

Las Ecuaciones fundamentales de las subvariedades

René Israel García Lara

25 de febrero de 2005

A Eyra y a mis padres

Agradecimientos

Primero quiero dar gracias a Dios, que me ha dado todo y que a través de los años me ha permitido conquistar meta tras meta hasta llegar a este día.

También quiero agradecer a Eyra, cuya compañía le ha dado a mi vida los matices necesarios para hacerla más amena y completa. Gracias mi amor, espero que todo lo que hemos aprendido juntos en estos años se multiplique con los venideros y que pueda seguir gozando de tu excelente amistad y calidez.

A mi asesor, Matías Navarro, le debo la oportunidad de realizar este trabajo, así como todo el apoyo que amablemente me brindó durante el período de desarrollo de la tesis, siempre motivándome a continuar y a mejorar la redacción. Mi más sincero agradecimiento para él, que no sólo supo ser un maestro sino también un amigo para mí.

Un agradecimiento muy especial a Federico Sánchez Bringas por sus valiosos comentarios en una etapa temprana de desarrollo de este trabajo.

Quiero agradecer al CONACyT por el apoyo económico prestado durante la realización de esta tesis.

Finalmente, quiero agradecer a Marcos por el soporte técnico prestado con las figuras de la tesis y a mis maestros por compartir conmigo sus conocimientos en diferentes áreas de las matemáticas, física y computación, especialmente a Juan Pablo Navarrete con quien tantas veces discutí los ejercicios del libro de Spivak.

Mérida, Yucatán
19 Febrero 2005

Israel García

Índice General

Introducción	iv
1 Las ecuaciones fundamentales	1
1.1 La Segunda Forma Fundamental	1
1.2 Las ecuaciones fundamentales	7
1.3 Curvaturas Principales	9
1.4 Curvatura Seccional	10
1.4.1 Variedades de curvatura constante	11
1.5 El teorema fundamental de las subvariedades	12
2 Superficies en \mathbb{R}^4	25
2.1 Las ν -ecuaciones fundamentales	25
2.2 Las ecuaciones de Gauss y Codazzi	30
3 Puntos Umbílicos	41
3.1 Foliaciones y singularidades	41
3.2 El teorema de Poincaré	48
3.3 La conjetura de Carathéodory	55
3.4 Puntos Umbílicos en \mathbb{R}^4	57
A Construcciones en haces vectoriales	67
A.1 La suma de Whitney	67
A.2 Tensores con valores en un haz vectorial	67
A.3 El haz de direcciones	70

Introducción

Motivación. Si en una superficie compacta en \mathbb{R}^3 existe un campo de líneas con un número finito de singularidades, el teorema de Poincaré-Hopf nos dice que la suma de los índices de estas singularidades resulta ser igual a la característica de Euler de la superficie. Para la esfera la característica de Euler es igual a 2, esto implica que cualquier inmersión isométrica de clase al menos C^r con $r \geq 3$ de una superficie en \mathbb{R}^3 homeomorfa a la esfera con imagen convexa tiene al menos un punto umbílico. La conjetura de Carathéodory afirma que existen al menos dos puntos umbílicos en tal inmersión. En el caso particular de superficies real analíticas con inmersiones isométricas real analíticas, Hamburger probó en 1940 que la conjetura de Carathéodory es válida [Ham40]. A partir de entonces los esfuerzos realizados para demostrar la conjetura fueron realizados en dirección a la conjetura local (conjetura del índice) que establece que cualquier punto umbílico aislado en una superficie isométricamente inmersa en \mathbb{R}^3 debe tener índice de Poincaré-Hopf menor o igual a 1. Ambas conjeturas permanecen abiertas hasta ahora, al menos para el caso C^∞ .

Dada una superficie inmersa en \mathbb{R}^3 , las curvaturas principales definen un par de foliaciones a lo largo del complemento de los puntos umbílicos tales que cada una de estas foliaciones representan la soluciones de la ecuación diferencial cuadrática

$$A(u, v)dv^2 + B(u, v)dudv + C(u, v)du^2 = 0,$$

donde

$$\begin{aligned} A &= fG - gF, \\ B &= eG - gE, \\ C &= eF - fE, \end{aligned}$$

siendo $\{E, F, G\}$, $\{e, f, g\}$ los coeficientes de la primera y segunda forma fundamental respectivamente. Las foliaciones principales de una superficie en \mathbb{R}^3 han sido de interés en geometría diferencial y sistemas dinámicos desde los primeros trabajos de Monge en 1796, de Dupin, Bonnet y Darboux en el siglo XIX hasta Gutiérrez y Sotomayor en el siglo XX ([GS82] y [GS98]).

Metodología. En vista de que las mismas construcciones que en el caso de una inmersión isométrica en \mathbb{R}^3 pueden ser hechas para una inmersión isométrica en \mathbb{R}^4 una vez fijado un campo normal, se utiliza el teorema fundamental de las subvariedades, que da condiciones necesarias y suficientes para que una variedad admita una inmersión isométrica en \mathbb{R}^n para n dado, para buscar condiciones necesarias en el tipo de campos normales a una superficie que admiten una inmersión isométrica en \mathbb{R}^3 . En [GSB98] se demuestra que para cualquier entero n dado, existe una superficie M inmersa en \mathbb{R}^4 y un campo normal ν tales que el índice de la superficie alrededor del punto umbílico generado por el campo ν es $n/2$. De este modo, la conjetura del índice es falsa en \mathbb{R}^4 . Si alguna de estas superficies admitiera una inmersión isométrica en \mathbb{R}^3 , con segunda forma fundamental dada por el campo normal, la conjetura del índice sería falsa. Sin embargo, la prueba del teorema no es constructiva, por lo que es difícil atacar la conjetura de Carathéodory por esa dirección. La dirección que se sigue es por medio de la dinámica de las configuraciones principales. Dada una pareja (I, ν) de una inmersión isométrica $I : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ de la superficie y un campo normal ν , la segunda forma fundamental asociada con el campo define una pareja de foliaciones con singularidades en M dadas por las direcciones principales. A la pareja de foliaciones principales junto con los puntos umbílicos se le conoce como la configuración principal de la superficie. Se sabe que en función del primer jet del campo normal asignado, existen tres clases genéricas de configuraciones principales, llamadas configuraciones Darbouxianas, que son abiertas y densas en el espacio de las configuraciones principales con la topología de Whitney. Para las configuraciones Darbouxianas se sabe que la conjetura del índice es cierta (ver [GS82]). Sin embargo, existe un tipo especial de configuraciones principales del cual se desconoce el valor del índice. Este es el conjunto de campos normales tales que al tomar el primer jet de los campos, los parámetros (m, n) que resultan satisfacen una ecuación lineal dada en [Nav01]. La recta que determinan todos estos puntos se conoce como la recta no simple del espacio de parámetros del campo normal.

Resultado. Después de aplicar el teorema fundamental de las subvariedades para el caso en el que tenemos una superficie en \mathbb{R}^4 , con un punto umbílico aislado determinado por un campo normal ν , obtuvimos que sólo existen dos campos normales posibles, módulo el primer jet de los campos, tales que la superficie admite una inmersión isométrica en \mathbb{R}^3 con segunda forma fundamental determinada por el campo ν y tal que el campo se encuentra sobre la línea no simple en el espacio de parámetros. Además, se obtuvo que si existe una inmersión isométrica de la superficie con segunda forma fundamental determinada por el campo normal, se deben cumplir ciertas relaciones entre el tipo de inmersión y la ν -curvatura Gaussiana de la superficie. Esta clase de resultados es importante porque relaciona propiedades intrínsecas de la superficie, o de la pareja superficie-inmersión en este caso, con propiedades extrínsecas como la ν -curvatura Gaussiana.

Capítulo 1

Las ecuaciones fundamentales

1.1 La Segunda Forma Fundamental

Sea $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+k}$ una inmersión isométrica de una variedad Riemanniana en otra. Denotemos por g a la métrica de M y por \bar{g} a la métrica de \bar{M} . Entonces, si $y = f(x)$, la restricción de f a una vecindad suficientemente pequeña de x da como resultado un encaje de M en \bar{M} . Es de esta manera que al menos localmente podemos identificar a M con una subvariedad de \bar{M} y a f con la inclusión de dicha subvariedad en \bar{M} . A partir de ahora tendremos en cuenta esta identificación y pensaremos en M como una subvariedad de \bar{M} . Así mismo denotaremos por ∇ a la conexión de Levi-Civita de M y por $\bar{\nabla}$ a la de \bar{M} .

Definamos $N_x M$ como el complemento ortogonal de $T_x M$ en $T_x \bar{M}$. Entonces se tiene la descomposición en suma directa de $T_x \bar{M}$ como $T_x M \oplus N_x M$. Denotemos por NM al haz normal de M en \bar{M} definido por

$$NM = \{(x, \nu) \mid x \in M, \nu \in N_x M\}.$$

Teorema 1.1. *NM es una variedad de la misma dimensión que \bar{M} .*

DEMOSTRACION. Sea la topología de NM la topología de subespacio en $T\bar{M}$. Como $T\bar{M}$ es una variedad diferenciable, en particular es un espacio Hausdorff con base numerable, por lo tanto NM también es Hausdorff con base numerable. Para mostrar que NM es una variedad diferenciable basta hallar un sistema de cartas coordenadas tal que los cambios de coordenadas sean diferenciables.

Sea $p \in M$ y sea $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ un difeomorfismo de una vecindad U de p en \bar{M} sobre \mathbb{R}^{n+k} tal que $\phi^{-1}(\mathbb{R}^n \times 0) = U \cap M$. La existencia de una de estas cartas está garantizada por el teorema de la función implícita. Entonces, por construcción, los vectores $\partial_1, \dots, \partial_n$ son tangentes a M en $U \cap M$. Sean v_1, \dots, v_{n+k} los campos vectoriales sobre M que se obtienen aplicando el proceso de Gram-Schmidt a $\partial_1, \dots, \partial_{n+k}$. Entonces v_1, \dots, v_n son vectores tangentes a M ya que debido al proceso de Gram-Schmidt son generados a partir de $\partial_1, \dots, \partial_n$, de donde para cada $x \in U \cap M$, $\{v_{n+1}(x), \dots, v_{n+k}(x)\}$ son una base para $N_x M$. Sean $V = \{(x, \nu) \in NM \mid x \in U\}$ y $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ definida como

$$\psi(x, \sum \lambda^i v_{n+i}) = (\phi(x), \lambda^1, \dots, \lambda^k).$$

Tenemos que $V = \pi^{-1}(U) \cap NM$, donde $\pi : T\bar{M} \rightarrow \bar{M}$ es la proyección usual que sabemos es continua, por lo que V resulta abierto. Finalmente, supongamos que $\psi' :$

$W \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ es otro sistema de coordenadas construido a partir de $\phi' : U' \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ tal que $V \cap W \neq \emptyset$, entonces

$$\psi \circ (\psi')^{-1}(y, \lambda^1, \dots, \lambda^k) = (\phi \circ (\phi')^{-1}(y), c_{1i}(y)\lambda^i, \dots, c_{ki}(y)\lambda^i).$$

En la última ecuación hemos usado la convención de Einstein: si en una expresión aparece un índice repetido, una vez como superíndice y otra como subíndice, entonces se sobreentiende que se trata de una suma sobre todos los valores que el índice puede tomar. Para cada y , $[c_{ij}(y)]$ es una matriz ortogonal. Además, las funciones c_{ij} son diferenciables, pues $c_{ij}(y) = \langle v_{n+i}, w_{n+j} \rangle$, donde w_1, \dots, w_{n+k} es la base ortonormal que se obtiene al aplicar el proceso de Gram-Schmidt a la base asociada a la parametrización ϕ' . \square

Nota 1.1: Los campos $\{v_i\}$ y $\{w_i\}$ son campos vectoriales diferenciables, pues v_i se obtiene dividiendo al vector $\partial_i - \sum_{j=1}^{i-1} \langle \partial_i, v_j \rangle v_j$ entre su norma, de donde inductivamente obtenemos el resultado. Es por esto que las funciones c_{ij} resultan ser diferenciables.

Sea $\pi : NM \rightarrow M$ la proyección natural. Tenemos el siguiente teorema.

Teorema 1.2. *(NM, M, π) es un haz vectorial de rango k , con fibra $N_x M$.*

DEMOSTRACION. Evidentemente $\pi^{-1}(x) = N_x M$ tiene estructura de espacio vectorial de dimensión k . Además π es una submersión, pues si $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ es una carta para NM que se construye a partir de ϕ , entonces localmente podemos escribir π como $h = \phi \circ \pi \circ \psi^{-1} : \mathbb{R}^{n+k} \rightarrow \mathbb{R}^n$, donde $h(y, \lambda^1, \dots, \lambda^k) = y$, por lo que deducimos que π es derivable y su derivada es suprayectiva, i.e. π es una submersión.

Además, nótese que dado $p \in M$ y siendo $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$ una carta construida a partir de $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^{n+k}$, como en el teorema anterior, podemos construir trivialmente el difeomorfismo $h : V \rightarrow (U \cap M) \times \mathbb{R}^k$ dado por

$h(x, \sum \lambda^i v_{n+i}) = (x, \lambda^1, \dots, \lambda^k)$. Más aún, como en el teorema anterior, si $V \cap V' \neq \emptyset$ y $h' : V' \rightarrow (U' \cap M) \times \mathbb{R}^k$ es el correspondiente difeomorfismo, entonces de manera similar se ve que

$$h \circ (h')^{-1}(x, \lambda^1, \dots, \lambda^k) = (x, c_{1i}(x)\lambda^i, \dots, c_{ki}(x)\lambda^i),$$

donde $c_{ij}(x) = \langle v_{n+i}(x), w_{n+j}(x) \rangle$, los v_i son los campos vectoriales normales asociados a ϕ y los w_i son los asociados a ϕ' . Por lo tanto las funciones c_{ij} son diferenciables y la matriz asociada $[c_{ij}]$ es ortogonal. Finalmente nótese que si definimos $G(x)$ como el operador lineal en \mathbb{R}^k cuya matriz en la base usual es $[c_{ij}(x)]$ entonces podemos escribir

$$h \circ (h')^{-1}(x, (\lambda^1, \dots, \lambda^k)) = (x, G(x)[(\lambda^1, \dots, \lambda^k)]).$$

Por lo tanto NM es un haz vectorial de rango k . \square

De esta manera justificamos el adjetivo “haz” en el nombre de NM .

Sean $X, Y \in TM$. Dado $p \in M$, podemos extender X y Y localmente en una vecindad U de p en \bar{M} hacia campos \bar{X}, \bar{Y} tangentes en \bar{M} . Sea la segunda forma fundamental de M la función $\alpha : TM \times TM \rightarrow NM$ definida por

$$\alpha(X, Y)|_p = (\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y})^\perp |_p.$$

Lema 1.1. *La segunda forma fundamental satisface:*

- a) *Es independiente de las extensiones de X e Y .*
- b) *Es bilineal sobre $C^\infty(M)$.*
- c) *Es simétrica en X e Y .*

DEMOSTRACION

- a) Dados dos campos vectoriales \bar{X}, \bar{Y} en una variedad Riemanniana, el vector $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} \big|_p$ sólo depende del valor de \bar{X} en el punto p y del valor de \bar{Y} a lo largo de una curva $c: (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \bar{M}$ tal que $\dot{c}(0) = \bar{Y} \big|_p$. Pero \bar{Y} extiende un campo vectorial tangente a M , por lo que podemos tomar la curva $c(t)$ de tal forma que $c(t) \in M$ para cada t , y para cualquier campo Y que extienda \bar{Y} tenemos que $\bar{Y} \big|_{c(t)} = Y \big|_{c(t)}$ si t es suficientemente pequeño. Por lo tanto $\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} \big|_p$ es independiente de la extensión. En particular, $\alpha(X, Y)$ está bien definida.
- b) Nótese que localmente, i.e. siempre que podamos encontrar las extensiones \bar{X}, \bar{Y} , podemos escribir $\alpha(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y$ y como $\alpha(X, Y)$ es la diferencia de dos conexiones, es un cálculo directo ver que $\alpha(X, Y)$ es $C^\infty(M)$ -bilineal.
- c) Localmente, $\alpha(X, Y) = \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \nabla_X Y$, por lo que

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y) - \alpha(Y, X) &= \bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X} - (\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ &= [\bar{X}, \bar{Y}] - [X, Y] \\ &= 0. \end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que el valor del conmutador de \bar{X} y \bar{Y} en M sólo depende del valor de estos campos sobre la variedad. \square

Teorema 1.3. La fórmula de Gauss. *Si $X, Y \in TM$ son extendidos arbitrariamente a campos vectoriales en \bar{M} , la siguiente fórmula es válida a lo largo de M :*

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y).$$

DEMOSTRACION. Se tiene la igualdad $\bar{\nabla}_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^\top + \alpha(X, Y)$. Definamos $H: TM \times TM \rightarrow TM$ como

$$H(X, Y) = (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^\top,$$

donde \bar{X}, \bar{Y} son extensiones arbitrarias locales de los respectivos campos.

$H(X, Y)$ está bien definido, la prueba es la misma que se dió en el inciso (a) del Lema 1.1.

Parte A. H es una conexión.

Sea $f \in C^\infty(M)$ y sea \bar{f} una extensión local de f , entonces es inmediato que $\bar{f}\bar{X}$ es una extensión local de fX , por lo que

$$\begin{aligned} H(fX, Y) &= (\bar{\nabla}_{\bar{f}\bar{X}}\bar{Y})^\top \\ &= (\bar{f}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^\top \\ &= f(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^\top. \end{aligned}$$

Similarmente, $\bar{f}\bar{Y}$ es una extensión de fY por lo que

$$\begin{aligned} H(X, fY) &= (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{f}\bar{Y})^\top \\ &= \bar{f}(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y})^\top + d\bar{f}(\bar{X})(\bar{Y})^\top \\ &= fH(X, Y) + df(X)Y. \end{aligned}$$

El último sumando de la igualdad se obtiene al observar que la restricción de $d\bar{f}$ a TM es df .

Parte B. H es la conexión de Levi-Civita de M .

Veamos primero que H es simétrica.

$$\begin{aligned} H(X, Y) - H(Y, X) &= (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{Y} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}}\bar{X})^\top \\ &= [\bar{X}, \bar{Y}]^\top \\ &= [X, Y], \end{aligned}$$

pues como \bar{X}, \bar{Y} son tangentes a M , $[\bar{X}, \bar{Y}]$ también es tangente a M y su valor sólo depende del valor de \bar{X} y de \bar{Y} en M .

Veamos ahora que H es compatible con la métrica. Sean $X, Y, Z \in TM$ y $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ sus respectivas extensiones. Entonces como $\bar{g}(\bar{X}, \bar{Y})$ extiende $g(X, Y)$, tenemos que $\bar{Z}(\bar{g}(\bar{X}, \bar{Y})) = Z(g(X, Y))$ en M . Como $\bar{\nabla}$ es compatible con \bar{g} ,

$$\bar{Z}(\bar{g}(\bar{X}, \bar{Y})) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{Z}}\bar{X}, \bar{Y}) + \bar{g}(\bar{X}, \bar{\nabla}_{\bar{Z}}\bar{Y}).$$

En particular, en M se tiene que

$$\begin{aligned} Z(g(X, Y)) &= \bar{Z}(\bar{g}(\bar{X}, \bar{Y})) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{Z}}\bar{X}, \bar{Y}) + \bar{g}(\bar{X}, \bar{\nabla}_{\bar{Z}}\bar{Y}) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{Z}}\bar{X}, Y) + \bar{g}(X, \bar{\nabla}_{\bar{Z}}\bar{Y}) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{Z}}\bar{X}^\top, Y) + \bar{g}(X, \bar{\nabla}_{\bar{Z}}\bar{Y}^\top) \\ &= g(H(Z, X), Y) + g(X, H(Z, Y)). \end{aligned}$$

Por lo tanto H es la conexión de Levi-Civita de M , i.e. $H = \nabla$. Finalmente, de la igualdad $\bar{\nabla}_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^\top + \alpha(X, Y)$ se obtiene el resultado. \square

En caso de que tengamos un campo vectorial a lo largo de una curva en M tenemos el siguiente corolario.

Corolario 1.1. La fórmula de Gauss a lo largo de una curva. Si $\gamma : I \rightarrow M$ es una curva en M y X es un campo vectorial tangente a M a lo largo de γ , entonces

$$\frac{\bar{D}}{dt}X = \frac{D}{dt}X + \alpha(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}).$$

DEMOSTRACION. Sea $p = \gamma(t_0)$. Podemos construir en una vecindad de p un conjunto $\{E_1, \dots, E_n\}$ de campos vectoriales ortonormales. En términos de estos campos podemos escribir V como $V(t) = V^i(t)E_i$. Aplicando las propiedades de la derivada covariante y la fórmula de Gauss tenemos

$$\begin{aligned} \frac{\bar{D}}{dt}V &= \dot{V}^i E_i + V^i \bar{\nabla}_{\dot{\gamma}} E_i \\ &= \dot{V}^i E_i + V^i \nabla_{\dot{\gamma}} E_i + V^i \alpha(\dot{\gamma}, E_i) \\ &= \frac{D}{dt}V + \alpha(\dot{\gamma}, V). \end{aligned}$$

□

Lema 1.2. La ecuación de Weingarten. Supongamos que $X, Y \in TM$ y $N \in NM$. Cuando X, Y, N son extendidos arbitrariamente a \bar{M} , la siguiente ecuación es válida en puntos de M :

$$\langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle = -\langle N, \alpha(X, Y) \rangle.$$

DEMOSTRACION. Como N es normal a M , $\langle N, Y \rangle \equiv 0$ en M . Usando que $\bar{\nabla}$ es compatible con la métrica de \bar{M} , tenemos que

$$\bar{X} \langle \bar{N}, \bar{Y} \rangle = \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{N}, \bar{Y} \rangle + \langle \bar{N}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} \rangle.$$

En particular, sobre M se cumple que

$$\begin{aligned} \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{N}, \bar{Y} \rangle + \langle \bar{N}, \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} \rangle &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{N}, Y \rangle + \langle N, \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Y} \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, \alpha(X, Y) \rangle. \end{aligned}$$

Finalmente, como $\langle \bar{N}, \bar{Y} \rangle$ es constante a lo largo de M , tenemos que

$$\langle \bar{\nabla}_X N, Y \rangle + \langle N, \alpha(X, Y) \rangle = 0. \quad \square$$

Existe otra relación entre la derivada covariante de un vector normal y la segunda forma fundamental que describiremos a continuación. Dado un campo vectorial ξ normal a M , en analogía a lo que hicimos para definir la segunda forma fundamental, podemos descomponer $\bar{\nabla}_X \xi$ en sus partes tangencial y normal.

Definición 1.1. Sean $\xi \in NM$ y $X \in TM$. Extendamos arbitrariamente los vectores dados hacia vectores tangentes $\bar{\xi}, \bar{X} \in T\bar{M}$. Denotemos por $S_\xi X$ el valor en (X, ξ) de la función $S : TM \times NM \rightarrow TM$ definida como

$$S_\xi X = -(\bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\xi})^\top.$$

S es llamado el operador de forma. Para cada ξ fijo, S_ξ es el ξ -operador de forma.

Proposición 1.1. Sean $\xi \in NM$ y $X \in TM$, entonces el operador de forma satisface las siguientes propiedades:

- a) $S_\xi X$ es independiente de las extensiones de los campos ξ y X .
- b) Para cada $\xi \in NM$ fijo, $S_\xi : TM \rightarrow TM$ es $C^\infty(M)$ -lineal.
- c) Si $f \in C^\infty(M)$ y ν es otro campo normal a M , entonces

$$S_{f\xi}X = fS_\xi X \quad y \quad S_{\xi+\nu}(X) = S_\xi(X) + S_\nu(X).$$

DEMOSTRACION

- a) La prueba es análoga a la del inciso (a) del lema 1.1.
- b) Sean $f \in C^\infty(M)$, $\xi \in NM$ y $X \in TM$. Para cada $p \in M$, sean \bar{f} , $\bar{\xi}$ y \bar{X} extensiones locales de f , ξ y X respectivamente, en una vecindad U de p en \bar{M} . Entonces

$$\begin{aligned} S_\xi(fX)|_p &= -(\bar{\nabla}_{\bar{f}\bar{X}}\bar{\xi})^\top|_p \\ &= -(\bar{f}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\xi})^\top|_p \\ &= -\bar{f}(p) \cdot (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\xi})^\top|_p \\ &= f(p)(S_\xi X|_p). \end{aligned}$$

La última igualdad se tiene porque \bar{f} extiende a f . Por lo tanto $S_\xi(fX) = fS_\xi X$.

