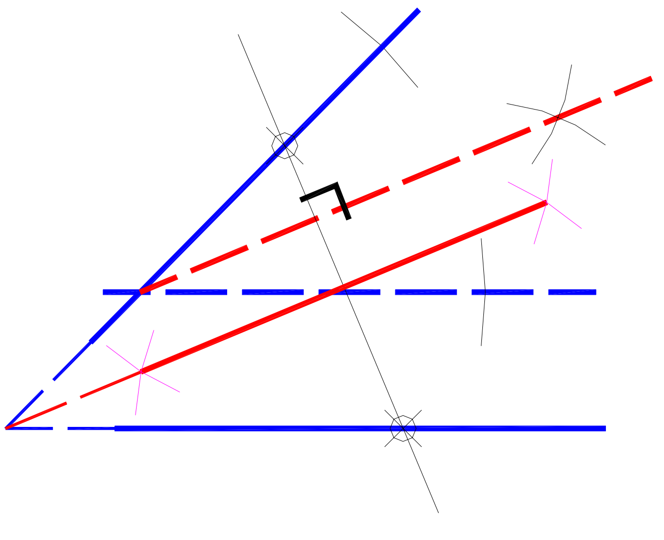
Toda recta perpendicular a un plano será perpendicular a TODAS las rectas del plano. *Bastará demostrar que sea perpendicular a dos rectas que se corten del plano, para aseverar que sea perpendicular al plano*

# COPIA O TRANSPORTACIÓN DE ÁNGULOS



# TRAZADO DE LA BISECTRIZ DE UN ÁNGULO





*Siendo AB||A'B' una secante define en el conjunto los siguientes ángulos:*

ALTERNOS EXTERNOS

Situados en lados alternos de la secante en el exterior de las paralelas

(1-3; 4-2'). SON IGUALES

ALTERNOS INTERNOS

Situados en lados alternos de la secante en el interior de las paralelas

(2-4´; 3-1´). SON IGUALES

CORRESPONDIENTES

Situados del mismo lado de la secante en lados alternos de las paralelas

(1-1´; 2-2´; 3-3´; 4-4´). SON IGUALES

CONJUGADOS EXTERNOS

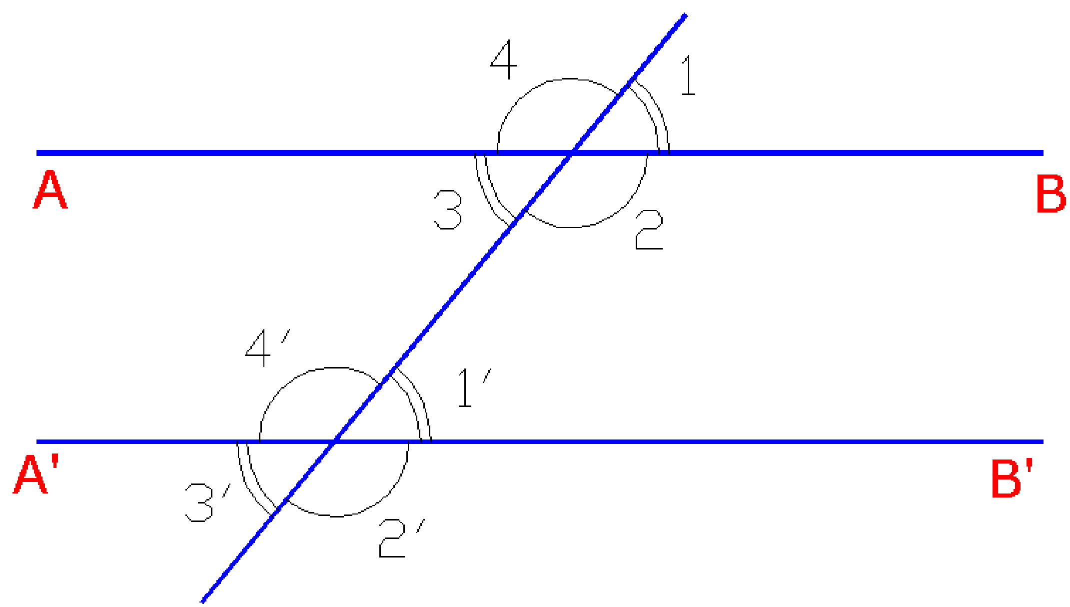
Situados del mismo lado de la secante en el exterior de las paralelas