De manera similar se demuestra que $S_\xi(X+Y) = S_\xi(X) + S_\xi(Y)$ para todos los $X, Y \in TM$.

- c) Como en el inciso anterior, sean \bar{f} , $\bar{\xi}$ y \bar{X} extensiones locales de f , ξ y X en \bar{M} . Entonces

$$\begin{aligned} S_{f\xi}X &= -(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{f}\bar{\xi})^\top \\ &= -(\bar{X}(\bar{f}) \cdot \bar{\xi} + \bar{f}\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\xi})^\top \\ &= -\bar{f}|_M(\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\xi})^\top \\ &= fS_\xi X. \end{aligned}$$

La última igualdad se cumple porque \bar{f} extiende a f . De manera similar se demuestra que $S_{\xi+\nu}(X) = S_\xi(X) + S_\nu(X)$ para todos los $\xi, \nu \in NM$ y $X \in TM$. \square

Sean $\xi \in NM$ y $X \in TM$. Así como utilizamos la parte tangente de $\bar{\nabla}_X \xi$ para definir el operador de forma, también podemos considerar la parte normal: para cada $p \in M$, dadas las extensiones arbitrarias $\bar{\xi}$ y \bar{X} de ξ y X respectivamente, en una vecindad U de p en \bar{M} , definimos $\nabla_X^\perp \xi$ como el campo normal a M tal que

$$\nabla_X^\perp \xi|_p = (\bar{\nabla}_{\bar{X}}\bar{\xi})^\perp|_p.$$

La definición de $\nabla_X^\perp \xi$ es independiente de las extensiones de los vectores X y ξ , la prueba es similar a la de la proposición anterior. Como $\bar{\nabla}_X \xi = -S_\xi X + \nabla_X^\perp \xi$, y la diferencia de una conexión y un operador $C^\infty(M)$ -bilineal es una conexión, resulta que ∇^\perp es una conexión en NM . Llamaremos a esta conexión la *conexión normal*.

1.2 Las ecuaciones fundamentales

Dada una inmersión isométrica $f : M \rightarrow \bar{M}$ de una variedad Riemanniana en otra, la segunda forma fundamental y la conexión normal describen la manera en que f realiza la inmersión por medio de las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci, que demostraremos en esta sección.

Teorema 1.4. La ecuación de Gauss. Sean Rm y $\bar{R}m$ los tensores de curvatura de M y \bar{M} respectivamente. Para cualesquiera $X, Y, Z, W \in T_p M$, se cumple:

$$\bar{R}m(X, Y, Z, W) = Rm(X, Y, Z, W) - \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle + \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle.$$

DEMOSTRACION. Sean X_p, Y_p, Z_p y W_p vectores tangentes a M en p . Denotemos por X, Y, Z, W extensiones arbitrarias de los vectores dados en M . Extendamos cada uno de estos campos vectoriales a campos vectoriales $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}, \bar{W}$ en una vecindad de p en \bar{M} . Aplicando varias veces la fórmula de Gauss tenemos

$$\begin{aligned} \bar{R}m(X_p, Y_p, Z_p, W_p) &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{Z} - \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \bar{\nabla}_{\bar{X}} \bar{Z} - \bar{\nabla}_{[\bar{X}, \bar{Y}]} \bar{Z}, \bar{W} \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} (\nabla_Y Z + \alpha(Y, Z)) - \bar{\nabla}_{\bar{Y}} (\nabla_X Z + \alpha(X, Z)) \\ &\quad - (\nabla_{[X, Y]} Z + \alpha([X, Y], Z)), W \rangle. \end{aligned}$$

Nótese que $\alpha([X, Y], Z)$ es normal a TM por lo que el último término de la suma anterior es nulo. Si aplicamos la ecuación de Weingarten a los términos restantes que contienen la segunda forma fundamental, con $\alpha(Y, Z)$ o $\alpha(X, Z)$ en el papel de N , obtenemos:

$$\begin{aligned} \bar{R}m(X, Y, Z, W) &= \langle \bar{\nabla}_{\bar{X}} \nabla_Y Z, W \rangle - \langle \alpha(Y, Z), \alpha(X, W) \rangle \\ &\quad - \langle \bar{\nabla}_{\bar{Y}} \nabla_X Z, W \rangle + \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle \\ &\quad - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle. \end{aligned}$$

Si descomponemos cada término que contiene $\bar{\nabla}$ utilizando la ecuación de Gauss vemos que la única parte restante es la correspondiente a la conexión de M , pues α es ortogonal a W . Entonces

$$\begin{aligned} \bar{R}m(X, Y, Z, W) &= \langle \nabla_X \nabla_Y Z, W \rangle - \langle \nabla_Y \nabla_X Z, W \rangle - \langle \nabla_{[X, Y]} Z, W \rangle \\ &\quad - \langle \alpha(Y, Z), \alpha(X, W) \rangle + \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle \\ &= Rm(X, Y, Z, W) \\ &\quad - \langle \alpha(Y, Z), \alpha(X, W) \rangle + \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle. \end{aligned}$$

□

Denotemos por R al tensor asociado con Rm , es decir que para cada $X, Y, Z \in TM$, $R(X, Y)Z$ es el único campo vectorial tangente a M tal que $Rm(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle$ para todo $W \in TM$. De la misma manera denotaremos como \bar{R} al tensor asociado con $\bar{R}m$.

Teorema 1.5. Ecuación de Codazzi. *Para cualesquiera $X, Y, Z \in TM$ se cumple:*

$$(\bar{R}(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z),$$

donde por definición

$$(\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) = \nabla_X^\perp(\alpha(Y, Z)) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z).$$

DEMOSTRACION. Utilizando la ecuación de Gauss varias veces obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z &= \nabla_X \nabla_Y Z + \alpha(X, \nabla_Y Z) + \bar{\nabla}_X(\alpha(Y, Z)), \\ \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z &= \nabla_Y \nabla_X Z + \alpha(Y, \nabla_X Z) + \bar{\nabla}_Y(\alpha(X, Z)), \\ \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z &= \nabla_{[X, Y]} Z + \alpha([X, Y], Z). \end{aligned}$$

Restando de la primera ecuación las dos últimas obtenemos que

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + \alpha(X, \nabla_Y Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z) - \alpha([X, Y], Z) \\ &\quad + \bar{\nabla}_X(\alpha(Y, Z)) - \bar{\nabla}_Y(\alpha(X, Z)). \end{aligned}$$

Además, como ∇ es compatible con la métrica, $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$, y como α es bilineal, el término $\alpha([X, Y], Z)$ se divide en dos. Reagrupando la ecuación anterior tenemos que

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + \bar{\nabla}_X(\alpha(Y, Z)) - \alpha(Y, \nabla_X Z) - \alpha(\nabla_X Y, Z) \\ &\quad - \bar{\nabla}_Y(\alpha(X, Z)) + \alpha(\nabla_Y X, Z) + \alpha(X, \nabla_Y Z). \end{aligned}$$

Si dividimos $\bar{\nabla}_X(\alpha(Y, Z))$ y $\bar{\nabla}_Y(\alpha(X, Z))$ en sus componentes tangencial y normal, de la ecuación anterior resulta que

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + (\bar{\nabla}_X^\perp \alpha)(Y, Z) - (\bar{\nabla}_Y^\perp \alpha)(X, Z) \\ &\quad + [\bar{\nabla}_X(\alpha(Y, Z))]^\top - [\bar{\nabla}_Y(\alpha(X, Z))]^\top. \end{aligned}$$

Finalmente, tomando las componentes normales de los vectores a ambos lados de la última igualdad obtenemos la ecuación de Codazzi. \square

Teorema 1.6. Ecuación de Ricci. *Sean $X, Y \in TM$ y $\xi \in NM$. Entonces se cumple que*

$$(\bar{R}(X, Y)\xi)^\perp = R^\perp(X, Y)\xi + \alpha(S_\xi X, Y) - \alpha(X, S_\xi Y),$$

donde $R^\perp(X, Y)\xi = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi$.

DEMOSTRACION. Utilizando la definición del operador de forma tenemos que

$$\bar{\nabla}_Y \xi = -S_\xi Y + \nabla_Y^\perp \xi,$$

y utilizando la fórmula de Gauss en la ecuación anterior obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y \xi &= -\nabla_X S_\xi Y - \alpha(X, S_\xi Y) - S_{\nabla_Y^\perp \xi} X + \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi, \\ \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X \xi &= -\nabla_Y S_\xi X - \alpha(Y, S_\xi X) - S_{\nabla_X^\perp \xi} Y + \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi, \\ \bar{\nabla}_{[X,Y]} \xi &= -S_\xi[X, Y] + \nabla_{[X,Y]}^\perp \xi. \end{aligned}$$

Si restamos las dos últimas ecuaciones de la primera obtenemos que

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)\xi &= -\nabla_X S_\xi Y + \nabla_Y S_\xi X + S_\xi[X, Y] - \alpha(X, S_\xi Y) + \alpha(Y, S_\xi X) \\ &\quad - S_{\nabla_Y^\perp \xi} X + S_{\nabla_X^\perp \xi} Y + R^\perp(X, Y)\xi. \end{aligned}$$

La ecuación de Ricci se obtiene tomando la componente normal en la ecuación anterior. \square

1.3 Curvaturas Principales

Sea $\nu \in NM$ un campo vectorial unitario. Definimos la ν -segunda forma fundamental como $h_\nu(X, Y) = \langle \nu, \alpha(X, Y) \rangle$. Para cada $p \in M$ fijo, h_ν es una función bilineal simétrica con valores en \mathbb{R} .

Proposición 1.2. *Sea $\nu \in NM$ un campo vectorial unitario. Entonces S_ν es el único operador $C^\infty(M)$ -lineal tal que, para cada $X, Y \in TM$,*

$$h_\nu(X, Y) = \langle S_\nu(X), Y \rangle. \quad (1.1)$$

En particular, $S_\nu|_{T_p M}$ es un operador lineal autoadjunto para cada $p \in M$.

DEMOSTRACION. Sean $X, Y \in TM$. Por la ecuación de Weingarten, $\langle \nu, \alpha(X, Y) \rangle = -\langle \bar{\nabla}_X \nu, Y \rangle$. Pero $\bar{\nabla}_X \nu = -S_\nu(X) + \nabla_X^\perp \nu$, y como $\nabla_X^\perp \nu$ es ortogonal a Y , $\langle \nu, \alpha(X, Y) \rangle = \langle S_\nu(X), Y \rangle$. Por lo tanto

$$h_\nu(X, Y) = \langle S_\nu(X), Y \rangle.$$

Veamos ahora la unicidad.

Sean $p \in M$ y $G : TM \rightarrow TM$ otro operador $C^\infty(M)$ -lineal tal que satisface la ecuación (1.1). Como S_ν y G son $C^\infty(M)$ -lineales, sus restricciones a $T_p M$ son operadores lineales. Sea $v \in T_p M$, como ambos operadores satisfacen (1.1), para cada $w \in T_p M$ tenemos que

$$\langle G(v), w \rangle = \langle S_\nu(v), w \rangle,$$

por lo que $G(v) = S_\nu(v)$. Como p y v fueron arbitrarios, los operadores deben ser iguales. La última afirmación se debe a que $h_\nu|_{T_p M}$ es un operador bilineal simétrico. \square

Por la proposición anterior S_ν es diagonalizable, es decir, existen únicos $k_1, \dots, k_n \in \mathbb{R}$ y una base $v_1, \dots, v_n \in T_p M$ tales que $S_\nu v_i = k_i v_i$.

Definición 1.2. *Los números k_1, \dots, k_n son las ν -curvaturas principales de M en p y los correspondientes vectores son llamados las ν -direcciones principales.*

Utilizando el ν -operador de forma generalizamos los conceptos clásicos de curvatura Gaussiana y media de la siguiente manera.

Definición 1.3. *Definimos la ν -curvatura Gaussiana como el determinante de S_ν , y la ν -curvatura media como $\frac{1}{n}$ veces la traza de S_ν .*

Ambas curvaturas están bien definidas pues tanto el determinante como la traza tienen definiciones intrínsecas. Más aún, escogiendo como base de $T_p M$ a las ν -direcciones principales, vemos que la ν -curvatura Gaussiana es $k_1 \cdots k_n$ y la ν -curvatura media es $\frac{1}{n}(k_1 + \cdots + k_n)$.

1.4 Curvatura Seccional

El propósito de esta sección es dar una interpretación geométrica cuantitativa del tensor de curvatura en cualquier dimensión. Sea $p \in M$. Si Π es cualquier subespacio bidimensional de $T_p M$ y $V \subset T_p M$ es una vecindad de $0 \in T_p M$ en la que \exp_p es un difeomorfismo, entonces $S_\Pi := \exp_p(\Pi \cap V)$ es una subvariedad de M de dimensión dos que contiene a p llamada la *sección plana* determinada por Π . Definimos la *curvatura seccional* $K(\Pi)$ de M asociada con Π , como la curvatura Gaussiana de S_Π en p con la métrica inducida.

Proposición 1.3. *Si $\{X, Y\}$ es una base arbitraria para un subespacio $\Pi \subset T_p M$, entonces*

$$K(\Pi) = \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}.$$

DEMOSTRACION. Para fines de esta prueba nos olvidaremos por un momento del espacio ambiente y su métrica Riemanniana. Denotemos la métrica inducida en S_Π por \bar{g} . Además usaremos barras para denotar las cantidades relacionadas con \bar{g} . Sea $V \in \Pi \subset T_p M$ y sea γ_V la geodésica en M que pasa por p con velocidad inicial V . Entonces $\gamma_V(t) = \exp_p(tV)$ en una vecindad de 0, por lo que $\gamma_V(t) \in S_\Pi$ para toda t suficientemente pequeña. Aplicando la fórmula de Gauss, tenemos que

$$0 = \frac{\bar{D}}{dt} \dot{\gamma} + \alpha(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}).$$

Como los dos miembros de la suma son ortogonales, tenemos $\alpha(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$, en particular cuando $t = 0$, $\alpha(V, V) = 0$. Como V es arbitrario se sigue que $\alpha(V+W, V+W) = 0$ para todo V, W en Π . Utilizando la simetría de α tenemos $\alpha(V+W, V+W) = \alpha(V, V) +$

$2\alpha(V, W) + \alpha(W, W) = 2\alpha(V, W)$, por lo que $\alpha(V, W) = 0$ para todo $V, W \in \Pi$. Por lo tanto utilizando la ecuación de Gauss,

$$\bar{R}m(X, Y, Z, W) = Rm(X, Y, Z, W)$$

para cualesquiera $X, Y, Z, W \in T_p S_\Pi = \Pi$. En particular, la curvatura Gaussiana de S_Π en p es

$$K(\Pi) = \frac{\bar{R}m(X, Y, Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} = \frac{Rm(X, Y, Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}. \quad \square$$

Si $X, Y \in T_p M$ son dos vectores linealmente independientes, definimos $K(X, Y)$ como la curvatura seccional del subespacio de $T_p M$ generado por $\{X, Y\}$.

1.4.1 Variedades de curvatura constante

Definición 1.4. *Sea M una variedad Riemanniana. Decimos que M es de curvatura constante si para cualquier punto $p \in M$ y cualesquiera vectores linealmente independientes $X, Y \in T_p M$, la curvatura seccional $K(X, Y)$ tiene el mismo valor.*

Resulta que cuando una variedad tiene curvatura constante su tensor de curvatura adquiere una forma particularmente simple.

Teorema 1.7. *Sea M una variedad con curvatura constante c , entonces el tensor de curvatura de M está dado por*

$$R(X, Y)Z = c\langle Y, Z \rangle X - c\langle X, Z \rangle Y.$$

DEMOSTRACION. Sean $X, Y, Z, W \in TM$. Definamos

$$\tau(X, Y, Z, W) = c(\langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle).$$

Entonces τ es C^∞ lineal en M . Un cálculo directo muestra que τ satisface las siguientes identidades:

- (i) $\tau(X, Y, Z, W) = -\tau(Y, X, Z, W) = -\tau(X, Y, W, Z)$.
- (ii) $\tau(X, Y, Z, W) = \tau(Z, W, X, Y)$.
- (iii) $\tau(X, Y, Z, W) + \tau(Y, Z, X, W) + \tau(Z, X, Y, W) = 0$ (identidad algebraica de Bianchi).

Sean $X, Y \in T_p M$ vectores linealmente independientes. Entonces, por construcción

$$\tau(X, Y, Y, X) = c(|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2),$$

por lo que,

$$\frac{\tau(X, Y, Y, X)}{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2} = K(X, Y). \quad (1.2)$$

Por lo tanto, como τ satisface las simetrías del tensor de curvatura, las identidades (i) – (iii), y tiene la misma curvatura seccional que el tensor de curvatura, ecuación (1.2), debe ser igual a Rm . Finalmente, por definición del tensor de curvatura,

$$Rm(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle.$$

Además, por construcción,

$$\tau(X, Y, Z, W) = \langle c\langle Y, Z \rangle X - c\langle X, Z \rangle Y, W \rangle.$$

Sean $X, Y, Z \in TM$ vectores fijos, entonces para todo vector tangente W se cumple la ecuación

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle c\langle Y, Z \rangle X - c\langle X, Z \rangle Y, W \rangle.$$

Por lo tanto $R(X, Y)Z = c\langle Y, Z \rangle X - c\langle X, Z \rangle Y \forall X, Y, Z \in TM$. \square

Supongamos que $f : M \rightarrow \bar{M}$ es una inmersión isométrica de una variedad Riemanniana en otra, y que \bar{M} tiene curvatura constante. Por el teorema anterior, si $X, Y, Z \in TM$ y $\xi \in NM$, entonces $\bar{R}(X, Y)Z \in TM$ y $\bar{R}(X, Y)\xi$ es igual a cero. De este modo las ecuaciones fundamentales de Gauss, Codazzi y Ricci pueden escribirse como

Gauss:

$$Rm(X, Y, Z, W) = \tau(X, Y, Z, W) + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle,$$

Codazzi:

$$(\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) = (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z),$$

Ricci:

$$R^\perp(X, Y)\xi = \alpha(X, S_\xi Y) - \alpha(S_\xi X, Y).$$

De ahora en adelante supondremos que \bar{M} es una variedad de curvatura constante c , completa y simplemente conexa, la cual denotaremos por Q_c^{n+p} .

1.5 El teorema fundamental de las subvariedades

En la sección 1.2 se vió que cualquier inmersión isométrica $f : M \rightarrow \bar{M}$ satisface las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci. Además, al final de la sección reescribimos estas ecuaciones para el caso en que \bar{M} tiene curvatura constante. Cuando \bar{M} tiene curvatura constante, el siguiente teorema establece que las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci son suficientes para encontrar una inmersión isométrica.

Teorema 1.8. Teorema fundamental de las subvariedades.

- a) Supongamos que M^n es una variedad Riemanniana simplemente conexa y $\pi : E \rightarrow M$ es un haz vectorial Riemanniano de rango p con una conexión ∇' compatible con su métrica. Sea α una sección simétrica del haz vectorial $\text{Hom}(TM \times TM, E)$ de funciones bilineales con valores en E . Definamos, para cada sección local ξ de E , un operador $S_\xi : TM \rightarrow TM$ tal que

$$\langle S_\xi X, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle, \quad X, Y \in TM.$$

Si α y ∇' satisfacen las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci para el caso de curvatura constante cero, entonces existe una inmersión isométrica $f : M^n \rightarrow Q_c^{n+p}$, y un isomorfismo de haces vectoriales, $\bar{f} : E \rightarrow NM$, a lo largo de f , tal que para todos los vectores $X, Y \in TM$ y todas las secciones locales ξ, η en E se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \langle \bar{f}(\xi), \bar{f}(\eta) \rangle &= \langle \xi, \eta \rangle, \\ \bar{f}(\alpha(X, Y)) &= \bar{\alpha}(X, Y), \\ \bar{f}(\nabla'_X \xi) &= \nabla_X^\perp(\bar{f}(\xi)), \end{aligned}$$

donde $\bar{\alpha}$ y ∇^\perp son la segunda forma fundamental y la conexión normal de f .

- b) Supongamos que f y g son dos inmersiones isométricas de una variedad conexa M^n en Q_c^{n+p} . Sean NM_f, α_f y ∇_f^\perp , el haz normal, segunda forma fundamental y conexión normal de f , y sean NM_g, α_g y ∇_g^\perp los correspondientes objetos de g . Si existe un isomorfismo de haces vectoriales, $\bar{\phi} : NM_f \rightarrow NM_g$, tal que para cada $X, Y \in TM$ y cada $\xi, \eta \in NM_f$ se cumplen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \langle \bar{\phi}(\xi), \bar{\phi}(\eta) \rangle &= \langle \xi, \eta \rangle, \\ \bar{\phi}\alpha_f(X, Y) &= \alpha_g(X, Y), \\ \bar{\phi}\nabla_f^\perp X \xi &= \nabla_g^\perp X \bar{\phi}(\xi), \end{aligned}$$

entonces existe una isometría, $\tau : Q_c^{n+p} \rightarrow Q_c^{n+p}$, tal que

$$g = \tau \circ f \quad \text{y} \quad \tau_*|_{NM_f} = \bar{\phi}.$$

Nota 1.2: Suponemos que Q_c^{n+p} es una variedad completa y simplemente conexa porque dos variedades riemannianas de curvatura constante que cumplan estas dos condiciones son isométricas entre sí, de este modo para probar el teorema podemos suponer que Q_c^{n+p} es \mathbb{R}^{n+p} .

Nota 1.3: De la definición de S_ξ se ve que $S_{\xi+\nu} = S_\xi + S_\nu$ y $S_{f\xi} = fS_\xi$.

DEMOSTRACION

- a) Sea $\tilde{E} := TM \oplus E$, la suma de Whitney de estos dos haces vectoriales, es decir que \tilde{E} es el haz vectorial sobre M cuya fibra sobre p es la suma directa de las fibras de TM y E , $\tilde{E}_p = T_p M \oplus E_p$, y la proyección está dada por $\rho(X, \xi) = \pi(\xi)$,

donde $X \in TM$ y $\xi \in E$. \tilde{E} es un haz vectorial de rango $n + p$. Además, en \tilde{E} definimos la métrica dada por $\langle X + \xi, Y + \nu \rangle = \langle X, Y \rangle + \langle \xi, \nu \rangle$, para cada $X + \xi$ y $Y + \nu \in \tilde{E}$.

Sea ∇ la conexión de Levi-Civita de M . Definamos

$$\begin{aligned}\nabla''_X Y &= \nabla_X Y + \alpha(X, Y), & X, Y \in TM, \\ \nabla''_X \xi &= -S_\xi X + \nabla'_X \xi, & X \in TM, \xi \in E,\end{aligned}$$

y extendamos la definición a todo \tilde{E} por linealidad.

Parte A. ∇'' es una conexión en \tilde{E} compatible con la métrica.

Si X, Y son campos vectoriales suaves en M y ξ es una sección suave en E , entonces $\nabla''_X Y$ es la sección dada por $\nabla''_X Y(p) = (\nabla_X Y(p), \alpha(X, Y)(p))$. Como $\nabla_X Y$ y $\alpha(X, Y)$ son secciones suaves de sus respectivos haces vectoriales, $\nabla''_X Y$ también es una sección suave. Similarmente para $\nabla''_X \xi$ y el caso más general.

Veamos que ∇'' es $C^\infty(M)$ -lineal en TM .

Como ∇ , α y ∇' son $C^\infty(M)$ -lineales en TM y $S_{f\xi} = fS_\xi$ para cada $\xi \in E$ y $f \in C^\infty(M)$, de la definición de ∇'' tenemos que

$$\nabla''_{fX} Y = f\nabla''_X Y \quad y \quad \nabla''_{fX} \xi = f\nabla''_X \xi,$$

para cualesquiera $X, Y \in TM$ y $\xi \in E$. El resultado general se sigue por linealidad.

Veamos que ∇'' obedece la regla de Leibniz.

Sean $f \in C^\infty(M)$, $X, Y \in TM$ y $\xi \in E$, entonces

$$\begin{aligned}\nabla''_X(fY) &= \nabla_X(fY) + \alpha(X, fY) \\ &= X(f)Y + f\nabla_X Y + f\alpha(X, Y) \\ &= X(f)Y + f\nabla''_X Y,\end{aligned}$$

además,

$$\begin{aligned}\nabla''_X(f\xi) &= -S_{f\xi} X + \nabla'_X(f\xi) \\ &= -fS_\xi X + X(f)\xi + f\nabla'_X \xi \\ &= X(f)\xi + f\nabla''_X \xi.\end{aligned}$$

El resultado general se sigue por linealidad.

Finalmente, veamos que ∇'' es compatible con la métrica.

Sean $X \in TM$, y $Y + \xi, Z + \nu \in \tilde{E}$. Entonces

$$\begin{aligned} X\langle Y + \xi, Z + \nu \rangle &= X(\langle Y, Z \rangle + \langle \xi, \nu \rangle) \\ &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle + \langle \nabla'_X \xi, \nu \rangle + \langle \xi, \nabla'_X \nu \rangle. \end{aligned}$$

Como $\langle \xi, \alpha(X, Z) \rangle = \langle S_\xi X, Z \rangle$ y $\langle \alpha(X, Y), \nu \rangle = \langle S_\nu X, Y \rangle$, podemos sumar y restar estos términos de la ecuación anterior, de manera que

$$\begin{aligned} X\langle Y + \xi, Z + \nu \rangle &= \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle + \langle \nabla'_X \xi, \nu \rangle + \langle \xi, \nabla'_X \nu \rangle \\ &\quad - \langle S_\xi X, Z \rangle + \langle \xi, \alpha(X, Z) \rangle - \langle Y, S_\nu X \rangle + \langle \alpha(X, Y), \nu \rangle. \end{aligned}$$

Reagrupando los términos de la última ecuación obtenemos

$$\begin{aligned} X\langle Y + \xi, Z + \nu \rangle &= \langle \nabla_X Y + \alpha(X, Y), Z + \nu \rangle + \langle -S_\xi X + \nabla'_X \xi, Z + \nu \rangle \\ &\quad + \langle Y + \xi, \nabla_X Z + \alpha(X, Y) \rangle + \langle Y + \xi, -S_\nu X + \nabla'_X \nu \rangle \\ &= \langle \nabla''_X (Y + \xi), Z + \nu \rangle + \langle Y + \xi, \nabla''_X (Z + \nu) \rangle. \end{aligned}$$

Por lo tanto, ∇'' es una conexión en \tilde{E} compatible con la métrica.

Parte B. El tensor de curvatura de \tilde{E} es 0.

Sean $X, Y \in TM$, $Z + \xi \in \tilde{E}$. Denotemos por R' al tensor de curvatura asociado con ∇' y por R'' al tensor de curvatura asociado con ∇'' .

Aplicando la definición de ∇'' tenemos que

$$\nabla''_Y (Z + \xi) = \nabla_Y Z + \alpha(Y, Z) - S_\xi Y + \nabla'_Y \xi. \quad (1.3)$$

Aplicando ∇'' una vez más obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla''_X \nabla''_Y (Z + \xi) &= \nabla_X \nabla_Y Z + \alpha(X, \nabla_Y Z) - S_{\alpha(Y, Z)} X \\ &\quad + \nabla'_X (\alpha(Y, Z)) - \nabla_X (S_\xi Y) - \alpha(X, S_\xi Y) \\ &\quad - S_{\nabla'_Y \xi} X + \nabla'_X \nabla'_Y \xi. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Permutando los campos X y Y en la ecuación anterior obtenemos

$$\begin{aligned} \nabla''_Y \nabla''_X (Z + \xi) &= \nabla_Y \nabla_X Z + \alpha(Y, \nabla_X Z) - S_{\alpha(X, Z)} Y \\ &\quad + \nabla'_Y (\alpha(X, Z)) - \nabla_Y (S_\xi X) - \alpha(Y, S_\xi X) \\ &\quad - S_{\nabla'_X \xi} Y + \nabla'_Y \nabla'_X \xi. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Sustituyendo Y por $[X, Y]$ en la ecuación 1.3 tenemos que

$$\nabla''_{[X, Y]} (Z + \xi) = \nabla_{[X, Y]} Z + \alpha([X, Y], Z) - S_\xi ([X, Y]) + \nabla'_{[X, Y]} \xi. \quad (1.6)$$

Como ∇ es la conexión de Levi-Civita de M y α es bilineal, tenemos que

$$\alpha([X, Y], Z) = \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(\nabla_Y X, Z).$$

Similarmente,

$$S_\xi([X, Y]) = S_\xi(\nabla_X Y) - S_\xi(\nabla_Y X).$$

Restando (1.5) y (1.6) de (1.4) obtenemos

$$\begin{aligned} R''(X, Y)(Z + \xi) &= R(X, Y)Z - S_{\alpha(Y, Z)}X + S_{\alpha(X, Z)}Y + (\nabla'_X \alpha)(Y, Z) \\ &\quad - (\nabla'_Y \alpha)(X, Z) - (\nabla_X S)(Y, \xi) + (\nabla_Y S)(X, \xi) \\ &\quad - \alpha(X, S_\xi Y) + \alpha(Y, S_\xi X) + R'(X, Y)\xi, \end{aligned}$$

donde

$$(\nabla'_X \alpha)(Y, Z) = \nabla'_X(\alpha(Y, Z)) - \alpha(\nabla_X Y, Z) - \alpha(Y, \nabla_X Z)$$

y

$$(\nabla_X S)(Y, \xi) = \nabla_X(S_\xi(Y)) - S_{\nabla'_X \xi}Y - S_\xi(\nabla_X Y).$$

Similarmente definimos $(\nabla'_Y \alpha)(X, Z)$ y $(\nabla_Y S)(X, \xi)$.

Como ∇' y α satisfacen la ecuación de Codazzi, $(\nabla'_Y \alpha)(X, Z) = (\nabla'_X \alpha)(Y, Z)$ y $(\nabla_X S)(Y, Z) = (\nabla_Y S)(X, Z)$, y como también satisfacen la ecuación de Ricci, $R'(X, Y)\xi = \alpha(X, S_\xi Y) - \alpha(Y, S_\xi X)$.

Entonces,

$$R''(X, Y)(Z + \xi) = R(X, Y)Z - S_{\alpha(Y, Z)}X + S_{\alpha(X, Z)}Y.$$

Por lo que $R''(X, Y)(Z + \xi) \in TM$. Sea $W \in TM$ un vector tangente arbitrario, entonces

$$\begin{aligned} \langle R''(X, Y)(Z + \xi), W \rangle &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle S_{\alpha(Y, Z)}X, W \rangle + \langle S_{\alpha(X, Z)}Y, W \rangle \\ &= \langle R(X, Y)Z, W \rangle - \langle \alpha(Y, Z), \alpha(X, W) \rangle \\ &\quad + \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle \\ &= 0. \end{aligned}$$

La última igualdad se debe a que α cumple la ecuación de Gauss para curvatura cero. Por lo tanto, como W fue arbitrario, $R''(X, Y)(Z + \xi) = 0$.

Sea $x \in M$. Escojamos $\xi_{1x}, \dots, \xi_{(n+p)x} \in \rho^{-1}(x)$ vectores ortonormales arbitrarios. Como la curvatura de \tilde{E} es cero y M es simplemente conexa, existen unas únicas extensiones globales paralelas de estos vectores, más aún, como ∇'' es compatible con la métrica, las extensiones dadas forman un marco ortonormal. Sean ξ_1, \dots, ξ_{n+p} dichas extensiones y sea $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un sistema de coordenadas en una vecindad arbitraria U de un punto p en M . En U existen funciones diferenciables a_i^ν tales que

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = a_i^\nu \xi_\nu.$$

Sea $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j} \rangle$ la expresión local en U del tensor métrico de M . Entonces, como los vectores ξ_ν son ortonormales,

$$g_{ij} = \sum_{\nu} a_i^\nu a_j^\nu.$$

Además, como los vectores ξ_ν son paralelos, tenemos que

$$\nabla''_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial a_j^\nu}{\partial x^i} \xi_\nu. \quad (1.7)$$

Por otro lado, como ∇ es simétrica, utilizando la definición de ∇'' tenemos que

$$\begin{aligned} \nabla''_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} + \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i} + \alpha\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^i}\right) \\ &= \nabla''_{\frac{\partial}{\partial x^j}} \frac{\partial}{\partial x^i}. \end{aligned}$$

Por lo tanto, utilizando (1.7), vemos que para $\nu = 1, \dots, n+p$, se cumple que

$$\frac{\partial a_j^\nu}{\partial x^i} = \frac{\partial a_i^\nu}{\partial x^j}. \quad (1.8)$$

Para cada ν fija definamos $\omega^\nu = a_i^\nu dx^i$.

Veamos que podemos extender ω^ν a toda la variedad.

Sea $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ otro sistema de coordenadas tal que $U \cap V \neq \emptyset$, y sean b_i^ν funciones diferenciables en V tales que $\frac{\partial}{\partial y^i} = b_i^\nu \xi_\nu$, donde $\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}$ son los campos tangentes a M asociados a la parametrización ψ . Para cada z en $U \cap V$ podemos escribir $\frac{\partial}{\partial y^i}$ como combinación lineal de los vectores $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$. Sean h_i^j las funciones de cambio de coordenadas en $U \cap V$ tales que

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = h_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}.$$

Entonces

$$\frac{\partial}{\partial y^i} = h_i^j a_j^\nu \xi_\nu,$$

y como para cada $z \in M$ los vectores ξ_ν forman una base de $T_z M \oplus \pi^{-1}(z)$, resulta que

$$b_i^\nu = h_i^j a_j^\nu.$$

Para cada z en $U \cap V$, las formas diferenciales dy^1, \dots, dy^n son la base dual a la base $\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^n}$ del espacio tangente $T_z M$ y las formas diferenciales dx^1, \dots, dx^n

son la base dual correspondiente a $\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}$, por lo que existen funciones k_i^j en $U \cap V$ tales que

$$dy^j = k_i^j dx^i.$$

Más aún, la matriz $[k_i^j]$ es la matriz inversa de $[h_i^j]$. Entonces

$$\begin{aligned} b_j^\nu dy^j &= h_j^r a_r^\nu dy^j \\ &= h_j^r a_r^\nu k_i^j dx^i \\ &= (k_i^j h_j^r) a_r^\nu dx^i \\ &= \delta_i^r a_r^\nu dx^i \\ &= a_i^\nu dx^i, \end{aligned}$$

donde δ_i^r es la delta de Kronecker y es igual a uno cuando i es igual a r y cero en caso contrario.

Por lo tanto, podemos extender ω^ν a toda la variedad, definiéndola para un sistema de coordenadas arbitrario como $b_i^\nu dy^i$.

Veamos que ω^ν es una forma diferencial cerrada.

Sea $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un sistema de coordenadas arbitrario, tal que $\omega^\nu = a_i^\nu dx^i$. Entonces

$$d\omega^\nu = \left[\frac{\partial a_i^\nu}{\partial x^j} - \frac{\partial a_j^\nu}{\partial x^i} \right] dx^i \wedge dx^j,$$

y por (1.8), $d\omega^\nu = 0$. Por lo tanto $d\omega^\nu \equiv 0$ y como M es simplemente conexa, para cada ν existe una función diferenciable f^ν en M tal que $df^\nu = \omega^\nu$. Definamos $f : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ como la función

$$f(y) = (f^1(y), \dots, f^{n+p}(y)).$$

Sea $\phi : U \rightarrow M$ un sistema de coordenadas arbitrario tal que $\frac{\partial}{\partial x^i} = a_i^\nu \xi_\nu$. Usando este sistema de coordenadas tenemos que

$$\frac{\partial f^\nu}{\partial x^i} = a_i^\nu.$$

Por lo tanto, $f_* \frac{\partial}{\partial x^i} = (a_i^1, \dots, a_i^{n+p})$, por lo que

$$\left\langle f_* \frac{\partial}{\partial x^i}, f_* \frac{\partial}{\partial x^j} \right\rangle = \sum_\nu a_i^\nu a_j^\nu = g_{ij},$$

i.e., f es una inmersión isométrica.

Como f es una inmersión isométrica, para cada $z \in M$ la derivada df_z es una isometría entre $T_z M$ y su imagen. De este modo podemos identificar de manera isométrica a $T_z M$ con un subespacio de $T_{f(z)} \mathbb{R}^{n+p}$ lo que nos permite escribir la descomposición

$$T_{f(z)} \mathbb{R}^{n+p} = T_z M \oplus N_z M.$$

Sea $T\mathbb{R}^{n+p}|_M$ la suma de Whitney de TM y NM , que denotamos por $TM \oplus_W NM$. Cada fibra de $T\mathbb{R}^{n+p}|_M$ es isomorfa a $T_{f(z)}\mathbb{R}^{n+p}$, por lo que $T\mathbb{R}^{n+p}|_M$ tiene la métrica Riemanniana inducida de \mathbb{R}^{n+p} , más aún, si restringimos esta métrica a TM , entonces coincide con la métrica Riemanniana de M , lo mismo que si la restringimos a NM .

Para cada $z \in M$, sea $e_\nu|_z \in T_zM \oplus N_zM$ el vector que se obtiene transportando paralelamente el vector canónico $e_\nu \in \mathbb{R}^{n+p}$ hasta $T_{f(z)}\mathbb{R}^{n+p}$. Abusando de la notación, designemos también como e_ν al campo vectorial que obtenemos en $T\mathbb{R}^{n+p}|_M$. Entonces $\{e_1, \dots, e_{n+p}\}$ es un marco ortonormal y paralelo en $T\mathbb{R}^{n+p}|_M$, ya que la métrica en $T\mathbb{R}^{n+p}|_M$ es la inducida de \mathbb{R}^{n+p} , la cual es una métrica plana.

Sea $\tilde{\phi} : \tilde{E} \rightarrow T\mathbb{R}^{n+p}|_M$ el morfismo de haces vectoriales dado por

$$\tilde{\phi}(a^\nu \xi_\nu) = a^\nu e_\nu.$$

$\tilde{\phi}$ es un isomorfismo ya que envía el marco ortonormal $\{\xi_1, \dots, \xi_{n+p}\}$ en \tilde{E} al marco ortonormal $\{e_1, \dots, e_{n+p}\}$ en $T\mathbb{R}^{n+p}|_M$. Más aún, un cálculo directo demuestra que para cualesquiera $\xi, \eta \in \tilde{E}$,

$$\langle \tilde{\phi}(\xi), \tilde{\phi}(\eta) \rangle = \langle \xi, \eta \rangle. \quad (1.9)$$

Sean $z \in M$ y $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ un sistema de coordenadas alrededor de z . Entonces $\frac{\partial}{\partial x^i} = a_i^\nu \xi_\nu$ para ciertas funciones a_i^ν diferenciables en U , por lo que

$$\tilde{\phi}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = a_i^\nu e_\nu = f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right). \quad (1.10)$$

Por lo tanto, como para cada $z \in U$, $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ es una base de T_zM , $\tilde{\phi}$ envía T_zM de manera isomorfa a $df_z(M)$. Como por (1.9) $\tilde{\phi}$ es una isometría en cada fibra, la restricción $\tilde{\phi}|_E$ resulta un isomorfismo de haces vectoriales entre E y NM tal que $\tilde{\phi}|_E$ es una isometría en cada fibra.

Sean $X \in TM$, $\xi \in \tilde{E}$. Como ξ_1, \dots, ξ_{n+p} son campos ortonormales paralelos tenemos que si $\xi = y^i \xi_i$, entonces

$$\nabla_X'' \xi = \nabla_X'' y^i \xi_i = (X(y^i)) \xi_i,$$

por lo que

$$\tilde{\phi}(\nabla_X'' \xi) = (X(y^i)) e_i.$$

Además, $\tilde{\phi}(\xi) = y^i e_i$, y como f es una inmersión, localmente su imagen es una subvariedad, y f es un difeomorfismo local entre M y su imagen, por lo que se cumple la ecuación

$$X(y^i) \circ f^{-1} = f_* X(y^i \circ f^{-1}).$$

Sea $\tilde{\nabla}$ la conexión de Levi-Civita de \mathbb{R}^n , entonces, como los campos canónicos e_1, \dots, e_{n+p} son campos paralelos,

$$\tilde{\nabla}_{f_* X}(\tilde{\phi}(\xi) \circ f^{-1}) = \tilde{\nabla}_{f_* X}(y^i \circ f^{-1}) e_i = f_* X(y^i \circ f^{-1}) e_i.$$

Por lo tanto

$$\tilde{\phi}(\nabla_X''\xi) = (\tilde{\nabla}_{f_*X}(\tilde{\phi}(\xi) \circ f^{-1})) \circ f.$$

El hecho de que f es localmente un encaje nos permite identificar a $\tilde{\phi}(\xi)$ con un campo vectorial en \mathbb{R}^{n+p} a lo largo de M y reescribir la ecuación anterior como

$$\tilde{\phi}(\nabla_X''\xi) = \tilde{\nabla}_{f_*X}(\tilde{\phi}(\xi)).$$

Definamos \tilde{f} como la restricción de $\tilde{\phi}$ a E . Veamos que \tilde{f} es el isomorfismo de haces vectoriales buscado.

Sean $X, Y \in TM$ y ξ una sección diferenciable de E . Por definición

$$\nabla_X''Y = \nabla_X Y + \alpha(X, Y).$$

Entonces

$$\tilde{\phi}(\nabla_X''Y) = \tilde{\phi}(\nabla_X Y) + \tilde{\phi}(\alpha(X, Y)).$$

Por (1.11) $\tilde{\phi}(\nabla_X''Y) = \tilde{\nabla}_{f_*X}\tilde{\phi}(Y)$ y por (1.10) $\tilde{\phi}$ coincide con f_* en TM , por lo que la ecuación anterior se convierte en

$$\tilde{\nabla}_{f_*X}f_*(Y) = f_*(\nabla_X Y) + \tilde{\phi}(\alpha(X, Y)).$$

Despejando $\tilde{\phi}(\alpha(X, Y))$ tenemos que

$$\tilde{\phi}(\alpha(X, Y)) = \tilde{\nabla}_{f_*X}f_*(Y) - f_*(\nabla_X Y) = \tilde{\alpha}(X, Y).$$

Finalmente, como $\alpha(X, Y) \in E$, $\tilde{f}(\alpha(X, Y)) = \tilde{\phi}(\alpha(X, Y))$. De manera similar, como

$$\nabla_X''\xi = -S_\xi X + \nabla_X'\xi,$$

tenemos que

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}(\nabla_X''\xi) &= -\tilde{\phi}(S_\xi X) + \tilde{\phi}(\nabla_X'\xi) \\ &= -f_*(S_\xi X) + \tilde{f}(\nabla_X'\xi). \end{aligned} \tag{1.12}$$

Utilizando (1.11) $\tilde{\phi}(\nabla_X''\xi) = \tilde{\nabla}_{f_*X}\tilde{\phi}(\xi) = \tilde{\nabla}_{f_*X}\tilde{f}(\xi)$, por lo que tomando componentes normales en la ecuación (1.12) tenemos que

$$\tilde{\nabla}_{f_*X}^\perp \tilde{f}(\xi) = \tilde{f}(\nabla_X'\xi).$$

Por lo tanto \tilde{f} es el isomorfismo de haces vectoriales buscado.

Nótese que salvo isometrías de \mathbb{R}^{n+p} , la inmersión isométrica f que construimos es independiente del punto x escogido y del marco ortonormal paralelo ξ_1, \dots, ξ_{n+p} .

Si hubiésemos empezado escogiendo otra base ortonormal distinta de $\xi_{1x}, \dots, \xi_{(n+p)x}$ para $\rho^{-1}(x)$, digamos v_1, \dots, v_{n+p} , entonces la matriz $[c_i^j]$ de cambio de base es una matriz ortogonal. Más aún, un cálculo directo demuestra que los campos vectoriales $\hat{v}_i = c_i^k \xi_k$ son ortogonales entre sí, paralelos y además extienden

v_1, \dots, v_{n+p} , por lo que si $\frac{\partial}{\partial x^i} = a_i^\nu \xi_\nu$ en la primera base y $\frac{\partial}{\partial x^i} = b_i^\nu \hat{v}_\nu$ en la segunda, se tiene que

$$a_i^\nu = b_i^\mu c_\mu^\nu.$$

Sea $\eta^\nu = b_i^\nu dx^i$ la forma cerrada asociada con la base $\hat{v}_1, \dots, \hat{v}_{n+p}$. Por la ecuación anterior,

$$\begin{aligned} \omega^\nu &= a_i^\nu dx^i \\ &= b_i^\mu c_\mu^\nu dx^i \\ &= c_\mu^\nu (b_i^\mu dx^i) \\ &= c_\mu^\nu \eta^\mu. \end{aligned}$$

Sean f^1, \dots, f^{m+p} funciones diferenciables en M tales que $df'^\mu = \eta^\mu$. Definamos $h^\nu = c_\mu^\nu f'^\mu$. Entonces

$$dh^\nu = c_\mu^\nu df'^\mu = c_\mu^\nu \eta^\mu = \omega^\nu,$$

y como df^ν también es igual a ω^ν y M es conexa, para cada ν existe $q^\nu \in \mathbb{R}$ tal que $f^\nu = h^\nu + q^\nu$, es decir que

$$f^\nu = c_\mu^\nu f'^\mu + q^\nu. \quad (1.13)$$

Sean $f' = (f'^1, \dots, f'^{m+p})$ y τ la isometría de \mathbb{R}^{n+p} que consiste en aplicar la transformación ortogonal dada por la matriz $[c_i^j]$ y la traslación dada por el vector (q^1, \dots, q^{n+p}) . Por (1.13) $f = \tau \circ f'$.

Si hubiésemos escogido otro punto z en M , podemos desplazar paralelamente los vectores elegidos en $T_z M \oplus N_z M$ hacia x , de modo que cuando los extendamos en campos vectoriales paralelos, dichos campos coincidirán en z con los vectores dados. Por la unicidad de la extensión se sigue que los campos obtenidos al extender paralelamente los vectores en z coinciden con la extensión de los vectores obtenidos al desplazarlos paralelamente hasta x , por lo que los vectores ortogonales elegidos para construir la inmersión isométrica son independientes del punto de M en donde se toman.

Por lo tanto, salvo isometrías de \mathbb{R}^{n+p} , la inmersión isométrica f es independiente del punto x escogido en M y de la base ortonormal de $\rho^{-1}(x)$.

- b) Sean f, g dos inmersiones isométricas de una variedad M^n en \mathbb{R}^{n+p} , con $NM_f, \alpha_f, \nabla_f^\perp$ y $NM_g, \alpha_g, \nabla_g^\perp$ el haz normal, segunda forma fundamental y conexión normal de f y g respectivamente. Dado el isomorfismo $\tilde{\phi}$ entre los haces normales NM_f y NM_g , definamos $\Psi : TM \oplus NM_f \rightarrow TM \oplus NM_g$ como

$$\Psi(X + \xi) = X + \tilde{\phi}(\xi).$$

Ψ es un isomorfismo de haces vectoriales. Sean ∇_f'' y ∇_g'' las conexiones de $TM \oplus NM_f$ y $TM \oplus NM_g$ construidas en la parte (a) del teorema. Dados

$X, Y \in TM$ y $\xi \in NM_f$, tenemos que

$$\begin{aligned}\Psi(\nabla''_{fX}(Y)) &= \Psi(\nabla_X Y + \alpha_f(X, Y)) \\ &= \nabla_X Y + \tilde{\phi}(\alpha_f(X, Y)) \\ &= \nabla_X Y + \alpha_g(X, Y) \\ &= \nabla''_{gX} Y \\ &= \nabla''_{gX} \Psi(Y).\end{aligned}$$

De manera similar, $\Psi(\nabla''_{fX}\xi) = \nabla''_{gX}\Psi(\xi)$, por lo que

$$\Psi(\nabla''_{fX}(Y + \xi)) = \nabla''_{gX}(\Psi(Y + \xi)).$$

Un cálculo similar demuestra que $\langle X + \xi, Y + \nu \rangle = \langle \Psi(X + \xi), \Psi(Y + \nu) \rangle$.