(1-2´; 4-3´). SON SUPLEMENTARIOS

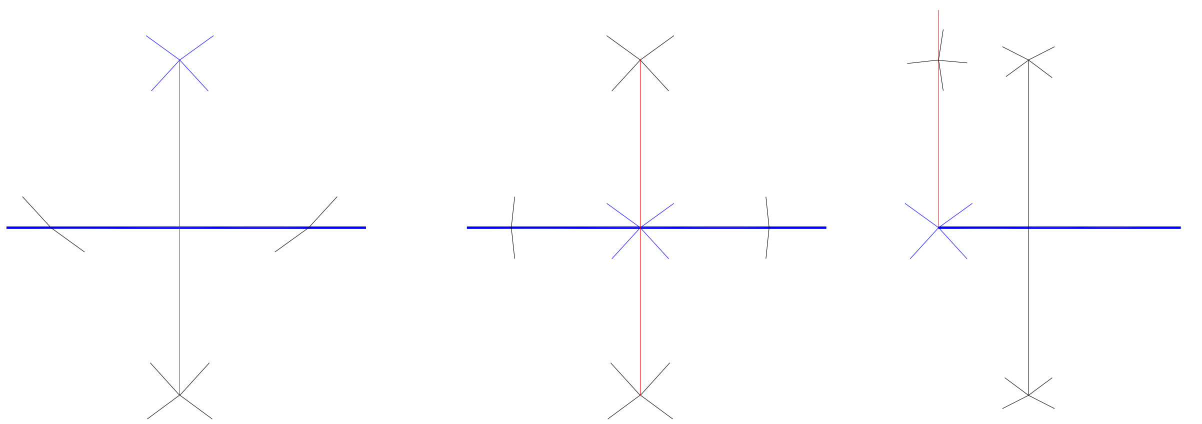
CONJUGADOS INTERNOS

Situados del mismo lado de la secante en el interior de las paralelas

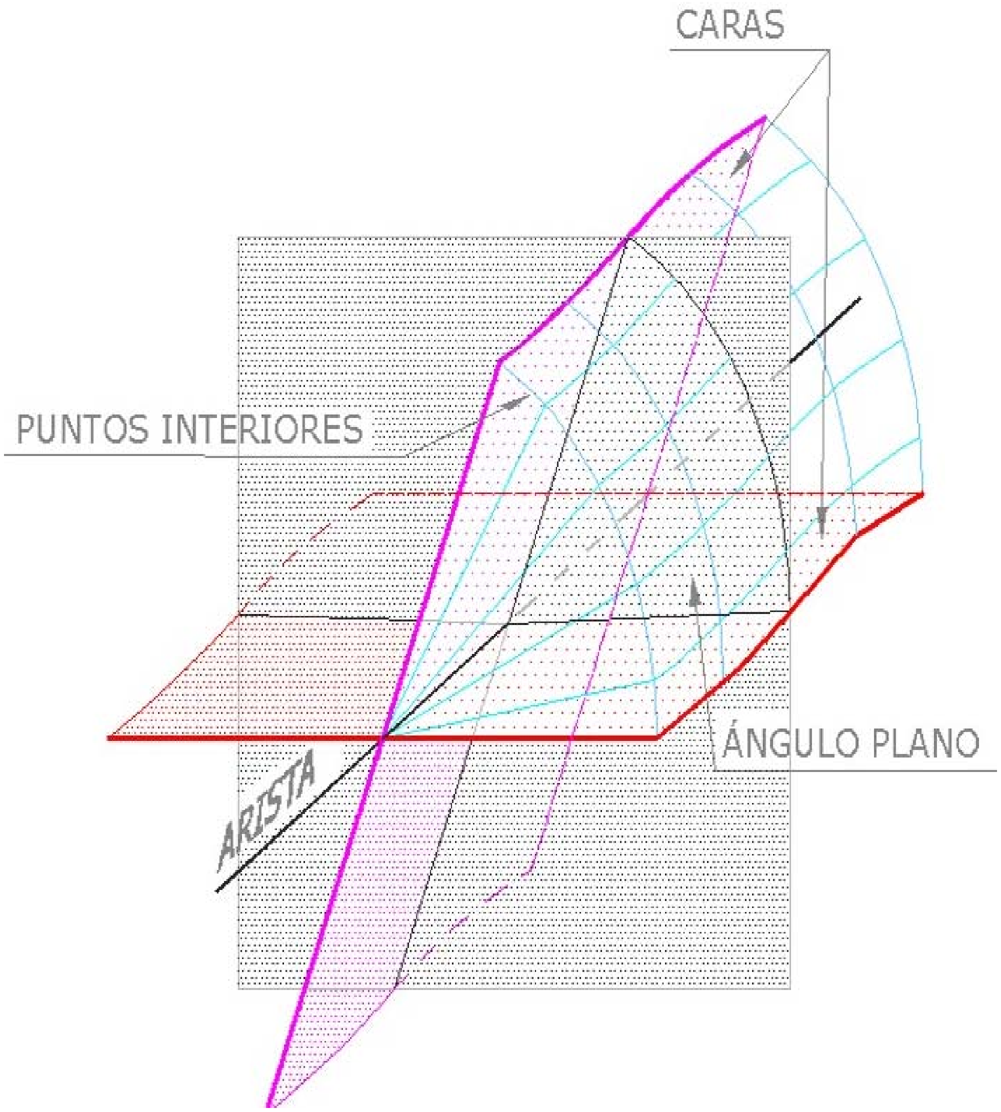
(2-1´; 3-4´). SON SUPLEMENTARIOS



# TRAZADO DE LÍNEAS PERPENDICULARES A OTRA



**ÁNGULO DIEDRO**
**Cada una de las porciones del espacio limitada por dos semiplanos que parten de una misma recta**




ARISTA
Recta común a los semiplanos.

CARAS
Superficies de los semiplanos.

PUNTOS INTERIORES
Todos los puntos de la región del espacio comprendida entre las dos caras del diedro.

PUNTOS EXTERIORES
Todos los puntos que están fuera de la región del espacio comprendida entre las dos caras del diedro.

ÁNGULO PLANO CORRESPONDIENTE
Es el ángulo plano entre dos recta perpendiculares a la arista, contenidas una en cada semiplano.
Por ser sus lados perpendiculares a la arista definen un tercer plano perpendicular a los planos de las caras, por lo que también se llama *SECCIÓN NORMAL.*

AMPLITUD
Medida o dimensión del ángulo diedro.
Se expresa en grados o en radianes.
Es la medida del ángulo definido en la Sección Normal.

## SEGÚN SU POSICIÓN RELATIVA LOS ÁNGULOS DIEDROS PUEDEN SER:

CONSECUTIVOS Son los que tienen la arista común y están situados uno a cada lado de una cara también común (*Hojas de un libro*)

OPUESTOS POR LA ARISTA Cuando la arista es común y las caras de uno son las prolongaciones de las caras del otro. Sus secciones normales son opuestas por el vértice.