Sea $x \in M$ y denotemos por ξ_1, \dots, ξ_{n+p} los vectores en $T_x M \oplus (N_x M)_f$ obtenidos transportando paralelamente los vectores canónicos e_1, \dots, e_{n+p} de \mathbb{R}^{n+p} hasta $f(x)$. Denotemos de la misma manera sus extensiones en campos ortonormales y paralelos en todo $TM \oplus NM_f$. Sean $\omega_f^1, \dots, \omega_f^{n+p}$ las formas diferenciales construidas a partir de estos campos en la primera parte del teorema. Veamos que $df^\nu = \omega_f^\nu$.

Sean $X, Y \in TM$. Por la fórmula de Gauss se tiene que

$$\nabla''_X Y = \nabla_X Y + \alpha_f(X, Y) = \tilde{\nabla}_X Y,$$

y de manera similar, para cualquier campo normal $\xi \in NM_f$, tenemos que $\nabla''_X \xi = \tilde{\nabla}_X \xi$. Por lo tanto, ∇'' coincide con la conexión de \mathbb{R}^{n+p} a lo largo de la inmersión.

Como ∇'' coincide con $\tilde{\nabla}$, el transporte paralelo de cada vector ξ_ν a lo largo de $TM \oplus NM_f$ coincide con su transporte paralelo en \mathbb{R}^{n+p} . De este modo, para cada $y \in M$, el vector $\xi_\nu|_y$ coincide con el vector e_ν .

Sea $\phi : U \rightarrow M$ una parametrización de M . Existen funciones a_i^ν diferenciables en $f(U)$ tales que $\frac{\partial}{\partial x^i} = a_i^\nu \xi_\nu$. Por lo tanto, haciendo la identificación del vector $\frac{\partial}{\partial x^i}$ tangente a M con el vector $f_*(\frac{\partial}{\partial x^i})$ tangente a \mathbb{R}^{n+p} , tenemos que

$$f_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = a_i^\nu e_\nu. \quad (1.14)$$

Sean f^1, \dots, f^{n+p} las componentes de la función f en la base canónica de \mathbb{R}^{n+p} . Por (1.14) tenemos la ecuación

$$\frac{\partial f^\nu}{\partial x^i} = a_i^\nu.$$

Por construcción, la expresión local de ω_f^ν es $a_i^\nu dx^i$ y por la ecuación anterior tenemos que $df^\nu = \omega_f^\nu$.

Como Ψ preserva la métrica y $\Psi(\nabla''_{fX}\xi_i) = \nabla''_{gX}(\Psi(\xi_i))$, los campos $\Psi(\xi_1), \dots, \Psi(\xi_{n+p})$ son ortogonales entre sí y paralelos en $TM \oplus NM_g$. Sean $\eta_f^1, \dots, \eta_f^{n+p}$ las formas diferenciales obtenidas a partir de $\Psi(\xi_1), \dots, \Psi(\xi_{n+p})$ y sea $\phi : U \rightarrow M$ una parametrización arbitraria de M . Denotemos por a_i^ν a las únicas funciones diferenciables en $\phi(U)$ tales que $\frac{\partial}{\partial x^i} = a_i^\nu \xi_\nu$. Aplicando Ψ a $\frac{\partial}{\partial x^i}$ tenemos que

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \Psi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = a_i^\nu \Psi(\xi_\nu).$$

Por lo tanto,

$$\omega_f^\nu = a_i^\nu dx^i = \eta_f^\nu.$$

De la misma manera que cuando construimos los campos ξ_1, \dots, ξ_{n+p} , podemos transportar paralelamente los vectores canónicos e_1, \dots, e_{n+p} hasta $T_x M \oplus (N_x M)_g$. Denotemos también por e_1, \dots, e_{n+p} a las extensiones de estos campos en campos vectoriales ortogonales entre sí y paralelos a lo largo de $TM \oplus NM_g$. Como $\Psi(\xi_1), \dots, \Psi(\xi_{n+p})$ y e_1, \dots, e_{n+p} son dos marcos¹ de vectores paralelos en $TM \oplus NM_g$, existen números reales c_i^j tales que $\Psi(\xi_i) = c_i^j e_j$, más aún, como los dos marcos son de vectores ortogonales, la matriz $[c_i^j]$ es una matriz ortogonal. Sean $\omega_g^1, \dots, \omega_g^{n+p}$ las formas diferenciales construidas a partir de los campos e_1, \dots, e_{n+p} . De manera similar a como probamos que $df^\nu = \omega_f^\nu$, también tenemos que $dg^\nu = \omega_g^\nu$.

Como $\omega_f^\nu = \eta_f^\nu$, f es la inmersión isométrica de M construida a partir del marco ortonormal $\Psi(\xi_1), \dots, \Psi(\xi_{n+p})$ en $TM \oplus NM_g$. Por el comentario final de la prueba de la primera parte del teorema, existen números reales q^ν tales que

$$g^\nu = c_\mu^\nu f^\mu + q^\nu.$$

Sea $\tau : \mathbb{R}^{n+p} \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, dada por

$$\tau(x^1, \dots, x^{n+p}) = (c_i^1 x^i + q^1, \dots, c_i^{n+p} x^i + q^{n+p}).$$

Como la matriz $[c_i^j]$ es ortogonal, τ es una isometría, además, $g = \tau \circ f$.

Finalmente, como el campo vectorial ξ_i , que se obtuvo transportando paralelamente al vector e_i a lo largo de $TM \oplus NM_f$, coincide con su transporte paralelo a lo largo de \mathbb{R}^{n+p} , tenemos que

$$\begin{aligned} \tau_*(\xi_i) &= \tau_*(e_i) \\ &= c_i^k e_k \\ &= \Psi(\xi_i). \end{aligned}$$

Por lo tanto, τ_* coincide con Ψ en $TM \oplus NM_f$. En particular,

$$\tau_*|_{NM_f} = \Psi|_{NM_f} = \tilde{\phi}. \quad \square$$

¹Un marco en un haz vectorial es un conjunto de campos vectoriales tales que en cada fibra forman una base.

Nota 1.4: Usando el teorema fundamental de las subvariedades podemos demostrar que no todas las inmersiones isométricas de una variedad en \mathbb{R}^{n+p} son equivalentes, en el sentido de que exista una isometría τ tal que $g = \tau \circ f$.

Por ejemplo, considérese una vecindad U suficientemente pequeña del toro, $T^2 = S^1 \times S^1$, tal que U sea simplemente conexa. Tomemos $f : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ como la función

$$f(\theta, \phi) = (e^{i\theta}, e^{i\phi}).$$

Un cálculo directo demuestra que f es una inmersión. Dotemos a T^2 con la métrica inducida por la inmersión (T^2 con esta métrica es llamado el toro de Clifford). Resulta que con esta métrica T^2 es plano, i.e. su tensor de curvatura es nulo, y su segunda forma fundamental, que denotaremos por α , no se anula.

Si la vecindad U es suficientemente pequeña, existe en U un marco ortonormal, $\{\xi, \nu\}$. Podemos definir para cada par de campos vectoriales $X, Y \in TU$, con $Y = h_1\xi + h_2\nu$, el campo vectorial

$$\nabla'_X Y = X(h_1)\xi + X(h_2)\nu.$$

∇' es una conexión en TU , además su tensor de curvatura es idénticamente nulo. Si tomamos $M = U$, $\alpha'(X, Y) \equiv 0$ y $E = NM_f$, el par (α', ∇') satisface las ecuaciones fundamentales para curvatura cero. Por lo tanto, existe una inmersión isométrica $g : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ y un isomorfismo de haces vectoriales $\tilde{\phi} : E \rightarrow NM_g$ que satisfacen las condiciones del teorema. Sin embargo, ninguna isometría τ de \mathbb{R}^4 satisface que $g = \tau \circ f|_U$, porque de lo contrario, $\tau_*|_{NM_f}$ induce un isomorfismo de haces vectoriales entre NM_f y NM_g tal que $\tau_*(\alpha(X, Y)) = \alpha'(X, Y)$, lo cual es una contradicción porque α' es un operador nulo y α no.

Capítulo 2

Superficies en \mathbb{R}^4

Sea $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una inmersión isométrica de una superficie en \mathbb{R}^4 , entonces M tiene una segunda forma fundamental $\tilde{\alpha}$ asociada con la inmersión, así como una conexión normal ∇^\perp . Sea ν un campo normal, si ν no se anula podemos construir un nuevo haz vectorial Riemanniano de rango 1 con una conexión compatible con la métrica y con una “segunda forma fundamental”. Por lo tanto, si este haz satisface las ecuaciones fundamentales, y M es simplemente conexa, existe una inmersión isométrica $g : M \rightarrow \mathbb{R}^3$.

2.1 Las ν -ecuaciones fundamentales

Nótese que como toda variedad es localmente homeomorfa a \mathbb{R}^n , se tiene que toda variedad es localmente simplemente conexa, es decir, que para cada punto $p \in M$ y cada vecindad V de p existe un abierto U simplemente conexo tal que $p \in U \subset V$. Sea ν un campo normal a M en \mathbb{R}^4 . Si $\nu|_p \neq 0$, existe una vecindad de p tal que $\nu|_U \neq 0$. Por lo tanto, a partir de ahora podemos suponer que M es simplemente conexa y que existe un campo ν , normal a M en \mathbb{R}^4 y tal que $|\nu| = 1$.

Sea $(E_\nu)_x = \{c \nu(x) \mid c \in \mathbb{R}\}$ el subespacio de $N_x M$ generado por $\nu(x)$.

Definimos

$$E_\nu = \{c \nu(x) \mid x \in M, c \in \mathbb{R}\}.$$

Definición 2.1. Si $\pi : P \rightarrow M$ es un haz vectorial, decimos que la subvariedad $P' \subset P$ es un sub-haz vectorial si $\pi|_{P'} : P' \rightarrow M$ es un haz vectorial y la inclusión $i : P' \rightarrow P$ es un morfismo de haces vectoriales a lo largo de M .

Proposición 2.1. E_ν es un sub-haz vectorial de NM .

DEMOSTRACION. Sea $\phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow NM$ dada por

$$\phi(x, t) = t \nu(x).$$

ϕ es un morfismo inyectivo de haces vectoriales sobre M tal que $\phi(M \times \mathbb{R}) = E_\nu$. Probaremos que E_ν es una subvariedad de NM mostrando que ϕ es un encaje. Como ϕ es una función inyectiva y continua será suficiente probar que es un encaje local.

Sea $p \in M$, como $\nu(p) \neq 0$, en una vecindad U de p existe un campo normal μ tal que $\{\nu(x), \mu(x)\}$ es una base de $N_x M$ para cada $x \in U$. Usando esta base podemos

construir la trivialización $\tau : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^2$ dada por $\tau(a\nu(x) + b\mu(x)) = (x, (a, b))$. La expresión de ϕ en esta trivialización está dada de la siguiente manera,

$$\tau \circ \phi(x, t) = \tau(t\nu(x)) = (x, (t, 0)), \quad x \in U, t \in \mathbb{R}.$$

Por lo tanto, como τ es un difeomorfismo, por la ecuación anterior $\phi|_{U \times \mathbb{R}}$ es un encaje, i.e., ϕ es un encaje local, por lo que E_ν una subvariedad de NM .

Como por construcción la estructura de haz vectorial de E_ν dada por el morfismo ϕ coincide con la estructura dada por la inclusión $i : E_\nu \hookrightarrow NM$, concluimos que E_ν es un sub-haz vectorial de NM . \square

Nótese que el morfismo ϕ construido en el teorema anterior es un difeomorfismo entre E_ν y $M \times \mathbb{R}$.

Corolario 2.1. *E_ν es orientable si y solo si M es orientable.*

Como E_ν es un sub-haz de NM , podemos dotarlo con la métrica Riemanniana obtenida al restringir la métrica de NM . Recíprocamente, si tenemos un sub-haz vectorial $\pi : E \rightarrow M$ del haz normal, de rango 1 y con la métrica inducida por el haz normal, entonces los siguientes dos lemas muestran que $E = E_\nu$ para algún campo normal.

Lema 2.1. *Sea $E \rightarrow M$ un haz vectorial Riemanniano de rango 1. Existe una única conexión en E compatible con la métrica, más aún, la conexión es plana.*

DEMOSTRACION. Supongamos que ∇ es una conexión en E compatible con la métrica. Sea η una sección local de E definida en el abierto U y tal que $|\eta| = 1$. Como E es un haz de rango 1, cualquier sección local ν de E se puede escribir en U como $f\eta$ para una única función $f \in C^\infty(U)$ y como ∇ es compatible con la métrica, tenemos que $\langle \nabla_X \eta, \eta \rangle = 1/2 X \langle \eta, \eta \rangle = 0$, por lo que $\nabla_X \eta = 0$ para cualquier vector tangente X . Por lo tanto, si $\nu = f\eta$, tenemos que

$$\nabla_X \nu = X(f)\eta, \tag{2.1}$$

por lo que si la conexión existe debe ser única. Definamos ∇ utilizando la ecuación (2.1). ∇ está bien definida, pues como el haz es de rango 1, si μ es otro campo local de longitud unitaria definido en el abierto U , tenemos que $\mu = -\eta$ por lo que si $\nu = f\eta$, entonces $\nu = (-f)(-\eta)$. Como

$$X(f)\eta = [X(-f)](-\eta),$$

$\nabla_X \nu$ es independiente de la sección local unitaria. Un cálculo directo muestra que ∇ es una conexión compatible con la métrica y por (2.1) el tensor de curvatura de ∇ se anula. \square

Lema 2.2. *Sea $E \rightarrow M$ un haz vectorial de rango 1 sobre una variedad M simplemente conexa, entonces E es trivial*

DEMOSTRACION. Introduzcamos en E una métrica Riemanniana, la cual denotaremos por g . Sea ∇' la única conexión en E compatible con g . Por el lema 2.1 ∇' es una conexión plana. Sea ν_x un vector unitario en la fibra sobre el punto $x \in M$. Como ∇' tiene tensor de curvatura nulo y M es simplemente conexa, existe una única extensión del vector ν_x en un campo vectorial paralelo $\nu : M \rightarrow E$. Como la conexión es compatible con la métrica y ν es paralelo, tenemos que $g(\nu, \nu) = 1$ en todo M , es decir que $\nu \neq 0$ en todo M . Por lo tanto, como E es un haz vectorial de rango 1 y posee una sección que no se anula, debe ser trivial. \square

Definición 2.2. Sea $E \rightarrow M$ un sub-haz vectorial del haz normal de rango 1 y con la métrica inducida del haz normal. Denotaremos por ∇' a la única conexión en E compatible con la métrica.

Por el lema 2.2, si E es un sub-haz de rango 1 del haz normal a M , existe un campo normal unitario ν tal que $E = E_\nu$.

Proposición 2.2. Sea E un sub-haz del haz normal tal que $E = E_\nu$ para cierto campo normal unitario ν . Entonces, si μ es una sección de E , tenemos que

$$\nabla'_X \mu = \langle \nabla_X^\perp \mu, \nu \rangle \nu.$$

DEMOSTRACION. Como $\mu = \langle \mu, \nu \rangle \nu$, y $\nabla'_X \nu = 0$, tenemos que $\nabla'_X \mu = X(\langle \mu, \nu \rangle) \nu$. Como μ y ν son secciones en el haz normal y ∇^\perp es compatible con la métrica, $X(\langle \mu, \nu \rangle) = \langle \nabla_X^\perp \mu, \nu \rangle + \langle \mu, \nabla_X^\perp \nu \rangle$. Finalmente, como $|\nu| = 1$, tenemos que $\langle \mu, \nabla_X^\perp \nu \rangle = 0$, de donde se sigue el resultado. \square

Dada la segunda forma fundamental del haz normal, para cada par X, Y de vectores tangente a M en x , $\tilde{\alpha}(X, Y)$ es un vector normal a M . Sea $\alpha'(X, Y)$ la proyección de $\tilde{\alpha}(X, Y)$ sobre la fibra E_x del sub-haz E de NM . Sea ν un campo normal unitario tal que $E = E_\nu$ y sea $l_\nu(X, Y) = \langle \tilde{\alpha}(X, Y), \nu \rangle$, la ν -segunda forma fundamental definida en el capítulo anterior. Entonces se tiene que

$$\alpha'(X, Y) = l_\nu(X, Y) \nu.$$

Como para cada $x \in M$, l_ν es un operador bilineal, simétrico de $T_x M \times T_x M$ a \mathbb{R} , es claro que α' también es bilineal y simétrica; más aún, como $\alpha'(X, Y) = \langle \tilde{\alpha}(X, Y), \nu \rangle \nu$, tenemos que $\alpha'(X, Y)$ es una función diferenciable si X, Y son campos tangentes diferenciables. Por lo tanto, tenemos la siguiente proposición.

Proposición 2.3. α' es una sección diferenciable y simétrica de $\text{Hom}(TM \times TM, E)$.

Como en E tenemos una (única) conexión compatible con la métrica y α' define una segunda forma fundamental, podemos utilizar el teorema fundamental de las subvariedades para buscar inmersiones isométricas de nuestra superficie en \mathbb{R}^3 , sin embargo, no es necesario verificar todas las ecuaciones fundamentales, como demuestra el siguiente teorema.

Teorema 2.1. E con la conexión ∇' y la segunda forma fundamental α' cumple la ecuación de Ricci para curvatura constante.

DEMOSTRACION. Sean ν una sección local de E y S'_ν el único operador lineal tal que $\langle \alpha'(X, Y), \nu \rangle = \langle S'_\nu X, Y \rangle$. Así mismo, sea S_ν el ν -operador de forma definido en el capítulo anterior. Entonces, por la proposición 1.2 tenemos que

$$\langle S_\nu X, Y \rangle = l_\nu(X, Y) = \langle \alpha'(X, Y), \nu \rangle,$$

por lo que $S_\nu = S'_\nu$.

Sea R' el tensor de curvatura de ∇' , por el lema 2.1, $R'(X, Y)\eta = 0$, para cualesquiera campos tangentes X, Y y sección local η .

Además, si $f \in C^\infty(M)$, un cálculo directo demuestra que $S'_{f\nu} = fS'_\nu$, por lo que si ν es una sección local unitaria definida en el abierto U , tenemos que en U se cumple que

$$\begin{aligned} \alpha'(X, S'_\eta Y) - \alpha'(S'_\eta X, Y) &= \alpha'(X, S'_{\langle \eta, \nu \rangle \nu} Y) - \alpha'(S'_{\langle \eta, \nu \rangle \nu} X, Y) \\ &= \alpha'(X, \langle \eta, \nu \rangle S'_\nu Y) - \alpha'(\langle \eta, \nu \rangle S'_\nu X, Y) \\ &= \langle \eta, \nu \rangle (\alpha'(X, S'_\nu Y) - \alpha'(S'_\nu X, Y)). \end{aligned}$$

A su vez, para el campo ν tenemos que

$$\begin{aligned} \alpha'(X, S'_\nu Y) - \alpha'(S'_\nu X, Y) &= (l_\nu(X, S'_\nu Y) - l_\nu(S'_\nu X, Y))\nu \\ &= (\langle S_\nu X, S'_\nu Y \rangle - \langle S'_\nu X, S_\nu Y \rangle)\nu, \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde la última ecuación se debe a que $S_\nu = S'_\nu$. Por lo tanto,

$$R'(X, Y)\eta = 0 = \alpha'(X, S'_\eta Y) - \alpha'(S'_\eta X, Y),$$

que es la ecuación de Ricci para curvatura constante. \square

Por la proposición anterior, si estamos interesados en hallar una inmersión isométrica de la superficie en \mathbb{R}^3 , con segunda forma fundamental determinada por el sub-haz vectorial E , debemos verificar que ∇' y α' cumplen con las ecuaciones de Gauss y Codazzi para curvatura cero. Para estudiar las ecuaciones de Gauss y Codazzi debemos reescribirlas de una manera conveniente. Sea $p \in M$, sabemos que dado un sub-haz E del haz normal de rango 1, existe un campo vectorial normal unitario ν tal que $E = E_\nu$. Más aún, escogiendo una vecindad U de p suficientemente pequeña, sabemos que existe un campo normal μ en U tal que $\{\nu(x), \mu(x)\}$ es una base de $N_x M$ para cada x . Utilizando el proceso de Gram-Schmidt podemos construir un campo normal ν^\perp tal que $\{\nu, \nu^\perp\}$ es una base ortonormal.

Teorema 2.2. *La ecuación de Gauss es equivalente a la ecuación*

$$l_{\nu^\perp}(X, W)l_{\nu^\perp}(Y, Z) - l_{\nu^\perp}(X, Z)l_{\nu^\perp}(Y, W) = 0.$$

Podemos reescribir la ecuación anterior de manera más compacta como

$$l_{\nu^\perp} \bullet l_{\nu^\perp} = 0.$$

DEMOSTRACION. Sean $X, Y, Z, W \in T_x M$, como $\tilde{\alpha}(X, Y) = l_\nu(X, Y)\nu + l_{\nu^\perp}(X, Y)\nu^\perp$ y ν, ν^\perp son vectores perpendiculares entre sí, tenemos que

$$\begin{aligned}\langle \tilde{\alpha}(X, W), \tilde{\alpha}(Y, Z) \rangle &= \langle l_\nu(X, W)\nu + l_{\nu^\perp}(X, W)\nu^\perp, l_\nu(Y, Z)\nu + l_{\nu^\perp}(Y, Z)\nu^\perp \rangle \\ &= l_\nu(X, W)l_\nu(Y, Z) + l_{\nu^\perp}(X, W)l_{\nu^\perp}(Y, Z),\end{aligned}$$

similarmente, $\langle \tilde{\alpha}(X, Z), \tilde{\alpha}(Y, W) \rangle = l_\nu(X, Z)l_\nu(Y, W) + l_{\nu^\perp}(X, Z)l_{\nu^\perp}(Y, W)$. Como $\tilde{\alpha}$ cumple la ecuación de Gauss, tenemos que

$$\begin{aligned}Rm(X, Y, Z, W) &= \langle \tilde{\alpha}(X, W), \tilde{\alpha}(Y, Z) \rangle - \langle \tilde{\alpha}(X, Z), \tilde{\alpha}(Y, W) \rangle \\ &= l_\nu \bullet l_\nu(X, Y, Z, W) + l_{\nu^\perp} \bullet l_{\nu^\perp}(X, Y, Z, W).\end{aligned}$$

Además, como $\alpha'(X, Y) = l_\nu(X, Y)\nu$, un cálculo directo demuestra que $\langle \alpha'(X, W), \alpha'(Y, Z) \rangle - \langle \alpha'(X, Z), \alpha'(Y, W) \rangle = l_\nu \bullet l_\nu(X, Y, Z, W)$. Por lo tanto, α' cumple la ecuación de Gauss si y solo si $l_{\nu^\perp} \bullet l_{\nu^\perp} = 0$. \square

Teorema 2.3. Sean X, Y, Z campos vectoriales tangentes a M en una vecindad de $p \in M$, entonces, la ecuación de Codazzi es equivalente a la ecuación

$$\langle \nabla_Y^\perp \nu^\perp, \nu \rangle X + \langle \nabla_X^\perp \nu, \nu^\perp \rangle Y \in \text{Ker} S_{\nu^\perp},$$

donde $\text{Ker} S_{\nu^\perp}(x)$ es el kernel del operador $S_{\nu^\perp}|_{T_x M}$.