## SEGÚN SU FORMA O DIMENSIÓN LOS ÁNGULOS DIEDROS SE DENOMINAN:

CONVEXO cuando los semiplanos, uno respecto del otro, se encuentran en una posición más cerrada que la determinada por un plano perpendicular al otro. El ángulo plano correspondiente es agudo

CONCAVO cuando los semiplanos, uno respecto del otro, se encuentran en una posición más abierta que la determinada por un plano perpendicular al otro. El ángulo plano correspondiente eso

RECTO cuando los semiplanos, uno respecto del otro, se encuentran en una posición igual a la determinada por un plano perpendicular al otro. El ángulo plano correspondiente es recto

*Se define también como la posición de los semiplanos que determina dos diedros consecutivos iguales.*

LLANO cuando cada uno de los semiplanos se confunde con la prolongación del otro. El ángulo plano correspondiente es llano

COMPLEMENTARIOS son dos o más diedros cuya suma de amplitudes es igual a la de un diedro recto

SUPLEMENTARIOS son dos o más diedros cuya suma de amplitudes es igual a la de un diedro llano

ADYACENTES son los dos diedros en que queda dividido uno llano, por un semiplano interior a él. *Los diedros adyacentes siempre son suplementarios*

*En general las mismas operaciones que se realizan con ángulos planos se pueden realizar con ángulos diedros, y en éstos se realizarán con sus ángulos planos correspondientes*

# DOS ÁNGULOS CUYOS LADOS SEAN PARALELOS SON IGUALES O SON SUPLEMENTARIOS

**Hipótesis**

AB || NR

BC || TM

Se determinan en el punto de corte P todos los ángulos posibles, con lados paralelos al $\angle$ABC

**Tesis**

$\angle ABC = \angle NPM = \angle TPR$

$\angle ABC + \angle RPM = \angle ABC + \angle TPN = 180°$

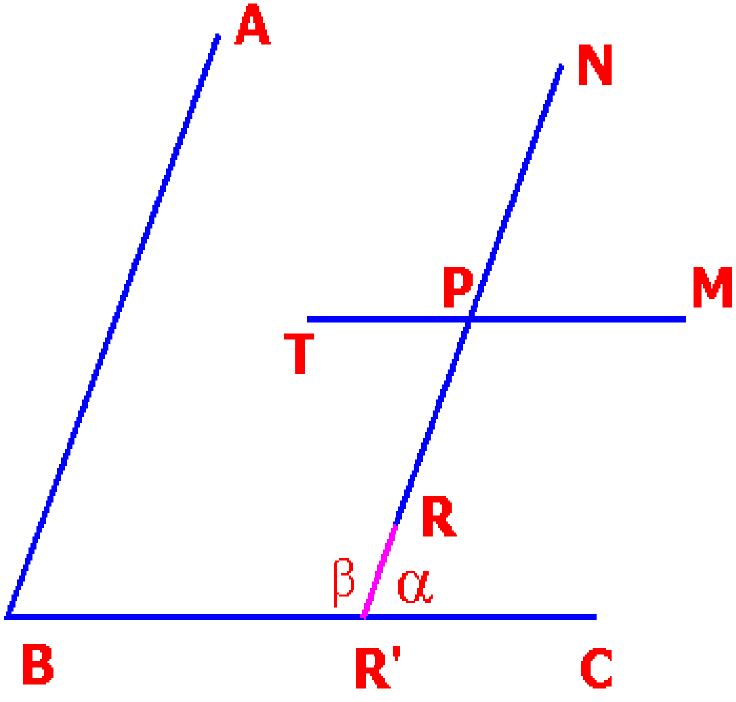
**Demostración**

$\angle NPM = \angle TPR$ (*opuestos por el vértice*)

$\angle RPM = \angle TPN$ (*opuestos por el vértice*)

$\alpha = \angle NPM$ (*correspondientes de las paralelas BC y TM cortadas por la recta NR'*)

$\angle ABC = \alpha$ (*correspondientes de las paralelas AB y NR' cortadas por la recta BC*)