DEMOSTRACION. Sean X, Y, Z campos vectoriales locales tangentes a M , entonces la ecuación de codazzi está dada por

$$(\nabla'_X \alpha')(Y, Z) = (\nabla'_Y \alpha')(X, Z).$$

Como $\alpha' = l_\nu \otimes \nu$ (ver el apéndice) tenemos que $\nabla'_X \alpha' = (\nabla_X l_\nu) \otimes \nu + l_\nu \otimes \nabla'_X \nu$, pero en la prueba del lema 2.1 demostramos que $\nabla'_X \nu = 0$ para cualquier sección unitaria de un haz vectorial de rango 1, por lo que

$$\nabla'_X \alpha' = (\nabla_X l_\nu) \otimes \nu.$$

Por lo tanto, tenemos que la ecuación de Codazzi es equivalente a

$$(\nabla_X l_\nu)(Y, Z) = (\nabla_Y l_\nu)(X, Z).$$

Como $\tilde{\alpha} = l_\nu \otimes \nu + l_{\nu^\perp} \otimes \nu^\perp$, tenemos que

$$\nabla_X^\perp \tilde{\alpha} = (\nabla_X l_\nu) \otimes \nu + l_\nu \otimes \nabla_X^\perp \nu + (\nabla_X l_{\nu^\perp}) \otimes \nu^\perp + l_{\nu^\perp} \otimes \nabla_X^\perp \nu^\perp. \quad (2.2)$$

Además, $\tilde{\alpha}$ y ∇^\perp cumplen con la ecuación de Codazzi, por lo que

$$(\nabla_X^\perp \tilde{\alpha})(Y, Z) = (\nabla_Y^\perp \tilde{\alpha})(X, Z).$$

Sustituyendo la ecuación (2.2) en la ecuación anterior y tomando la componente en la dirección del vector ν tenemos que

$$\begin{aligned}(\nabla_X l_\nu)(Y, Z) + l_\nu(Y, Z) \langle \nabla_X^\perp \nu, \nu \rangle + l_{\nu^\perp}(Y, Z) \langle \nabla_X^\perp \nu^\perp, \nu \rangle &= \\ (\nabla_Y l_\nu)(X, Z) + l_\nu(X, Z) \langle \nabla_Y^\perp \nu, \nu \rangle + l_{\nu^\perp}(X, Z) \langle \nabla_Y^\perp \nu^\perp, \nu \rangle.\end{aligned}$$

Como $\nabla'_X \nu = 0$, tenemos que $\langle \nabla_X^\perp \nu, \nu \rangle = \langle \nabla'_X \nu, \nu \rangle = 0$, con lo cual la ecuación anterior se escribe como

$$(\nabla_X l_\nu)(Y, Z) + l_{\nu^\perp}(Y, Z) \langle \nabla_X^\perp \nu^\perp, \nu \rangle = (\nabla_Y l_\nu)(X, Z) + l_{\nu^\perp}(X, Z) \langle \nabla_Y^\perp \nu^\perp, \nu \rangle.$$

Por lo tanto, α' y ∇' cumplen la ecuación de Codazzi si y solo si

$$l_{\nu^\perp}(Y, Z) \langle \nabla_X^\perp \nu^\perp, \nu \rangle = l_{\nu^\perp}(X, Z) \langle \nabla_Y^\perp \nu^\perp, \nu \rangle.$$

Como l_ν^\perp es $C^\infty(M)$ bilineal, podemos reagrupar la ecuación anterior de la siguiente manera

$$l_{\nu^\perp}(\langle \nabla_Y^\perp \nu^\perp, \nu \rangle X - \langle \nabla_X^\perp \nu^\perp, \nu \rangle Y, Z) = 0.$$

Por la proposición 1.2, la ecuación anterior es equivalente a

$$\langle S_{\nu^\perp}(\langle \nabla_Y^\perp \nu^\perp, \nu \rangle X - \langle \nabla_X^\perp \nu^\perp, \nu \rangle Y), Z \rangle = 0, \quad (2.3)$$

y como Z es arbitrario, la ecuación (2.3) se cumple si y solo si

$$S_{\nu^\perp}(\langle \nabla_Y^\perp \nu^\perp, \nu \rangle X - \langle \nabla_X^\perp \nu^\perp, \nu \rangle Y) = 0$$

para cualesquiera X, Y . Finalmente, como $\langle \nu, \nu^\perp \rangle = 0$ y ∇^\perp es una conexión compatible con la métrica, se tiene que $\langle \nu^\perp, \nabla_X^\perp \nu \rangle = -\langle \nabla_X^\perp \nu^\perp, \nu \rangle$, de donde se obtiene el resultado. \square

2.2 Las ecuaciones de Gauss y Codazzi

Definición 2.3. Sean X, Y campos vectoriales locales tangentes a M en una vecindad U tal que existe un campo normal a M , ν^\perp , tal que $\langle \nu, \nu^\perp \rangle = 0$. Definimos $W_\nu(X, Y)$ como el campo vectorial

$$W_\nu(X, Y) = \langle \nabla_Y^\perp \nu^\perp, \nu \rangle X + \langle \nabla_X^\perp \nu^\perp, \nu \rangle Y.$$

Por el teorema 2.3, α', ∇' cumplen la ecuación de codazzi si y solo si $W_\nu(X, Y) \in \text{Ker} S_{\nu^\perp}$ para cada par de campos tangentes locales X, Y . Además, por la última parte del teorema 2.3 sabemos que $\langle \nabla_X^\perp \nu, \nu^\perp \rangle = -\langle \nabla_X^\perp \nu^\perp, \nu \rangle$, por lo que es inmediata la siguiente proposición.

Proposición 2.4. Sean X, Y dos campos tangentes locales de M , entonces $W_\nu(X, Y) = -W_\nu(Y, X)$.

De ahora en adelante, a no ser que se establezca lo contrario, sólo consideraremos campos vectoriales tangentes a M definidos en una vecindad tal que exista una pareja de campos normales $\{\nu, \nu^\perp\}$ perpendiculares entre sí.

Lema 2.3. Sean X, Y campos vectoriales locales tangentes a M , entonces, si e, f, g, h son funciones diferenciables definidas en la misma vecindad que X, Y , se verifica la siguiente ecuación,

$$W_\nu(eX + fY, gX + hY) = (eh - fg)W_\nu(X, Y).$$

En particular, si X, Y son linealmente independientes en $x \in M$, $W_\nu(X', Y') = 0$ para cada X', Y' en una vecindad de x si y solo si $W_\nu(X, Y) = 0$.

DEMOSTRACION. De la definición de W_ν es claro que W_ν es C^∞ -bilineal en la vecindad en la que este definido, por lo que

$$W_\nu(eX + fY, gX + hY) = egW_\nu(X, X) + ehW_\nu(X, Y) + fgW_\nu(Y, X) + fhW_\nu(Y, Y),$$

utilizando la proposición anterior, $W_\nu(X, X) = W_\nu(Y, Y) = 0$ y $W_\nu(X, Y) = -W_\nu(Y, X)$, por lo que simplificando la ecuación obtenemos

$$W_\nu(eX + fY, gX + hY) = (eh - fg)W_\nu(X, Y).$$

Para la última parte, si X, Y son linealmente independientes en x , existe una vecindad V de x tal que X, Y son linealmente independientes en V , por lo que para cada pareja X', Y' de campos tangentes en V existen funciones diferenciables, e, f, g, h , tales que $X' = eX + fY$ y $Y' = gX + hY$. Aplicando la primera parte del lema tenemos que

$$W_\nu(X', Y') = (eh - fg)W_\nu(X, Y),$$

por lo tanto, $W_\nu(X', Y') = 0$ para cualquier pareja de campos tangentes X', Y' en V si y solo si $W_\nu(X, Y) = 0$. \square

Lema 2.4. *Sea ν un campo normal local sobre la superficie M . Sea $\{X_1, X_2\}$ una base para T_pM , entonces la expresión para el operador $S_\nu|_{T_pM}$ en esta base está dada por la matriz*

$$[S_\nu] = \begin{pmatrix} e_\nu & f_\nu \\ f_\nu & g_\nu \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1},$$

donde,

$$\begin{aligned} e_\nu &= \langle S_\nu(X_1), X_1 \rangle = l_\nu(X_1, X_1), \\ f_\nu &= \langle S_\nu(X_1), X_2 \rangle = l_\nu(X_1, X_2), \\ g_\nu &= \langle S_\nu(X_2), X_2 \rangle = l_\nu(X_2, X_2), \end{aligned}$$

son los coeficientes de la segunda forma fundamental en la base y $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$.

DEMOSTRACION. Sea $S_\nu(X_i) = a_i^j X_j$, la expresión de S_ν en la base $\{X_1, X_2\}$, entonces

$$\langle S_\nu(X_i), X_j \rangle = a_i^k \langle X_k, X_j \rangle = a_i^k g_{kj}.$$

Si escribimos en forma matricial la ecuación anterior nos queda que

$$\begin{pmatrix} e_\nu & f_\nu \\ f_\nu & g_\nu \end{pmatrix} = [S_\nu] \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Despejando $[S_\nu]$ de la ecuación anterior obtenemos el resultado. \square

Por el lema 2.3, para probar que $W_\nu(X, Y) \in \ker S_{\nu^\perp}$, es suficiente que evaluemos $S_{\nu^\perp}(W_\nu(X, Y))$ en una pareja de vectores linealmente independientes. Además, en caso de que $W_\nu(X, Y) \neq 0$, también tenemos el siguiente teorema.

Teorema 2.4. *Supongamos que X, Y son una pareja de campos tangentes definidos en una vecindad U . Si $W_\nu(X, Y) \neq 0$, entonces X, Y son linealmente independientes y si α' y ∇' cumplen con la ecuación de Codazzi en U , entonces también cumplen con la de Gauss.*

DEMOSTRACION. Sean X, Y campos tangentes tales que $W_\nu(X, Y) \neq 0$, supongamos que X, Y son linealmente dependientes, entonces existe una función diferenciable f tal que $Y = fX$ o $X = fY$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $Y = fX$, entonces,

$$W_\nu(X, Y) = W_\nu(X, fX) = fW_\nu(X, X) = 0,$$

lo cual es una contradicción. Por lo tanto X, Y son linealmente independientes.

Supongamos que α', ∇' satisfacen la ecuación de Codazzi en U , entonces $S_{\nu^\perp}(W_\nu(X, Y)) = 0$ y como $W_\nu(X, Y) \neq 0$, tenemos que $\det S_{\nu^\perp} = 0$ en U .

Sea $p \in U$, tomemos una parametrización $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^2$ en una vecindad de p tal que $V \subset U$ y denotemos por ∂_1, ∂_2 a los vectores tangentes $\partial/\partial x^1, \partial/\partial x^2$. Por el lema 2.4 tenemos que $\det S_{\nu^\perp} = (e_{\nu^\perp} g_{\nu^\perp} - f_{\nu^\perp}^2) / \det[g_{ij}]$, donde $e_{\nu^\perp}, f_{\nu^\perp}, g_{\nu^\perp}$ fueron definidos en el lema y g_{ij} es la expresión local de la métrica, por lo que en V se cumple la ecuación $(e_{\nu^\perp} g_{\nu^\perp} - f_{\nu^\perp}^2) = 0$. Por otro lado, sabemos que la ecuación de Gauss es equivalente a $l_{\nu^\perp} \bullet l_{\nu^\perp}(X, Y, Z, W) = 0$ para cualesquiera campos tangentes locales X, Y, Z, W .

Por definición tenemos que

$$l_{\nu^\perp} \bullet l_{\nu^\perp}(X, Y, Z, W) = l_{\nu^\perp}(X, W)l_{\nu^\perp}(Y, Z) - l_{\nu^\perp}(X, Z)l_{\nu^\perp}(Y, W).$$

Es inmediato de la ecuación anterior que $l_{\nu^\perp} \bullet l_{\nu^\perp}$ es multilineal y satisface las relaciones

$$l_{\nu^\perp} \bullet l_{\nu^\perp}(X, Y, Z, W) = -l_{\nu^\perp} \bullet l_{\nu^\perp}(Y, X, Z, W) = -l_{\nu^\perp} \bullet l_{\nu^\perp}(X, Y, W, Z), \quad (2.4)$$

en particular, $l_{\nu^\perp} \bullet l_{\nu^\perp}(\partial_i, \partial_i, Z, W) = 0$. Lo mismo para $l_{\nu^\perp} \bullet l_{\nu^\perp}(X, Y, \partial_i, \partial_i)$. Por lo tanto, tenemos que $l_{\nu^\perp} \bullet l_{\nu^\perp} = 0$ si y solo si $l_{\nu^\perp} \bullet l_{\nu^\perp}(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l) = 0$, con $i \neq j$ y $k \neq l$. Utilizando las relaciones de la ecuación (2.4) vemos que es suficiente con probar que $l_{\nu^\perp} \bullet l_{\nu^\perp}(\partial_1, \partial_2, \partial_1, \partial_2) = 0$, pero

$$l_{\nu^\perp} \bullet l_{\nu^\perp}(\partial_1, \partial_2, \partial_1, \partial_2) = -(e_{\nu^\perp} g_{\nu^\perp} - f_{\nu^\perp}^2) = 0.$$

Como el punto p en U fue arbitrario, la ecuación de Codazzi implica la ecuación de Gauss en todo U . \square

Del teorema anterior vemos que α', ∇' cumplen la ecuación de Gauss si y solo si $\det S_{\nu^\perp} = 0$. Si fijamos una base local de vectores tangentes tenemos que $\det S_{\nu^\perp} = 0$ si y solo si $(e_{\nu^\perp} g_{\nu^\perp} - f_{\nu^\perp}^2) = 0$, donde $e_{\nu^\perp}, g_{\nu^\perp}, f_{\nu^\perp}$ son los coeficientes de la ν -segunda forma fundamental en la base dada, definidos en el lema 2.4.

Teorema 2.5. *Sean X, Y una pareja de campos vectoriales locales, tangentes a M y linealmente independientes. La condición de Codazzi es equivalente a $\bar{\nabla}_{W_\nu(X, Y)} \nu^\perp = 0$, donde $\bar{\nabla}$ es la conexión de $T\mathbb{R}^4|_M$.*

DEMOSTRACION. Sea $W_\nu = W_\nu(X, Y)$, primero probaremos que $\nabla_{W_\nu}^\perp \nu^\perp = 0$.

Como ∇^\perp es una conexión compatible con la métrica,

$$\langle \nabla_{W_\nu}^\perp \nu^\perp, \nu^\perp \rangle = \frac{1}{2} W_\nu(\langle \nu^\perp, \nu^\perp \rangle) = 0.$$

Además, como $W_\nu = \langle \nabla_Y^\perp \nu^\perp, \nu \rangle X - \langle \nabla_X^\perp \nu^\perp, \nu \rangle Y$, tenemos que

$$\nabla_{W_\nu}^\perp \nu^\perp = \langle \nabla_Y^\perp \nu^\perp, \nu \rangle \nabla_X^\perp \nu^\perp - \langle \nabla_X^\perp \nu^\perp, \nu \rangle \nabla_Y^\perp \nu^\perp,$$

de donde tenemos que

$$\langle \nabla_{W_\nu}^\perp \nu^\perp, \nu \rangle = \langle \nabla_Y^\perp \nu^\perp, \nu \rangle \langle \nabla_X^\perp \nu^\perp, \nu \rangle - \langle \nabla_X^\perp \nu^\perp, \nu \rangle \langle \nabla_Y^\perp \nu^\perp, \nu \rangle = 0.$$

Por lo tanto, $\nabla_{W_\nu}^\perp \nu^\perp = 0$. Finalmente, por definición del operador de forma (definición 1.1), tenemos que

$$\tilde{\nabla}_{W_\nu} \nu^\perp = -S_{\nu^\perp}(W_\nu) + \nabla_{W_\nu}^\perp \nu^\perp = -S_{\nu^\perp}(W_\nu).$$

Como la condición de Codazzi se cumple si y solo si $S_{\nu^\perp}(W_\nu(X, Y)) = 0$ para alguna pareja de campos tangentes linealmente independientes, el resultado se obtiene de la ecuación anterior. \square

Por lo tanto, dado un haz vectorial $E_\nu \rightarrow M$, podemos probar que ∇' y α' satisfacen las ecuaciones de Gauss y Codazzi probando que localmente se cumplen las ecuaciones

$$\begin{aligned} l_{\nu^\perp} \bullet l_{\nu^\perp} &= 0, \\ \bar{\nabla}_{W_\nu(X, Y)} \nu^\perp &= 0. \end{aligned}$$

Más aún, si $W_\nu(X, Y) \neq 0$ para una pareja de campos tangentes linealmente independientes, es suficiente con probar la segunda ecuación.

Para concluir el capítulo, probaremos un teorema que relaciona una de las propiedades geométricas de la inmersión en \mathbb{R}^4 con la cantidad de “curvatura extrínseca” que posee.

Teorema 2.6. *Sea $f : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ una inmersión isométrica de una superficie simplemente conexa en \mathbb{R}^4 . $f(M)$ se encuentra en un hiperplano si y solo si existe un campo normal ν^\perp a lo largo de M tal que $\nabla_X^\perp \nu^\perp = 0$ para cada campo tangente X y $l_{\nu^\perp} = 0$.*

DEMOSTRACION. Supongamos que $f(M)$ se encuentra en el hiperplano V que pasa por $f(x_0)$ y es ortogonal al vector unitario v en \mathbb{R}^4 . Sea ν^\perp el campo en $T\mathbb{R}^4|_M$ que se obtiene desplazando paralelamente el vector v a lo largo de $f(M)$. ν^\perp es un campo normal a M , además, por la ecuación de Weingarten,

$$l_{\nu^\perp}(X, Y) = \langle \alpha(X, Y), \nu^\perp \rangle = -\langle \bar{\nabla}_X \nu^\perp, Y \rangle = 0.$$

Como $\nabla_X^\perp \nu^\perp$ es la proyección sobre el haz normal de $\bar{\nabla}_X \nu^\perp$, tenemos que $\nabla_X^\perp \nu^\perp = 0$.

Recíprocamente, supongamos que existe un campo ν^\perp normal a M con las propiedades del teorema. Sea E el haz vectorial tal que para cada $x \in M$, la fibra E_x de E sobre x es el complemento ortogonal del espacio generado por $\nu^\perp(x)$ en $N_x M$. Como localmente siempre existe un campo normal ν tal que $\{\nu, \nu^\perp\}$ es una base ortonormal para NM , se sigue que E es un sub-haz vectorial de NM de rango 1, además,

$NM_f \cong E \oplus E_{\nu^\perp}$, donde NM_f es el haz normal a la inmersión a lo largo de f y “ \cong ” denota isomorfismo de haces vectoriales a lo largo de la identidad. Como $l_{\nu^\perp} = 0$, para todo par de vectores X, Y tangentes a M se tiene que

$$\langle S_{\nu^\perp} X, Y \rangle = l_{\nu^\perp}(X, Y) = 0,$$

por lo que $S_{\nu^\perp} = 0$. Entonces, $\bar{\nabla}_X \nu^\perp = -S_{\nu^\perp} X + \nabla_X^\perp \nu^\perp = 0$ para cualquier vector tangente X , en particular para el vector $W_\nu(X, Y)$, i.e., E cumple la ecuación de Codazzi y como $l_{\nu^\perp} = 0$, es inmediato que $l_{\nu^\perp} \bullet l_{\nu^\perp} = 0$, que es la ecuación de Gauss. Por lo tanto, existe una inmersión isométrica $h : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que el haz normal a M en \mathbb{R}^3 , NM_h , es isomorfo a E y se conserva la métrica, la conexión y el operador de la segunda forma fundamental. Sean $i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la inmersión isométrica canónica dada por $i(x) = (x, 0)$ y $g = i \circ h$. g es una inmersión isométrica. Sea μ el transporte paralelo en \mathbb{R}^4 del vector canónico $e_4 = (0, 0, 0, 1)$ a lo largo de la imagen de g . μ es un campo normal a la superficie; más aún, como $NM_g \cong NM_h \oplus E_\mu$, tenemos que $NM_g \cong E \oplus E_\mu$.

Sea $\phi : NM_f \rightarrow NM_g$ el morfismo de haces vectoriales dado por

$$\tilde{\phi}(\xi + a\nu^\perp) = \xi + a\mu.$$

$\tilde{\phi}$ es un isomorfismo de haces vectoriales sobre la identidad; más aún, $\tilde{\phi}$ conserva la métrica, pues es la identidad en E y envía al vector unitario ν^\perp en el vector unitario μ . Veamos que $\tilde{\phi}$ también conserva la segunda forma fundamental y la conexión.

Sean X un campo tangente a M y $\xi + b\nu^\perp$ una sección de NM_f , entonces

$$\nabla_{f_X}^\perp (\xi + b\nu^\perp) = \nabla_{f_X}^\perp \xi + X(b)\nu^\perp.$$

Sea ν una sección unitaria de E , entonces $\xi = \langle \xi, \nu \rangle \nu$. Como $\nabla_{f_X}^\perp \nu^\perp = 0$, también tenemos que $\nabla_{f_X}^\perp \nu = 0$, por lo que

$$\nabla_{f_X}^\perp \xi = \nabla_{f_X}^\perp (\langle \xi, \nu \rangle \nu) = \langle \nabla_{f_X}^\perp \xi, \nu \rangle \nu = \nabla'_X \xi.$$

Por lo tanto, $\tilde{\phi}(\nabla_{f_X}^\perp (\xi + b\nu^\perp)) = \nabla'_X \xi + X(b)\mu$. Nótese que como $\bar{\nabla}_X \mu = 0$, entonces también se tiene que $\nabla_{g_X}^\perp \mu = 0$, por lo que repitiendo el argumento de la parte anterior podemos probar que $\nabla_{g_X}^\perp (\xi + b\mu) = \nabla'_X \xi + X(b)\mu$, por lo que

$$\tilde{\phi}(\nabla_{f_X}^\perp (\xi + b\nu^\perp)) = \nabla'_X \xi + X(b)\mu = \nabla_{g_X}^\perp (\tilde{\phi}(\xi + b\nu^\perp)).$$

Además, si X, Y son dos campos vectoriales tangentes a M , y α_f, α_g representan los operadores de segunda forma fundamental de f y g respectivamente, tenemos que

$$\alpha_f(X, Y) = \alpha'(X, Y) + l_{\nu^\perp}(X, Y)\nu^\perp = \alpha'(X, Y),$$

por lo que

$$\tilde{\phi}(\alpha_f(X, Y)) = \alpha'(X, Y).$$

Como $l_\mu(X, Y) = -\langle \bar{\nabla}_X \mu, Y \rangle = 0$, tenemos que $\alpha_g(X, Y)$ es un campo normal a M que no tiene ninguna componente en la dirección del vector μ . Como $NM_g = NM_h \oplus E_\mu$, tenemos que $\alpha_g(X, Y)$ es un campo normal en NM_h .

Por otro lado, haciendo la identificación $T\mathbb{R}^4 = T\mathbb{R}^3 \oplus T\mathbb{R}$, es fácil ver que $i_* : T\mathbb{R}^3 \rightarrow T\mathbb{R}^4$ está dado por $i_*(v) = v + 0$, por lo que tenemos la ecuación

$$\bar{\nabla}_{g_*X} g_*Y = \bar{\nabla}_{i_*(h_*X)} i_*(h_*Y) = \bar{\nabla}_{h_*X+0} (h_*Y + 0) = \bar{\nabla}_{h_*X} h_*Y,$$

y como $\alpha_h(X, Y)$ se obtiene tomando la componente en NM_h de $\bar{\nabla}_{h_*X} h_*Y$ y $\alpha_g(X, Y)$ se obtiene tomando la componente de $\bar{\nabla}_{g_*X} g_*Y$ en NM_g , tenemos que $\alpha_h(X, Y)$ es la componente de $\alpha_g(X, Y)$ en NM_h , pero esta componente es $\alpha_g(X, Y)$, por lo que $\alpha_g = \alpha_h$.

Finalmente, de la primera parte del teorema fundamental identificamos E y NM_h por un isomorfismo de haces vectoriales tal que a $\alpha'(X, Y)$ le corresponde el campo normal $\alpha_h(X, Y)$. Por medio de esta identificación tenemos que

$$\alpha_g(X, Y) = \alpha'(X, Y).$$

Entonces $\tilde{\phi}(\alpha_f(X, Y)) = \alpha'(X, Y) = \alpha_g(X, Y)$. Por lo tanto, por la segunda parte del teorema fundamental de las subvariedades, existe un movimiento rígido τ tal que $f = \tau \circ g$. En particular, $f(M) = \tau(g(M))$, y como $g(M)$ está contenido en un hiperplano y τ es un movimiento rígido, concluimos que $f(M)$ se encuentra en un hiperplano. \square

Ejemplo 2.1. Los toros planos. Sean $v = (a, c)$, $w = (b, d)$, vectores linealmente independientes en el plano. El toro plano generado por v y w es la imagen de la inmersión $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$f(\theta, \varphi) = (e^{i(a\theta+b\varphi)}, e^{i(c\theta+d\varphi)}).$$

En particular, si $v = (1, 0)$ y $w = (0, 1)$ obtenemos el toro de Clifford. Sean $X_1 = f_*(\partial_\theta)$ y $X_2 = f_*(\partial_\varphi)$. Definamos

$$X_3 = (e^{i(a\theta+b\varphi)}, 0), \quad X_4 = (0, e^{i(c\theta+d\varphi)}).$$

X_3, X_4 es una base ortonormal del haz normal al toro. Denotemos por e_ν, f_ν, g_ν a los coeficientes de la ν -segunda forma fundamental, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} e_{X_3} &= -\langle \bar{\nabla}_{X_1} X_1, X_3 \rangle = a^2, \\ f_{X_3} &= -\langle \bar{\nabla}_{X_2} X_1, X_3 \rangle = ab, \\ g_{X_3} &= -\langle \bar{\nabla}_{X_2} X_2, X_3 \rangle = b^2. \end{aligned}$$

Similarmente tenemos que

$$e_{X_4} = c^2, \quad f_{X_4} = cd, \quad g_{X_4} = d^2.$$

Sea $\nu = AX_3 + BX_4$, un campo normal a la superficie, entonces $\nu^\perp = -BX_3 + AX_4$ es el complemento ortogonal a ν en el haz normal. Por lo tanto, $e_{\nu^\perp} = -Be_{X_3} + Ae_{X_4}$,

etc., y si se satisface la ν -ecuación de Gauss, debemos tener que $e_{\nu^\perp}g_{\nu^\perp} - f_{\nu^\perp}^2 = 0$. Realizando los cálculos resulta que

$$e_{\nu^\perp}g_{\nu^\perp} - f_{\nu^\perp}^2 = -AB(ad - bc)^2.$$

Por lo tanto, la ecuación de Gauss se satisface si y solo si $A = 0$ o $B = 0$. Como A y B son funciones continuas tales que $A^2 + B^2 = 1$, en cualquier vecindad conexa del toro los únicos campos normales que satisfacen la ecuación de Gauss son X_3 y X_4 . Finalmente, un cálculo directo muestra que $\langle \bar{\nabla}_{X_1}X_3, X_4 \rangle = \langle \bar{\nabla}_{X_2}X_3, X_4 \rangle = 0$, por lo que $W_{X_3} = 0$ y la ecuación de Codazzi se satisface trivialmente. Similarmente tenemos que $W_{X_4} = 0$. Por lo tanto, en cualquier vecindad simplemente conexa del toro existen dos inmersiones isométricas en \mathbb{R}^3 con segunda forma fundamental dada.

Ejemplo 2.2. El plano proyectivo. Sea $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la función dada en coordenadas cartesianas por

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x^2 - y^2}{2}, xy, xz, yz \right).$$

Entonces f es una función invariante bajo el mapeo antipodal, por lo que f desciende en una función $\tilde{f} : P^2\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$, donde $P^2\mathbb{R}$ es el espacio proyectivo real de dimensión 2. En [HCV32] se demuestra que \tilde{f} es un encaje del plano proyectivo en \mathbb{R}^4 . Como la esfera es un espacio cubriente del plano proyectivo, podemos parametrizar \tilde{f} utilizando la parametrización de la esfera dada en notación compleja por

$$g(\theta, \phi) = (\cos(\theta)e^{i\phi}, \sin(\theta)), \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Sea $h = f \circ g$, entonces

$$h(\theta, \phi) = \left(\frac{\cos^2(\theta)}{2}e^{2\phi i}, \frac{\sin(2\theta)}{2}e^{\phi i} \right).$$

Definamos $X_1 = h_*(\partial_\theta)$, $X_2 = h_*(\partial_\phi)$, a su vez, sean X_3 y X_4 los campos normales dados por

$$X_3 = \left(\frac{-\sin(2\theta)}{2}ie^{2\phi i}, \cos^2(\theta)ie^{\phi i} \right), \quad X_4 = \left(-\cos(2\theta)e^{2\phi i}, \frac{-\sin(2\theta)}{2}e^{\phi i} \right).$$

Sean $Y_3 = \frac{1}{|X_3|}X_3$ y $Y_4 = \frac{1}{|X_4|}X_4$. Un cálculo directo similar al del ejemplo anterior demuestra que

$$e_{Y_3} = 0, \quad f_{Y_3} = -\cos(\theta), \quad g_{Y_3} = 0.$$

Similarmente,

$$e_{Y_4} = \frac{-1}{|X_4|}, \quad f_{Y_4} = 0, \quad g_{Y_4} = \frac{-\cos^2(\theta)(1 + 3\cos(2\theta))}{2|X_4|}.$$

Si $\nu = AY_3 + BY_4$ es un campo ortonormal, entonces $\nu^\perp = -BY_3 + AY_4$, por lo que

$$e_{\nu^\perp}g_{\nu^\perp} - f_{\nu^\perp}^2 = \frac{\cos^2(\theta)(1 + 3\cos(2\theta))}{2|X_4|^2}A^2 - \cos^2(\theta)B^2.$$

Por lo tanto, la ecuación de Gauss es equivalente a

$$B^2 = \frac{1 + 3 \cos(2\theta)}{2|X_4|^2} A^2. \quad (2.5)$$

Como $|X_4|^2 = 1/4(1 + 3 \cos^2(2\theta))$ y $A^2 + B^2 = 1$, al sustituir en (2.5) tenemos que A y B están determinados por las ecuaciones

$$B^2 = \frac{1 + 3 \cos(2\theta)}{6 \cos^4(\theta)}, \quad A^2 = \frac{3 \cos^4(\theta) - 3 \cos^2(\theta) + 1}{3 \cos^4(\theta)}.$$

Sea $\omega_3^4(X) = \langle \bar{\nabla}_X Y_3, Y_4 \rangle$, un cálculo directo muestra que

$$\omega_3^4 = \frac{1}{4|X_4|} (5 \operatorname{sen}(\theta) - 3 \operatorname{sen}(3\theta)) d\varphi.$$

Por lo tanto, se tiene que $\langle \nabla_X^\perp \nu, \nu^\perp \rangle = -BX(A) + AX(B) + \omega_3^4(X)$, en particular, como A y B únicamente son funciones de θ , tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{X_2}^\perp \nu, \nu^\perp \rangle &= \omega_3^4(X_2) = \frac{1}{4|X_4|} (5 \operatorname{sen}(\theta) - 3 \operatorname{sen}(3\theta)), \\ \langle \nabla_{X_1}^\perp \nu, \nu^\perp \rangle &= -BA' + AB', \end{aligned}$$

donde A' y B' representan las derivada de A y B . Un cálculo directo muestra que los coeficientes de la primera forma fundamental en la base X_1, X_2 están dados por

$$E = \frac{5 + 3 \cos(4\theta)}{8}, \quad F = 0, \quad G = \cos^2(\theta).$$

Como $F = 0$, la matriz del ν^\perp -operador de forma en la base X_1, X_2 es

$$[S_{\nu^\perp}] = \begin{pmatrix} \frac{e_{\nu^\perp}}{E} & \frac{f_{\nu^\perp}}{G} \\ \frac{f_{\nu^\perp}}{E} & \frac{g_{\nu^\perp}}{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e_{Y_4}}{E} A & \frac{-f_{Y_3}}{G} B \\ \frac{-f_{Y_3}}{E} B & \frac{g_{Y_4}}{G} A \end{pmatrix}.$$

En la base X_1, X_2 , el vector $S_{\nu^\perp} W_\nu$ tiene coordenadas

$$[S_{\nu^\perp} W_\nu] = \begin{pmatrix} \frac{e_{Y_4}}{E} A(-\omega_3^4(X_2)) + \frac{f_{Y_3}}{G} (B^2 A' - ABB') \\ \frac{-f_{Y_3}}{E} B(-\omega_3^4(X_2)) + \frac{g_{Y_4}}{G} (-BAA' + A^2 B') \end{pmatrix}.$$

Como $A^2 + B^2 = 1$, se tiene que $AA' + BB' = 0$. Utilizando estas identidades en la expresión para $[S_{\nu^\perp} W_\nu]$ tenemos que

$$[S_{\nu^\perp} W_\nu] = \begin{pmatrix} \frac{-e_{Y_4}}{E} \omega_3^4(X_2) A + \frac{f_{Y_3}}{G} A' \\ \frac{f_{Y_3}}{E} \omega_3^4(X_2) B + \frac{g_{Y_4}}{G} B' \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, para que la ecuación de Codazzi se cumpla, se deben cumplir las ecuaciones diferenciales

$$\frac{-e_{Y_4}}{E} \omega_3^4(X_2) A + \frac{f_{Y_3}}{G} A' = 0, \quad (2.6)$$

$$\frac{f_{Y_3}}{E} \omega_3^4(X_2) B + \frac{g_{Y_4}}{G} B' = 0. \quad (2.7)$$

Sustituyendo los valores de $e_{Y_4}, \omega_3^4(X_2)$, etc., tenemos que la ecuación (2.6) es equivalente a la ecuación

$$\frac{A'}{A} = \frac{16(5\text{sen}(\theta) - 3\text{sen}(3\theta)) \cos(\theta)}{(5 + 3 \cos(4\theta))^2}. \quad (2.8)$$

Sea f el lado derecho de (2.8), entonces A debe cumplir la ecuación $A' = Af$. Además, si A cumple la ecuación de Gauss, debe ser de la forma $A = \pm\sqrt{g}$, donde $g = \frac{3 \cos^4(\theta) - 3 \cos^2(\theta) + 1}{3 \cos^4(\theta)}$, por lo que se deben cumplir las ecuaciones $A' = Af$ y $A' = \pm g'/(2A)$, de donde obtenemos la ecuación $2gf = \pm g'$. Realizando los cálculos en el programa MATHEMATICA se tiene que la ecuación $2gf = \pm g'$ sólo tiene un conjunto finito de raíces. Por lo tanto, no existe ninguna inmersión isométrica del plano proyectivo en \mathbb{R}^3 con segunda forma fundamental determinada por el encaje en \mathbb{R}^4 .

Ejemplo 2.3. La botella de Klein. Sea $g(\theta, \varphi) = ((a + r \cos(\theta))e^{i\varphi}, r\text{sen}(\theta))$, con $a > r$. g es el encaje usual del toro en \mathbb{R}^3 . Nótese que la imagen de g es invariante bajo el mapeo antipodal, $A(x) = -x$. Por lo tanto el grupo $\mathcal{G} = \{I, A\}$, donde I es la identidad, actúa de manera libre y discontinua en la imagen de g . El espacio cociente K es la botella de Klein. Por construcción el toro es un cubriente doble de la botella de Klein. Sea $T = S^1 \times S^1$, definamos el mapeo $f : T \rightarrow \mathbb{R}^4$ dado por

$$f(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) = ((a + r \cos(\theta))e^{2\varphi i}, r\text{sen}(\theta)e^{\varphi i}).$$

Como $f(e^{-i\theta}, e^{i(\varphi+n\pi)}) = f(e^{i\theta}, e^{i\varphi})$, al identificar a T con su imagen en \mathbb{R}^3 tenemos que f manda puntos antipodales del toro en la misma imagen. Por lo tanto, existe una única función diferenciable $\tilde{f} : K \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\tilde{f} \circ \rho = f$, donde $\rho : T \rightarrow K$ es la proyección usual. Decimos que f desciende en la función $\tilde{f} : K \rightarrow \mathbb{R}^4$. Se puede probar que \tilde{f} es un encaje, (ver [dC92], cap. 0). Como T es un espacio cubriente de K , podemos utilizar la parametrización usual del toro para describir \tilde{f} en términos de θ y φ , de modo que \tilde{f} está dado por

$$\tilde{f}(\theta, \varphi) = ((a + r \cos(\theta))e^{2\varphi i}, r\text{sen}(\theta)e^{\varphi i}).$$

Sean $X_1 = \tilde{f}_*(\partial_\theta)$, $X_2 = \tilde{f}_*(\partial_\varphi)$. Definamos X_3 y X_4 como los campos normales dados por

$$X_3 = (-r\text{sen}(\theta)ie^{2\varphi i}, 2(a + r \cos(\theta))ie^{\varphi i}) \quad X_4 = (-\cos(\theta)e^{2\varphi i}, -\text{sen}(\theta)e^{\varphi i}).$$

Sean $Y_3 = \frac{1}{|X_3|}X_3$, $Y_4 = X_4$, entonces Y_3, Y_4 es una base ortonormal del haz normal a K . Al calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental en la dirección de los vectores Y_3 y Y_4 de la misma manera que en los ejemplos anteriores tenemos que

$$\begin{aligned} e_{Y_3} &= 0, & f_{Y_3} &= -\frac{2r}{|X_3|}(r + a \cos(\theta)), & g_{Y_3} &= 0, \\ e_{Y_4} &= -r, & f_{Y_4} &= 0, & g_{Y_4} &= -(3r \cos^2(\theta) + 4a \cos(\theta) + r). \end{aligned}$$

Sea $\nu = AY_3 + BY_4$ un campo normal a la superficie, entonces $\nu^\perp = -BY_3 + AY_4$, además,

$$\begin{aligned} e_\nu &= e_{Y_4}B, & f_\nu &= f_{Y_3}A, & g_\nu &= g_{Y_4}B, \\ e_{\nu^\perp} &= e_{Y_4}A, & f_{\nu^\perp} &= -f_{Y_3}B, & g_{\nu^\perp} &= g_{Y_4}A. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$e_{\nu^\perp} g_{\nu^\perp} - f_{\nu^\perp}^2 = e_{Y_4} g_{Y_4} A^2 - f_{Y_3}^2 B^2.$$

Como $f_{Y_3} = 0$ en un conjunto discreto de puntos, podemos suponer que $f_{Y_3} \neq 0$. Similarmente podemos suponer que $g_{Y_4} \neq 0$. Utilizando la relación $A^2 + B^2 = 1$, tenemos que la ecuación de Gauss se satisface si y solo si

$$A^2 = \frac{f_{Y_3}^2}{e_{Y_4} g_{Y_4} + f_{Y_3}^2}, \quad B^2 = \frac{e_{Y_4} g_{Y_4}}{e_{Y_4} g_{Y_4} + f_{Y_3}^2}.$$

Además como los coeficientes $e_{Y_i}, f_{Y_i}, g_{Y_i}$ son independientes de φ , también se tiene que A y B son funciones independientes de φ , por lo tanto podemos calcular $\langle \nabla_X^\perp \nu, \nu^\perp \rangle$ como $AX(B) - BX(A) + \omega_3^4(X)$, donde $\omega_3^4(X) = \langle \nabla_X^\perp Y_3, Y_4 \rangle = 2a \operatorname{sen}(\theta) d\varphi$. Un cálculo directo muestra que $\langle X_1, X_2 \rangle = 0$. Por lo tanto, la matriz del ν^\perp -operador de forma en la base X_1, X_2 está dada por

$$[S_{\nu^\perp}] = \begin{pmatrix} \frac{e_{Y_4}}{E} A & \frac{-f_{Y_3}}{G} B \\ \frac{-f_{Y_3}}{E} B & \frac{g_{Y_4}}{G} A \end{pmatrix}.$$

Además, utilizando la expresión para $\langle \nabla_X^\perp \nu, \nu^\perp \rangle$, tenemos que

$$W_\nu = -\omega_3^4(X_2)X_1 + (AB' - A'B)X_2.$$

Análogamente al procedimiento algebraico del ejemplo 2.2 tenemos que el campo ν satisface la ecuación de Codazzi si y solo si se cumplen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{-e_{Y_4}}{E} \omega_3^4(X_2)A + \frac{f_{Y_3}}{G} A' &= 0, \\ \frac{f_{Y_3}}{E} \omega_3^4(X_2)B + \frac{g_{Y_4}}{G} B' &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si ν cumple la ecuación de Codazzi, se debe cumplir la ecuación $A' = Ah$, donde $h = \frac{e_{Y_4} G}{f_{Y_3} E} \omega_3^4(X_2)$. Además, si ν cumple la ecuación de Gauss, entonces $A = \sqrt{g}$, donde $g = \frac{f_{Y_3}^2}{e_{Y_4} g_{Y_4} + f_{Y_3}^2}$, de allí se sigue que $A' = g'/(2A)$. Combinando ambas ecuaciones obtenemos que $g' = 2gh$. Sustituyendo el valor de los coeficientes de la segunda forma fundamental y de ω_3^4 tenemos que las funciones g y h están dadas por

$$\begin{aligned} g &= \frac{4r(r + a \cos(\theta))^2}{(3r \cos^2(\theta) + 4a \cos(\theta) + r)|X_3|^2 + 4r(r + a \cos(\theta))^2}, \\ h &= \frac{a \operatorname{sen}(\theta) |X_3|^3}{r^2(r + a \cos(\theta))}. \end{aligned}$$

Donde $|X_3|^2 = 3r^2 \cos^2(\theta) + 8ar \cos(\theta) + 4a^2 + r^2$. Nótese que $g = R \circ \cos(\theta)$, donde R es una función racional. Por lo tanto, $g' = R'(\cos(\theta))(-\operatorname{sen}(\theta))$. Si $g' = 2gh$, entonces $h = R'(\cos(\theta))(-\operatorname{sen}(\theta))/(2R(\cos(\theta)))$. Por lo tanto,

$$|X_3|^3 = -\frac{r^2(r + a \cos(\theta))R'(\cos(\theta))}{2aR(\cos(\theta))}. \quad (2.9)$$

Como el cociente de dos funciones racionales es una función racional, lo mismo que la derivada, la ecuación (2.9) implica que $|X_3|^3$ es de la forma $R_1(\cos(\theta))$, donde R_1 es una función racional. Sea $p(x) = 3r^2x^2 + 8arx + 4a^2 + r^2$, entonces $|X_3|^3 = p(\cos(\theta))^{3/2} = p(\cos(\theta))p(\cos(\theta))^{1/2}$, por lo que $p(\cos(\theta))^{1/2}$ es una función racional, lo cual es una contradicción, pues el polinomio p no es cuadrado perfecto, pues tiene raíces distintas porque su discriminante es $4a^2 - 3r^2$. Por lo tanto, el encaje \tilde{f} de la botella de Klein no admite ninguna inmersión isométrica en \mathbb{R}^3 con segunda forma fundamental determinada por el haz normal en \mathbb{R}^4 .

Capítulo 3

Puntos Umbílicos

En este capítulo definiremos la noción de punto ν -umbílico para superficies inmersas en \mathbb{R}^4 , una generalización del concepto clásico de punto umbílico. Consideraremos una inmersión isométrica de una superficie en \mathbb{R}^4 y las líneas de curvatura asociadas con un campo normal a la superficie. Esta parte del trabajo tiene relación con la conjetura de Carathéodory acerca de los puntos umbílicos descrita en la sección 3.3.

3.1 Foliaciones y singularidades

Definición 3.1. Sea M^n una variedad diferenciable, y sea $F = \{f_\alpha\}$ una colección de subvariedades diferenciables de la misma dimensión k tales que se cumplen las siguientes condiciones:

- a) Para cada $x \in M$ existe una única $f_\alpha \in F$ tal que $x \in f_\alpha$.
- b) Para cada $x \in M$ existe un sistema de coordenadas (U, φ) tal que para cada α , $U \cap f_\alpha$ consta a lo mas de una componente conexa.
- c) Si $U \cap f_\alpha \neq \emptyset$, entonces

$$\varphi(U \cap f_\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n | x_{k+1} = a_{k+1}, \dots, x_n = a_n\}$$

para ciertos números reales a_{k+1}, \dots, a_n fijos.

Decimos que F es una foliación de M de rango k , además a cada subvariedad f_α le llamamos una hoja de la foliación. Al sistema de coordenadas (U, φ) le llamamos un sistema adaptado a la foliación.

También existe el concepto de foliación con singularidades.

Definición 3.2. Sea $A \subset M$ un subconjunto cerrado, entonces $M - A$ es una subvariedad diferenciable de M de la misma dimensión. Si F es una foliación de $M - A$ entonces decimos que F es una foliación de M con singularidades. A cada punto $p \in A$ le llamamos un punto singular de la foliación.

Supongamos que F es una foliación de rango 1. Asociado a la foliación tenemos un haz de líneas. Denotemos por PM el haz proyectivo de M (ver el apéndice). Se tiene la siguiente definición.

Definición 3.3. Sea F una foliación con singularidades de rango 1 sobre la variedad M tal que A es el conjunto de singularidades. El haz de direcciones asociado a la foliación es la sección $s : M - A \rightarrow PM$ tal que $s(x)$ es el subespacio de $T_x M$ generado por la hoja de F que pasa por x .

Proposición 3.1. El haz de direcciones de una foliación con singularidades es una sección diferenciable de PM .

DEMOSTRACION. Sea F una foliación con singularidades de rango 1 tal que A es el conjunto de singularidades de F . Sea $x \in M - A$, y sea (U, φ) un sistema de coordenadas adaptado a la foliación alrededor de x . Nótese que en este sistema de coordenadas ∂_n es un campo tangente a M de tal forma que para cada $p \in U$, ∂_n es tangente a la hoja que pasa por p . Sea $\pi : TM - \{0\} \rightarrow PM$ la proyección natural descrita en el apéndice. Entonces para cada y en U tenemos que $s(y) = \pi(\partial_n|_y)$. Por lo tanto, como s es composición de dos funciones diferenciables en U , debe ser una función diferenciable. Como x es un punto arbitrario de $M - A$, s es diferenciable en todo $M - A$. \square

Si introducimos una métrica Riemanniana en M podemos construir el haz de esferas SM tal como se menciona en el apéndice, de tal forma que la proyección natural, $\rho : SM \rightarrow PM$ es un morfismo de haces fibrados. A partir de ahora supondremos que F es una foliación con singularidades de rango 1 de una superficie M orientable, orientada y con una métrica Riemanniana. Sea $\gamma : [0, 1] \rightarrow M - A$ una curva cerrada simple y sea V un vector unitario en $\gamma(0)$ tal que V es tangente a la hoja de F que pasa por $\gamma(0)$.

Proposición 3.2. Existe una única extensión continua $V(t)$ de V tal que para cada t , $V(t)$ es un vector unitario tangente a la única hoja de la foliación que pasa por $c(t)$.

DEMOSTRACION. Sea s el haz de direcciones de la foliación. Denotemos por τ a la composición $s \circ \gamma$. Entonces τ es un camino en PM tal que $\tau(0)$ es el subespacio de TM generado por V . Como SM es un espacio cubriente de PM , y $\rho(V) = \tau(0)$, existe un único levantamiento continuo $\tilde{\tau} : [0, 1] \rightarrow SM$ tal que $\tilde{\tau}(0) = V$ y $\rho(\tilde{\tau}(t)) = \tau(t)$ para cada t . Es inmediato ver que $\tilde{\tau}$ es la extensión buscada. \square

Proposición 3.3. Si c_s es una homotopía libre de c tal que $p \notin c_s$ para cada s , y $V \in T_{c(0)}S$ es un vector unitario tangente a la hoja de F que pasa por p , entonces existe una única extensión continua $V_s(t)$ de V tal que $V_s(t)$ es un vector unitario tangente a la única hoja de la foliación que pasa por $c_s(t)$.