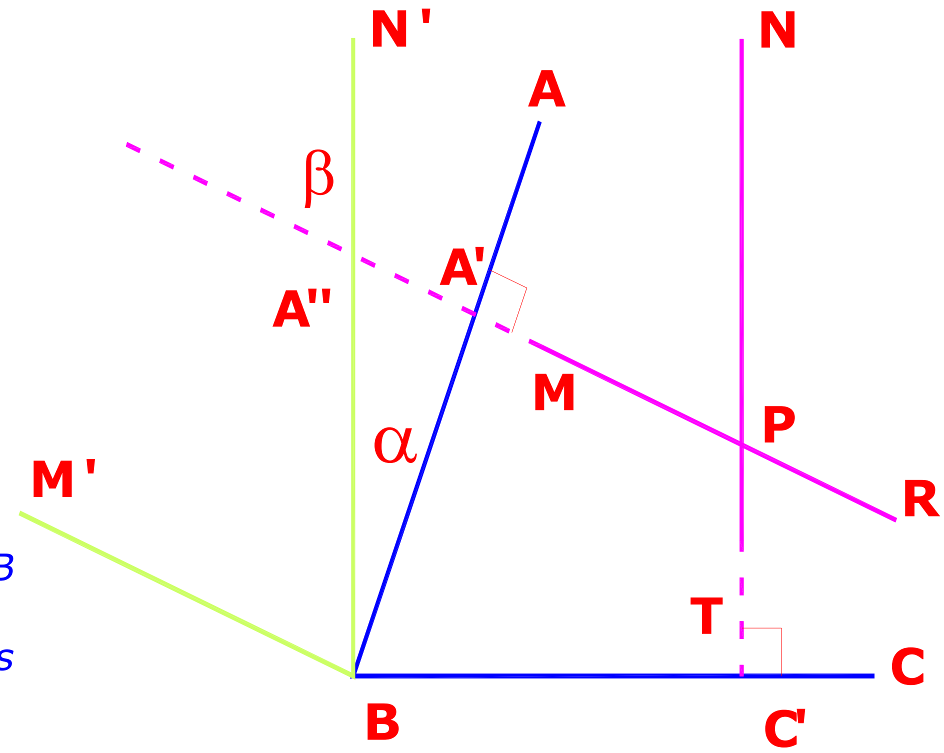

Luego **$\angle ABC = \angle NPM = \angle TPR$**

$\alpha + \angle RPM = 180°$ (*conjugados internos de las paralelas BC y TM cortadas por la recta NR'*)

Luego **$\angle ABC + \angle RPM = \angle ABC + \angle TPN = 180°$**

l.q.q.d.

## DOS ÁNGULOS CUYOS LADOS SEAN PERPENDICULARES SON IGUALES O SON SUPLEMENTARIOS




**<u>Hipótesis</u>**

$RM \perp AB$

$NT \perp BC$

Se determinan en el punto de corte P todos los Ángulos posibles, con lados perpendiculares al $\angle ABC$

**<u>Tesis</u>**

$\angle ABC = \angle MPN = \angle TPR$

$\angle ABC + \angle MPT = \angle ABC + \angle NPR = 180°$

**<u>Demostración</u>**

$\angle NPM = \angle TPR$ (*opuestos por el vértice*)

$\angle MPT = \angle NPR$ (*opuestos por el vértice*)

Sean M'B || MR y N'B || NT

$\beta = \angle NPM$ (*correspondientes de las paralelas N'B y TN cortadas por la recta A''R*)

$\angle M'BN' = \beta$ (*correspondientes de las paralelas M'B y A''R cortadas por la recta N'B*)

Luego $\boldsymbol{\angle M'BN' = \angle NPM = \angle TPR}$ (1)

$M'B \perp BA$ -> $\boldsymbol{\angle M'BN' + \alpha = 90°}$ (2)

$N'B \perp BC$ -> $\boldsymbol{\angle ABC + \alpha = 90°}$ (3)

Igualando (2) y (3) $\angle M'BN' + \alpha = \angle ABC + \alpha \rightarrow \angle M'BN' = \angle ABC$

sustituyendo (1) $\boldsymbol{\angle ABC = \angle NPM = \angle TPR}$

$\angle NPR + \beta = 180°$ (*conjugados de las paralelas N'B y NT cortadas por la recta A''R*

pero $\beta = \angle NPM = \angle ABC$ y $\angle NPR = \angle MPT$

entonces $\boldsymbol{\angle ABC + \angle MPT = \angle ABC + \angle NPR = 180°}$

l.q.q.d