DEMOSTRACION. La prueba es análoga a la de la proposición 3.2. \square

Sean p un punto singular aislado de M y (U, φ) un sistema de coordenadas alrededor de p , compatible con la orientación y tal que $\varphi(U) = \mathbb{R}^2$ y p es la única singularidad de F en U . Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\varphi(p) = 0$. Sea $c(t) = (\cos 2\pi t, \sin 2\pi t)$, entonces la restricción de $\gamma = \varphi^{-1} \circ c$ al intervalo $[0, 1]$ es una curva cerrada simple en $M - A$. Tomemos V como en la hipótesis de la proposición 3.2. Entonces V se extiende a lo largo de la curva γ . Sea $W = \frac{\varphi_* V}{|\varphi_* V|}$, donde $|\cdot|$ es la norma Euclidiana usual, entonces W es una función de $[0, 1]$ a S^1 . Sea $p : \mathbb{R} \rightarrow S^1$ el mapeo

cubriente de S^1 dado en notación compleja por $p(x) = e^{ix}$. Entonces, si $p(r) = W(0)$, existe un único levantamiento θ_r de W tal que $\theta_r(0) = r$. θ_r es el ángulo que W realiza mientras gira alrededor de 0.

Proposición 3.4. *La diferencia $\theta_r(1) - \theta_r(0)$ es independiente del valor de r en la preimagen de $W(0)$.*

DEMOSTRACION. Sea $s \in p^{-1}(W(0))$, entonces utilizando notación compleja un cálculo directo muestra que $\theta_s = \theta_r + s - r$. Por lo tanto, $\theta_s(1) - \theta_s(0) = \theta_r(1) - \theta_r(0)$. \square

Definición 3.4. *Sea $\Theta(U, \varphi) = \theta_r(1) - \theta_r(0)$, $\Theta(U, \varphi)$ es el ángulo total que realiza el campo de direcciones de la foliación alrededor de p en la parametrización (U, φ) .*

Nótese que en la construcción de la función W también se puede tomar el vector $-V \in T_{\gamma(0)}M$, sin embargo por la unicidad de la extensión es inmediato que $-V(t)$ es la extensión del vector V dada en la proposición 3.2, por lo que $\frac{\varphi_*(-V)}{|\varphi_*(-V)|} = -W$. Como el levantamiento de $-W$ es $\theta_r + \pi$, el valor de $\Theta(U, \varphi)$ es el mismo independientemente de cual de los dos vectores tomamos. Obsérvese que en la construcción de $\Theta(U, \varphi)$ pudimos utilizar cualquier otra curva cerrada simple en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ en lugar de c , siempre y cuando la orientemos positivamente.

Lema 3.1. *Sea $C : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 - \{0\}$ una curva cerrada simple homotópica a c en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Entonces $\Theta_C(U, \varphi) = \Theta(U, \varphi)$, donde $\Theta_C(U, \varphi)$ es el ángulo total que realiza el campo de direcciones de la foliación a lo largo de C .*

DEMOSTRACION. Sea c_s una homotopía entre c y C , tal que $c_0 = c$ y $c_1 = C$, entonces $\gamma_s = \varphi^{-1} \circ c_s$ es una homotopía en $M - A$. Por la proposición 3.3, dado el vector $V \in T_{\gamma_0(0)}M$ tangente a la foliación, existe una única extensión $V_s(t)$ definida a lo largo de toda la homotopía, por lo que $W_s = \frac{\varphi_*(V_s)}{|\varphi_*(V_s)|}$ es una homotopía en S^1 . Por lo tanto, dado r tal que $p(r) = W_0(0)$, existe un único levantamiento de W_s en una homotopía θ_s tal que $\theta_0(0) = r$. Nótese que $W_s(1) = \pm W_s(0)$, pues los vectores $V_s(1)$ y $V_s(0)$ son colineales, por lo que para cada s , $\theta_s(1) - \theta_s(0)$ es un múltiplo de π . Por lo tanto, $\frac{1}{\pi}(\theta_s(1) - \theta_s(0))$ es una función continua de $[0, 1]$ en \mathbb{Z} . Como $[0, 1]$ es conexo y \mathbb{Z} tiene la topología discreta, $\frac{1}{\pi}(\theta_s(1) - \theta_s(0))$ debe ser constante, en particular,

$$\Theta_C(U, \varphi) = \theta_1(1) - \theta_1(0) = \theta_0(1) - \theta_0(0) = \Theta(U, \varphi).$$

\square

Lema 3.2. *Sea $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal que preserva la orientación, entonces existe una homotopía A_t entre A y la transformación identidad tal que para cada t , A_t es un isomorfismo que preserva la orientación.*

DEMOSTRACION. Realizaremos una inducción sobre la dimensión del espacio.

Caso $n = 1$. Como A preserva la orientación, su representación en la base usual es $A = [a]$, con $a > 0$. Sea $A_t = [ta + (1 - t)]$. Es inmediato ver que A_t es la homotopía deseada.

Caso $n = 2$. Supongamos que A tiene un valor propio real λ . Sea V un vector unitario tal que $AV = \lambda V$, y sea W el único vector unitario ortnormal a V tal que $\{V, W\}$ es una base positivamente orientada de \mathbb{R}^2 . Mantengamos esta base fija. En esta base la representación de la transformación lineal A está dada por la matriz

$$B = \begin{pmatrix} \lambda & c \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Sea B_t la homotopía de transformaciones lineales cuya representación en la base dada es $\begin{pmatrix} \lambda & tc \\ 0 & d \end{pmatrix}$, entonces A es homotópica a la transformación cuya matriz es $B_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$. Como $\lambda d = \det A$ y A preserva la orientación, el producto debe ser positivo. Supongamos que λ y d son ambos positivos, entonces

$$C_t = \begin{pmatrix} (1-t)\lambda + t & 0 \\ 0 & (1-t)d + t \end{pmatrix}$$

es una homotopía entre B_1 y la transformación identidad. Nótese que para cada t fijo, tanto B_t como C_t son isomorfismos que preservan la orientación, por lo que la homotopía que buscamos se obtiene uniendo B_t con C_t , (véase por ejemplo [Gui74], página 37).

Supongamos ahora que λ y d son negativos, entonces de manera similar al caso con λ y d positivos podemos construir una homotopía que denotamos B_t entre A y la transformación $-I$ de tal forma que B_t es un isomorfismo que preserva la orientación para cada t . Definamos

$$C_t = \begin{pmatrix} \cos((1-t)\pi) & \operatorname{sen}((1-t)\pi) \\ -\operatorname{sen}((1-t)\pi) & \cos((1-t)\pi) \end{pmatrix}.$$

C_t es una homotopía entre $-I$ y la transformación identidad que satisface las condiciones del lema. Por lo tanto la transformación buscada se obtiene a partir de B_t y C_t .

Supongamos que A no tiene ningún valor propio real. Sea $A_t = tI + (1-t)A$. Fijemos $t \neq 1$, entonces si $A_t V = 0$, tenemos que $AV = \frac{t}{1-t}V$, y como A no tiene ningún valor propio real, necesariamente $V = 0$, i.e. A_t es un isomorfismo para cada $t \neq 1$. Como $A_1 = I$, A_t es un isomorfismo para toda t . Finalmente, nótese que $\det A_t$ es una función continua de t tal que $\det A_t \neq 0$ para toda t . Como $t \in [0, 1]$ y $\det A_0 = 1$, concluimos que $\det A_t > 0$ para toda t . Por lo tanto, A_t es la homotopía buscada.

Utilizaremos los casos probados para concluir el lema. Supondremos por inducción que para cierto k se cumple que todo operador lineal definido en un espacio vectorial de dimensión menor que preserva la orientación es homotópico a la identidad de tal forma que cada función A_t de la homotopía es un isomorfismo que preserva la orientación. Nótese que podemos extender trivialmente A en una transformación lineal $A : \mathbb{C}^k \rightarrow \mathbb{C}^k$ definiendo $A(V + Wi) = AV + AWi$. Como el polinomio característico de A siempre tiene una raíz compleja, existe un número $\lambda \in \mathbb{C}$ y un vector no nulo $V \in \mathbb{C}^k$ tales que $AV = \lambda V$.

Sean $\lambda = a + bi$ y $V = X + Yi$, con $X, Y \in \mathbb{R}^k$, entonces $\lambda V = AX + AYi$. Si desarrollamos el producto λV tenemos que

$$AX + AYi = (aX - bY) + (aY + bX)i,$$

es decir que

$$\begin{aligned} AX &= aX - bY, \\ AY &= bX + aY. \end{aligned}$$

Es decir que A envía el espacio generado por $\{X, Y\}$ en sí mismo. Por lo tanto, dado el isomorfismo A existe un subespacio V de \mathbb{R}^k de dimensión uno o dos tal que $A(V) = V$. Sea W el complemento ortogonal de V en \mathbb{R}^k . Entonces $\mathbb{R}^k = V \oplus W$. Tomemos una base orientada de \mathbb{R}^k formada por una base orientada de V y una base orientada de W en ese orden. Entonces la matriz de A en esta base tiene la siguiente forma por bloques,

$$\begin{pmatrix} B & C \\ 0 & D \end{pmatrix}.$$

Definamos

$$f_t = \begin{pmatrix} B & (1-t)C \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

entonces f_t es una homotopía entre A y la transformación lineal G tal que, si $x = v + w$, con $v \in V$ y $w \in W$, entonces $G(x) = Bv + Dw$. Nótese que f_t preserva la orientación pues $\det f_t = \det B \det D = \det A$. Como $\det A = \det B \det D$, tenemos que tanto B como D deben preservar o invertir la orientación de sus respectivos espacios. Supongamos que tanto B como D preservan la orientación, por hipótesis de inducción existen homotopías B'_t y D'_t por medio de isomorfismos que preservan la orientación y tales que $B'_0 = B$, $D'_0 = D$ y $B'_1 = Id$, $D'_1 = Id$, donde Id representa la identidad en los respectivos espacios. Sea

$$g_t = \begin{pmatrix} B'_t & 0 \\ 0 & D'_t \end{pmatrix},$$

entonces a partir de f_t y g_t podemos construir la homotopía buscada. Finalmente supongamos que tanto B como D invierten la orientación de sus espacios. Sean $\rho = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$ y $\tau = \text{diag}(-1, 1, \dots, 1)$, donde ρ está definido en V y τ en W . Tanto ρ como τ invierten la orientación, además de que tanto ρ como τ son su propio inverso. Entonces ρB y τD son isomorfismos que conservan la orientación, por lo que existen homotopías B'_t y D'_t de B y D respectivamente tales que cumplen las condiciones del teorema. Sea

$$g_t = \begin{pmatrix} \rho^{-1} B'_t & 0 \\ 0 & \tau^{-1} D'_t \end{pmatrix},$$

entonces g_t es una homotopía entre f_1 y el isomorfismo $M = \begin{pmatrix} \rho^{-1} & 0 \\ 0 & \tau^{-1} \end{pmatrix}$, pero como $\rho^{-1} = \rho$ lo mismo que $\tau^{-1} = \tau$, la matriz M es una matriz diagonal con exactamente dos unos. Sean $i < j$ las posiciones de estos dos unos dentro de la diagonal, y sea M_t la matriz tal que el elemento $(M_t)_{ii} = \cos((1-t)\pi)$, así mismo, $(M_t)_{jj} = \cos((1-t)\pi)$,

$(M_t)_{ij} = \text{sen}((1-t)\pi)$, $(M_t)_{ji} = -\text{sen}((1-t)\pi)$, todos los demás elementos de la diagonal principal son iguales a 1 y todos los demás elementos que estén fuera de la diagonal son iguales a 0. M_t es una homotopía entre M y la identidad tal que cada M_t es un isomorfismo que preserva la orientación. Por lo tanto la homotopía buscada se obtiene de f_t , g_t y M_t . \square

Lema 3.3. *Sea $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ un encaje diferenciable de una vecindad U convexa del origen tal que $f(0) = 0$ y tal que f preserva la orientación. Entonces existe una homotopía $f_t : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ entre la inclusión $i : U \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ y f tal que para cada t , f_t es un encaje diferenciable con $f_t(0) = 0$.*

DEMOSTRACION. Denotemos por f^1, \dots, f^n las funciones componentes de f . Como U es un conjunto convexo, podemos utilizar el teorema fundamental del cálculo para escribir

$$f^i(x) = \int_0^1 \frac{d}{dt} f^i(tx) dt.$$

Por la regla de la cadena tenemos que

$$f^i(x) = x^j \int_0^1 \partial_j f^i(tx) dt.$$

Sean $g^i_j(x) = \int_0^1 \partial_j f^i(tx) dt$ y $g_j(x) = (g^1_j(x), \dots, g^n_j(x))$. Entonces g_1, \dots, g_n son n funciones diferenciables de U en \mathbb{R}^n tales que $f(x) = x^i g_i(x)$. Sea

$F : U \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $F(x, t) = x^i g_i(tx)$. F es una homotopía tal que $F(x, 1) = f(x)$ y $F(x, 0) = x^i g_i(0)$. Nótese que para $t \neq 0$, $F(x, t) = \frac{f(tx)}{t}$, por lo tanto para cada $t \neq 0$ es claro que $F(x, t)$ es un encaje. Además, para cada x fijo tenemos que

$$F(x, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(tx)}{t} = df_0(x),$$

donde df es la derivada de la función f evaluada en el origen. Como df_0 es una transformación lineal que preserva la orientación el lema 3.2 nos garantiza la existencia de una homotopía $G : \mathbb{R}^n \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ entre la función identidad y df_0 con las propiedades requeridas. Por lo tanto la homotopía buscada se obtiene de F y la restricción de G a U . \square

Teorema 3.1. *Si (U', ψ) es otro sistema de coordenadas alrededor de p con las mismas propiedades que (U, φ) , entonces $\Theta(U, \varphi) = \Theta(U', \psi)$. Por lo tanto, el ángulo total que realiza el campo de direcciones de la foliación alrededor de p es independiente del sistema de coordenadas elegido.*

DEMOSTRACION. Sea $P \subset U \cap U'$ una vecindad de p tal que $\varphi(P)$ es un disco de radio 2ε alrededor de 0. Sea f la restricción de $\psi \circ \varphi^{-1}$ a P . Entonces f es un encaje que preserva la orientación entre P y $f(P)$. Por el lema 3.3 existe una homotopía f_s de encajes diferenciables entre f y la inclusión tal que $f_s(0) = 0$ para cada t . Sea $c(t) = \varepsilon(\cos(2\pi t), \text{sen}(2\pi t))$, entonces podemos calcular $\Theta(U, \varphi)$ utilizando la curva c . Nótese que también podemos calcular $\Theta(U', \psi)$ utilizando la misma curva. Sea

$C = f \circ c$, entonces la homotopía f_s induce una homotopía entre C y c dada por $c_s = f_s \circ c$, más aún, como $c(t)$ nunca es cero, c_s es una homotopía en $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. Por el lema 3.1 podemos calcular $\Theta(U', \psi)$ utilizando la curva C . Sea $V(t)$ la extensión del vector unitario V tangente a la foliación en $\varphi^{-1}(c(0))$ a lo largo de la curva $\varphi^{-1} \circ c$. Nótese que $\psi^{-1} \circ C = \varphi^{-1} \circ c$, por lo que $V(t)$ también es la extensión de V a lo largo de $\psi^{-1} \circ C$. Sea W_s la homotopía de caminos en S^1 dada por

$$W_s(t) = \frac{f_{s*}\varphi_*V(t)}{|f_{s*}\varphi_*V(t)|}.$$

Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $f_1 = Id$ y $f_0 = f$, entonces $W_1(t) = \frac{\varphi_*V(t)}{|\varphi_*V(t)|}$ y $W_0(t) = \frac{f_*\varphi_*V(t)}{|f_*\varphi_*V(t)|} = \frac{\psi_*V(t)}{|\psi_*V(t)|}$. Como W_s es una homotopía, existe un levantamiento de W_s en una homotopía \tilde{W}_s en \mathbb{R} . Nótese que

$$\tilde{W}_1(1) - \tilde{W}_1(0) = \Theta(U, \varphi) \quad y \quad \tilde{W}_0(1) - \tilde{W}_0(0) = \Theta(U', \psi).$$

Como la función $\frac{1}{\pi}(\tilde{W}_s(1) - \tilde{W}_s(0))$ es una función continua de $[0, 1]$ a los enteros, debe ser constante. Por lo tanto, $\Theta(U, \varphi) = \Theta(U', \psi)$. \square

Aunque utilizamos una métrica Riemanniana para calcular en ángulo total que recorre la foliación al dar una vuelta alrededor de la singularidad, la definición de Θ es en realidad independiente de la métrica, como se demuestra en la siguiente proposición.

Proposición 3.5. *Θ es independiente de la métrica Riemanniana en M .*

DEMOSTRACION. Denotemos por g la métrica Riemanniana dada en M . Sea f otra métrica Riemanniana. Dada una parametrización (U, φ) alrededor del punto singular y la curva $c(t) = (\cos(2\pi t), \sin(2\pi t))$, sea V un vector unitario en la métrica g tangente a la foliación en $\varphi^{-1}(c(0))$. Sea $V(t)$ la extensión a lo largo de $\varphi^{-1} \circ c$ de V dada en la proposición 3.2 con la métrica g . Nótese que $W = \frac{1}{\sqrt{f(V,V)}}V$ es un vector unitario en la métrica f tangente a la foliación y que $W(t) = \frac{1}{\sqrt{f(V(t),V(t))}}V(t)$ es la única extensión continua de W dada en la proposición 3.2. Como

$$\frac{\varphi_*V(t)}{|\varphi_*V(t)|} = \frac{\varphi_*W(t)}{|\varphi_*W(t)|},$$

la construcción del ángulo total Θ es independiente de la métrica utilizada. \square

Nótese que los vectores $V(0)$ y $V(1)$ en la construcción de Θ son colineales, de modo que $\theta(0) = \pm\theta(1)$, por lo que $\Theta = 2\pi j$, donde $j = \frac{n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Definición 3.5. *El semientero j es el índice de la foliación alrededor del punto singular p .*

En la figura se dan algunos ejemplos de los índices de algunas foliaciones. Obsérvese que si la foliación F es generada por un campo vectorial alrededor del punto p , el índice debe ser un número entero, pues en ese caso $V(0) = V(1)$, por lo que $\theta(0) = \theta(1)$, lo cual implica $\Theta = 2\pi n$ con n entero. Si la foliación es inducida por un campo vectorial, entonces el índice que hemos definido coincide con la definición del índice de Poincaré-Hopf para campos vectoriales, (Véase por ejemplo [Mil65] capítulo 6).

3.2 El teorema de Poincaré

En analogía con el índice de Poincaré-Hopf para campos vectoriales, tenemos un resultado que relaciona la suma de los índices en una superficie con la curvatura total. Antes de dar la prueba del teorema, será necesario dar algunas definiciones y probar algunos lemas. Recuérdese que por superficie cerrada se entiende una 2 variedad compacta y sin frontera.

Definición 3.6. Sea $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una curva cerrada simple diferenciable a trozos y tal que en cada segmento que sea diferenciable, la velocidad de γ es unitaria. Decimos que γ es un polígono curvado en el plano.

Definición 3.7. Sea M una superficie Riemanniana, una curva $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ de velocidad unitaria es llamada un polígono en M si γ es la frontera de un conjunto abierto Ω con cerradura compacta y si además existe un sistema de coordenadas que contiene a γ y Ω tal que la imagen de γ es un polígono curvado en el plano.

Definición 3.8. Sea M una superficie cerrada, una triangulación de M es una colección finita de triángulos en M (es decir polígonos en M cuya imagen bajo algún sistema de coordenadas es un triángulo) tal que la unión de las regiones cerradas $\bar{\Omega}$ acotadas por los triángulos es M y tal que la intersección de cualquier par que no sea vacía es un vértice común de la pareja o un lado en común.

El siguiente teorema fue demostrado por Radó en 1925. Para una prueba véase por ejemplo [AS60] capítulo I.

Teorema 3.2. Toda superficie cerrada orientable posee una triangulación.

Sea C una curva cerrada simple, diferenciable a trozos y tal que C es la frontera de un conjunto abierto Ω con cerradura compacta. Orientemos a C como la frontera de Ω . Sea $\{U, U^\perp\}$ una pareja de campos ortonormales que forman una base orientada del haz tangente en una vecindad de $\bar{\Omega}$. Sea Z un campo unitario tangente a la superficie a lo largo de C tal que Z sea diferenciable a trozos en los mismos intervalos que C . Parametremos C por longitud de arco, y definamos ω , utilizando notación compleja por simplicidad, como $\langle U, Z \rangle + \langle U^\perp, Z \rangle i$. Salvo un múltiplo de 2π , existe una única función $\theta : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$, diferenciable a trozos si tanto C como los vectores dados lo son, donde L es la longitud de la curva, tal que

$$\omega(t) = \cos \theta(t) + \operatorname{sen} \theta(t) i. \quad (3.1)$$

Decimos que θ es el ángulo que forma U con Z y en caso que no sea claro a que vectores se refiere θ , también la denotaremos por $\theta[U, Z]$. Nótese que por definición de ω , la ecuación (3.1) implica que

$$Z = (\cos \theta)U + (\operatorname{sen} \theta)U^\perp. \quad (3.2)$$

Proposición 3.6. Si $\{V, V^\perp\}$ es otra pareja de campos ortonormales definidos en la misma vecindad que $\{U, U^\perp\}$ y con la misma orientación, entonces módulo 2π se verifica la fórmula

$$\theta[V, Z] = \theta[V, U] + \theta[U, Z],$$

más aún, también tenemos que $\theta[U, V] = -\theta[V, U]$.

DEMOSTRACION. Sean $\alpha = \theta[V, U]$, $\beta = \theta[U, Z]$, por la ecuación (3.2) tenemos la siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned} Z &= (\cos \beta)U + (\operatorname{sen}\beta)U^\perp, \\ U &= (\cos \alpha)V + (\operatorname{sen}\alpha)V^\perp, \end{aligned}$$

además, es inmediato que $U^\perp = -(\operatorname{sen}\alpha)V + (\cos \alpha)V^\perp$. Sustituyendo en la primera ecuación tenemos que

$$\begin{aligned} Z &= (\cos \beta \cos \alpha - \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\alpha)V + (\operatorname{sen}\beta \cos \alpha + \cos \beta \operatorname{sen}\alpha)V^\perp \\ &= \cos(\alpha + \beta)V + \operatorname{sen}(\alpha + \beta)V^\perp. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\alpha + \beta = \theta[V, Z]$.

Finalmente, por la primera parte tenemos que $\theta[U, V] + \theta[V, U] = \theta[U, U]$, pero como trivialmente $U = \cos(0)U + \operatorname{sen}(0)U^\perp$, tenemos que $\theta[U, U] = 0$, de donde se sigue el resultado. \square

Dado el ángulo $\theta[U, Z]$, definamos el ángulo total recorrido por el campo Z como la función $\delta_C[U, Z] = \theta[U, Z](1) - \theta[U, Z](0)$.

Teorema 3.3. *Si el campo Z es paralelo, se cumple la siguiente ecuación.*

$$\delta_C[U, Z] = \int_\Omega K dA,$$

donde K es la curvatura Gaussiana. En particular, la curvatura Gaussiana de una superficie determina la desviación del transporte paralelo a lo largo de ella.

DEMOSTRACION. Por simplicidad, denotemos $\theta[U, Z]$ como θ . Entonces $Z = (\cos \theta)U + (\operatorname{sen}\theta)U^\perp$. Como ya se ha mencionado, la función θ es derivable a trozos en los mismos intervalos que la curva C lo es. Por lo tanto, podemos tomar la derivada covariante de Z a lo largo de dichos intervalos, de manera que obtenemos que

$$0 = -(\operatorname{sen}\theta)\frac{d\theta}{dt}U + (\cos \theta)\frac{d\theta}{dt}U^\perp + \cos \theta D_t U + \operatorname{sen}\theta D_t U^\perp, \quad (3.3)$$

donde D_t es la derivada covariante. Como el campo U se encuentra definido en toda una vecindad de la curva, tenemos que $D_t U = \nabla_{\dot{C}} U$, similarmente para U^\perp . Además, como ∇ es la conexión de Levi-Civita y U es un campo unitario, tenemos que

$$\nabla_{\dot{C}} U = \omega(\dot{C})U^\perp,$$

donde ω es la forma de conexión definida por $\omega(V) = \langle \nabla_V U, U^\perp \rangle$. Así mismo, como $\langle U, U^\perp \rangle = 0$ y el campo U^\perp también es unitario, tenemos que

$$\nabla_{\dot{C}} U^\perp = -\omega(\dot{C})U.$$

Sustituyendo en (3.3) obtenemos

$$\operatorname{sen}\theta\left(-\frac{d\theta}{dt} - \omega(\dot{C})\right)U + \operatorname{cos}\theta\left(\frac{d\theta}{dt} + \omega(\dot{C})\right)U^\perp = 0.$$

Por lo tanto, $\frac{d\theta}{dt} = -\omega(\dot{C})$ siempre que C sea diferenciable. Utilizando el teorema fundamental del cálculo en cada subintervalo en el que θ sea derivable, tenemos que

$$\theta(a_{i+1}) - \theta(a_i) = \int_{a_i}^{a_{i+1}} \frac{d\theta}{dt} dt.$$

Sumando sobre todos los subintervalos obtenemos una suma telescópica en la izquierda y la integral de $\frac{d\theta}{dt}$ a lo largo de toda la curva en la derecha, por lo tanto,

$$\delta_C[U, Z] = \theta(L) - \theta(0) = \int_0^L \frac{d\theta}{dt} dt,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \delta_C[U, Z] &= - \int_0^L \omega(\dot{C}) dt \\ &= - \int_C \omega. \end{aligned}$$

Como C es la frontera de Ω , por el teorema de Stokes tenemos que

$$\delta_C[U, Z] = - \int_\Omega d\omega,$$

y por las ecuaciones de estructura de Cartan sabemos que $d\omega = \eta$, donde η es la forma de curvatura definida por $R(X, Y, U, U^\perp) = \eta(X, Y)$, en particular, en la base ortonormal $\{U, U^\perp\}$ tenemos que $\eta(U, U^\perp) = -K$. Como la base es ortonormal y orientada, concluimos que $\eta = -K dA$, de donde se obtiene el resultado. \square

Lema 3.4. *Sea $f_s : [0, 1] \rightarrow S^1$ una homotopía de caminos, tal que para cada s , $f_s(0) = \pm f_s(1)$. Denotemos por $\tilde{f}_s : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ un levantamiento arbitrario de f_s a \mathbb{R} . Entonces la diferencia $\tilde{f}_s(1) - \tilde{f}_s(0)$ es constante.*

DEMOSTRACION. Como $f_s(0) = \pm f_s(1)$, tenemos que $\tilde{f}_s(1) - \tilde{f}_s(0) = n\pi$, con n un número entero. Por lo tanto la función $\frac{1}{\pi}(\tilde{f}_s(1) - \tilde{f}_s(0))$, es una función continua de $[0, 1]$ hacia los enteros. Como $[0, 1]$ es conexo y los enteros tienen la topología discreta, la diferencia debe ser constante. \square

Lema 3.5. *Sea (U, φ) un sistema de coordenadas orientado alrededor de p , tal que p es el único punto singular en U . Sea X un campo vectorial unitario definido en U . Denotemos por Y al complemento ortogonal de X con la métrica de M tal que $\{X, Y\}$ es una base ortonormal orientada definida en U . Sea $V : [0, 1] \rightarrow TU$ un campo unitario tangente a la foliación alrededor de la curva cerrada simple C . Sea*

$$\omega = \langle X, V \rangle + \langle Y, V \rangle i,$$

y sea $\theta[X, V]$ el ángulo que forma V con el vector X , entonces $\Theta = \delta_C[X, V]$.

DEMOSTRACION. Denotemos por g a la métrica Riemanniana dada en M y por h a la métrica inducida por el sistema de coordenadas φ . Sea $h_s = (1-s)g + sh$. h_s es una métrica Riemanniana en U para cada $s \in [0, 1]$. Denotemos por $|\cdot|_s$ a la norma inducida por h_s . Sean

$$\begin{aligned} X_s &= \frac{X}{|X|_s}, \\ Y_s &= \frac{Y - h_s(X_s, Y)X_s}{\Delta_s}, \end{aligned}$$

donde $\Delta_s = |Y - h_s(X_s, Y)X_s|_s$. Por el proceso de Gram-Schmidt, $\{X_s, Y_s\}$ es una base ortonormal en U para la métrica h_s . Más aún, un cálculo directo muestra que $\{X_s, Y_s\}$ es una base orientada. Definamos

$$\omega_s = \frac{h_s(X_s, V) + h_s(Y_s, V)i}{|V|_s}.$$

ω_s es una homotopía entre ω y ω_1 en S^1 , tal que para cada s ,

$$\omega_s(0) = \frac{h_s(X_s, V(0)) + (Y_s, V(0))i}{|V(0)|_s} = \frac{h_s(X_s, \pm V(1)) + (Y_s, \pm V(1))i}{|V(1)|_s} = \pm \omega_s(1).$$

Por el lema 3.4, para cualquier levantamiento $\tilde{\omega}_s$ de ω_s tenemos que $\tilde{\omega}_1(1) - \tilde{\omega}_1(0) = \tilde{\omega}_0(1) - \tilde{\omega}_0(0)$, donde $\tilde{\omega}_0 = \theta[X, V]$.

Veamos que $\tilde{\omega}_1(1) - \tilde{\omega}_1(0)$ es igual al ángulo total Θ . Como h_1 es la métrica inducida en U por φ , se tiene que φ es una isometría con esta métrica, por lo que si denotamos por e a la métrica Euclidiana, obtenemos que

$$\begin{aligned} \omega_1 &= \frac{h(X_1, V) + h(Y_1, V)i}{|V|} \\ &= \frac{e(\varphi_* X_1, \varphi_* V) + e(\varphi_* Y_1, \varphi_* V)i}{|\varphi_* V|}. \end{aligned}$$

Denotemos por X' a $\varphi_* X_1$, por Y' a $\varphi_* Y_1$ y por V' a $\frac{\varphi_* V}{|\varphi_* V|}$. También denotemos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a la métrica Euclidiana, de modo que $\omega_1 = \langle X', V' \rangle + \langle Y', V' \rangle i$. Sea $\alpha = \langle X', e_1 \rangle - \langle Y', e_1 \rangle i$, donde $\{e_1, e_2\}$ es la base usual de \mathbb{R}^2 . Entonces al calcular el producto $\alpha \omega_1$ obtenemos que

$$\begin{aligned} \alpha \omega_1 &= (\langle X', e_1 \rangle - \langle Y', e_1 \rangle i)(\langle X', V' \rangle + \langle Y', V' \rangle i) \\ &= \langle \langle X', e_1 \rangle X' + \langle Y', e_1 \rangle Y', V' \rangle + (\langle X', e_1 \rangle \langle Y', V' \rangle - \langle Y', e_1 \rangle \langle X', V' \rangle) i \\ &= \langle e_1, V' \rangle + (-\langle Y', e_1 \rangle \langle X', V' \rangle + \langle X', e_1 \rangle \langle Y', V' \rangle) i. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Nótese que como $\{X, Y\}$ es una base ortonormal, $e_1 = \langle X', e_1 \rangle X' + \langle Y', e_1 \rangle Y'$, a su vez, como e_2 es el único vector unitario normal a e_1 tal que $\{e_1, e_2\}$ es una base ortonormal con la misma orientación que $\{X', Y'\}$, es inmediato que $e_2 = -\langle Y', e_1 \rangle X' + \langle X', e_1 \rangle Y'$. Por lo tanto, la ecuación (3.4) se convierte en $\alpha \omega_1 = \langle e_1, V' \rangle + \langle e_2, V' \rangle i = V'$. Como

sólo nos interesa el valor de α a lo largo de la curva en la que calculamos Θ , podemos suponer que α es una función de $[0, 1]$ en S^1 . Sean $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\omega}$ levantamientos de α y ω_1 respectivamente. Nótese que

$$p(\tilde{\alpha} + \tilde{\omega}) = e^{i(\tilde{\alpha} + \tilde{\omega})} = e^{i\tilde{\alpha}}e^{i\tilde{\omega}} = \alpha\omega_1 = V'.$$

Por lo tanto $\tilde{\alpha} + \tilde{\omega}$ es un levantamiento de V' . Por definición de Θ tenemos que

$$\Theta = \tilde{\alpha}(1) + \tilde{\omega}(1) - (\tilde{\alpha}(0) + \tilde{\omega}(0)) = \tilde{\omega}(1) - \tilde{\omega}(0) + \tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0).$$

Solamente nos interesa calcular el valor de α a lo largo de la curva $\varphi \circ C$, además α es una función definida en todo \mathbb{R}^2 . Sea $c = \varphi \circ C$, como \mathbb{R}^2 es simplemente conexo existe una homotopía de lazos c_s entre c y una curva constante. Como α está definido en todo el plano podemos definir $\alpha_s = \alpha \circ c_s$. Por lo tanto, dado el levantamiento $\tilde{\alpha}$ de α a \mathbb{R} , existe un único levantamiento $\tilde{\alpha}_s$ de α_s tal que $\tilde{\alpha}_0 = \tilde{\alpha}$, además, como cada c_s es un lazo, tenemos que para cada s , $c_s(0) = c_s(1)$. Por lo tanto para cada s se cumple que $\alpha_s(0) = \alpha_s(1)$. Por el lema 3.4 la diferencia $\tilde{\alpha}_s(1) - \tilde{\alpha}_s(0)$ es constante, y como α_1 es constante, cualquier levantamiento de α_1 también debe serlo, en particular,

$$\tilde{\alpha}(1) - \tilde{\alpha}(0) = \tilde{\alpha}_0(1) - \tilde{\alpha}_0(0) = \tilde{\alpha}_1(1) - \tilde{\alpha}_1(0) = 0.$$

Por lo tanto, $\Theta = \tilde{\omega}(1) - \tilde{\omega}(0)$, que es lo que se quería probar. \square

Teorema 3.4. *Sea S una superficie cerrada orientable de género g en la que se ha definido una métrica Riemanniana. Supongamos que F es un campo de líneas en S con un número finito de singularidades. Entonces*

$$\int_S K = 2\pi \sum j,$$

donde K es la curvatura Gaussiana de la superficie y la suma se realiza sobre los índices de todas las singularidades.

DEMOSTRACION. Dada una curva simple $C[a, b] \rightarrow S$ tal que C no contiene ningún punto singular y dado un vector unitario V tangente a la foliación en $T_{C(a)}M$, existe una única extensión continua de V en un campo unitario $\tilde{V}(t)$ tangente a la foliación a lo largo de C , la prueba es similar a la prueba de la proposición 3.2. Sea Z un campo vectorial paralelo definido a lo largo de C . Definamos $\Phi(C) = \theta[Z, \tilde{V}](1) - \theta[Z, \tilde{V}](0)$, es decir que $\Phi(C) = \delta_C[Z, V]$, donde $\delta_C[Z, V]$ es el ángulo total entre Z y V a lo largo de C .

Si hubiésemos elegido el vector $-V$ en lugar de V , entonces $-\tilde{V}$ sería su extensión, por lo que utilizando la proposición 3.6 tenemos que $\theta[Z, -\tilde{V}] = \theta[Z, \tilde{V}] + \theta[\tilde{V}, -\tilde{V}]$, pero es inmediato que $\theta[\tilde{V}, -\tilde{V}]$ es un múltiplo de π , por lo que $\theta[Z, -\tilde{V}](1) - \theta[Z, -\tilde{V}](0) = \theta[Z, \tilde{V}](1) - \theta[Z, \tilde{V}](0)$, i.e. $\Phi(C)$ no depende del campo tangente a la foliación. Así mismo, si T es otro campo de vectores paralelos, tenemos que $\theta[Z, \tilde{V}] = \theta[Z, T] + \theta[T, \tilde{V}]$, y como los productos $\langle Z, T \rangle$ y $\langle Z^\perp, T \rangle$ son constantes a lo largo de la curva, es inmediato que $\theta[Z, T]$ también debe ser constante. Por lo que $\Phi(C)$ tampoco depende del campo

paralelo elegido.

Denotemos por $-C$ a la curva $C(1-t)$, es decir que $-C$ es la curva C recorrida en la dirección opuesta. El campo $\tilde{V}(1-t)$ es la extensión del vector $\tilde{V}(1)$ tangente a la foliación a lo largo de $-C$, así mismo, el campo $Z(1-t)$ es un campo paralelo a lo largo de $-C$. Por lo tanto, si denotamos por ϕ al ángulo que forman los vectores $\tilde{V}(1-t)$ y $Z(1-t)$ a lo largo de $-C$, tenemos que $\phi = \theta[Z, \tilde{V}](1-t)$, por lo que $\Phi(-C) = -\Phi(C)$.

Como S es una superficie compacta y orientable, podemos dar una triangulación de S . Veamos que podemos dar la triangulación de tal forma que se cumple lo siguiente,

- a) Ningún triángulo contiene una singularidad en su frontera.
- b) Cada triángulo contiene a lo más un punto singular en su interior.

Probaremos primero que se cumple (a). Supongamos que existe un triángulo T y un punto singular p tal que p se encuentra en un borde de T pero no en un vértice. Como cada triángulo tiene una vecindad homeomorfa a \mathbb{R}^2 tal que la imagen de T es un triángulo en el plano, podemos suponer que T es un triángulo plano. La figura 3.1 muestra como deformar T de modo que p sea un punto interior.

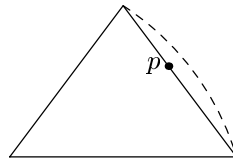


Figura 3.1: Deformación de un lado.

Supongamos que p se encuentra en un vértice al cual convergen s lados. Para cada pareja de lados contiguos tomemos un segmento que los une de forma que obtengamos un polígono tal como se muestra en la figura 3.2.

EndExpansion Triangulemos el interior del polígono formado de tal manera que p sea un punto interior en alguno de los triángulos. Al tomar la división, cada triángulo que tenga a p por vértice es dividido en una parte contenida en el interior del polígono y un cuadrilátero. Triangulemos cada cuadrilátero de forma que obtengamos dos

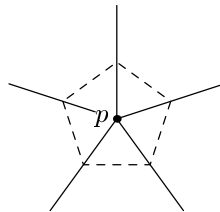


Figura 3.2: Deformación de un vértice

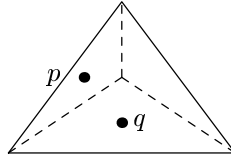


Figura 3.3: Las singularidades en el interior de T se pueden separar

triángulos con un lado en común. La triangulación formada siguiendo los pasos anteriores cumple la primera condición.

Probemos ahora la segunda condición. Supongamos que el triángulo T contiene 2 singularidades en su interior, digamos p y q . Triangulemos T de modo que cada triángulo formado contenga a lo más un punto singular en su interior. La figura 3.3 muestra una manera de hacer la triangulación. el caso general se sigue por inducción en el número de singularidades y utilizando la parte 1.

Dada la triangulación de S , numeramos los triángulos como T_1, T_2, \dots . Sea T_k un triángulo dado. Como T_k está contenido en un sistema de coordenadas, existe un campo unitario local U definido en una vecindad de T_i , además, existe un único campo U^\perp ortogonal a U y tal que $\{U, U^\perp\}$ es una base orientada en cada punto. Sea Ω_k el abierto tal que T_k es su frontera y orientemos el triángulo como la frontera de Ω_k . Definamos j_k como el índice del único punto singular en Ω_k si es que hay alguno, en caso que no haya ningún punto singular en Ω_k , definimos j_k como 0. Por el lema 3.5 podemos calcular el valor de j_k utilizando el triángulo T_k orientado como la frontera de Ω_k y utilizando el campo U . Sea $V(t)$ un campo unitario tangente a la foliación a lo largo de T_k , entonces

$$j_k = \frac{1}{2\pi} \delta_{T_k}[U, V]. \quad (3.5)$$

Sea $c(t)$ una parametrización de T_k que preserve la orientación, definamos $Z(t)$ como el transporte paralelo de un vector unitario arbitrario, tangente a la superficie en $c(0)$. Por el teorema 3.3 sabemos que se cumple la identidad

$$\int_{T_k} K dA = \delta_{T_k}[U, Z]. \quad (3.6)$$

Por lo tanto, por (3.5) y (3.6) tenemos que

$$\begin{aligned} 2\pi j_k - \int_{T_k} K dA &= \delta_{T_k}[Z, U] + \delta_{T_k}[U, V] \\ &= \delta_{T_k}[Z, V]. \end{aligned}$$

Pero si C_1, C_2, C_3 son los lados de T_k , se cumple que $\delta_{T_k}[Z, V] = \Phi(C_1) + \Phi(C_2) + \Phi(C_3)$. Por lo tanto, al sumar sobre todos los triángulos tenemos,

$$2\pi \sum j_k - \int_S K dA = \sum_{C_i \in T_k} \Phi(C_i),$$

pero la última suma es 0 porque cada lado pertenece exactamente a dos triángulos de tal forma que es atravesado en direcciones opuestas en cada triángulo. Por lo tanto, si $\Phi(C_i)$ se encuentra en la sumatoria, entonces también se encuentra $\Phi(-C_i) = -\Phi(C_i)$. \square

Corolario 3.1. (Teorema de Poincaré) *Si S es una superficie cerrada y orientable, y F es una foliación con un número finito de singularidades, entonces*

$$\sum j = \chi(S),$$

donde $\chi(S) = 2(1 - g)$ es la característica de Euler de la superficie.

DEMOSTRACION. La prueba es consecuencia inmediata del teorema de Gauss-Bonnet. \square

3.3 La conjetura de Carathéodory

Sea $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ una inmersión isométrica. Consideremos el par (f, ν) , donde $\nu \in NM$. En el capítulo 1 definimos las ν -curvaturas principales y las ν -direcciones principales del campo como los eigenvalores y eigenvectores del ν -operador de forma.

Definición 3.9. *Los puntos $x \in M$ tales que las ν -curvaturas principales coinciden son llamados puntos ν -umbílicos o simplemente puntos umbílicos si es claro cuál es el campo normal ν .*

Proposición 3.7. *Las curvaturas principales están dadas por la ecuación*

$$H \pm \sqrt{H^2 - K},$$

donde H es la curvatura media y K la curvatura Gaussiana de la superficie.

DEMOSTRACION. Sea $p \in M$, fijemos una base para T_pM . Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la expresión local del operador de forma en la base dada. Entonces las curvaturas principales de M en p son las raíces del polinomio característico,

$$\lambda^2 - \text{Tr}(A)\lambda + \det A = 0.$$

Pero por definición $\text{Tr}(A) = 2H$ y $\det A = K$, de donde se sigue el resultado. \square

Por lo tanto si p no es un punto umbílico, necesariamente $H^2 - K > 0$, por lo que las curvaturas principales de la inmersión son diferenciables en una vecindad de p .

Denotemos por U al conjunto de puntos umbílicos de M . Supongamos que U es cerrado, de modo que $M - U$ es una subvariedad de M de la misma dimensión. En el apéndice se describe el haz proyectivo de M . Fijemos una de las dos curvaturas principales, digamos k_i , y definamos $s : M - U \rightarrow PM$ como la sección tal que a cada $p \in M - U$ le asigna la dirección principal correspondiente a la ν -curvatura principal k_i .

Proposición 3.8. *s es una función diferenciable de $M - U$ en PM .*

DEMOSTRACION. Sean $p \in M$ y $\{X, Y\}$ un par de campos tangentes, ortonormales y diferenciables definidos en una vecindad V de p , tal que $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es la representación local de S_ν en V . Nótese que necesariamente en p se debe tener que a o b es distinto de k_i , pues en caso contrario al calcular la traza de S_ν en p tendríamos que $\text{Tr}(S_\nu(p)) = 2k_i(p)$, pero como $\text{Tr}(S_\nu(p)) = k_1(p) + k_2(p)$, necesariamente tendríamos que $k_1(p) = k_2(p)$, lo cual contradice que p no sea un punto umbílico. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a(p) \neq k_i(p)$ y hagamos más pequeña la vecindad V de ser necesario de tal forma que $k_i \neq a$ en todo V . Sea

$$Z = \frac{-b}{a - k_i}X + Y.$$

Un cálculo directo demuestra que $S_\nu(Z) = k_i Z$ en V . Además X es un campo vectorial diferenciable tangente a M . Sea $\rho : TM - \{0\} \rightarrow PM$ el morfismo natural (ver apéndice), ρ es una función diferenciable, además nótese que en V $s(y)$ es la línea en $T_y M$ que contiene a $X(y)$, i.e. $s(y) = \rho(X(y))$. Por lo tanto s es una función diferenciable en V . Como V es una vecindad de un punto arbitrario, s es diferenciable en todo $M - U$. \square

Sea Δ la distribución en $M - U$ tal que Δ_p es la dirección principal correspondiente a k_i . En la proposición 3.8 probamos que Δ es una distribución diferenciable. Como Δ_p es un subespacio de rango 1 para cada p , tenemos que Δ es trivialmente involutiva. Por el teorema de Frobenius, Δ es totalmente integrable, i.e., para cada $p \in M - U$ existe un sistema de coordenadas (V, ϕ) tal que en V , Δ_x es el espacio generado por el vector ∂_1 . De esta manera, la distribución de direcciones principales genera un *foliación* de $M - U$ de rango 1 de tal forma que para cada p , la hoja de la foliación que pasa por p es una curva cuyo vector tangente en cada punto corresponde a la dirección principal en p de k_i . A la foliación de $M - U$ que acabamos de describir se le llama un campo de líneas de curvatura o foliación principal.

Supongamos que todos los puntos ν -umbílicos de la superficie son aislados, de tal forma que si M es una superficie compacta, entonces sólo puede tener un conjunto finito de puntos umbílicos.

Definición 3.10. *Para cada inmersión isométrica f y cada campo normal $\nu \in NM$ fijos, llamamos la configuración principal de M al par de foliaciones definidas por las líneas de curvatura de ambas direcciones principales junto con el conjunto de puntos umbílicos.*

Conjetura de Carathéodory. Todo encaje suave de una esfera en \mathbb{R}^3 tal que su imagen es convexa debe tener al menos dos puntos umbílicos.

En la construcción de las líneas de curvatura no fue necesario utilizar de manera directa la inmersión en \mathbb{R}^4 , sino sólo el hecho de que una vez fijado un campo normal, la inmersión define un operador de forma en la superficie, por lo tanto, podemos hacer las mismas construcciones para inmersiones en \mathbb{R}^3 ; en particular, las direcciones principales de la inmersión forman una foliación dife-

renciable de rango 1 de M , por lo que si M tiene singularidades aisladas, podemos calcular el índice de Poincaré-Hopf de cada una.

Conjetura del Índice. Si $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un encaje de una superficie compacta, tal que M tiene un número finito de puntos umbílicos, entonces cada punto umbílico de M tienen índice de Poincaré-Hopf menor o igual a 1.

Teorema 3.5. *Si la conjetura del índice es cierta, entonces también lo es la conjetura de Carathéodory.*

DEMOSTRACION. Supongamos que la conjetura del índice es cierta. Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un encaje de una superficie S homeomorfa a una esfera. Supongamos que f tiene una cantidad finita de puntos umbílicos. Si la conjetura del índice es cierta, cada uno debe tener índice menor o igual a 1. Como S es homeomorfa a una esfera, $\chi(S) = 2$. Por lo tanto, por el teorema de Poincaré,

$$\sum j = 2.$$

Es claro que si cada índice es menor o igual a 1, la suma de la izquierda debe tener al menos dos términos. Por lo tanto, la conjetura del índice implica la de Carathéodory. \square

Aparte de la importancia natural que merece la clasificación de los índices de los puntos umbílicos que se pueden dar en una superficie, en vista del teorema 3.5 tal clasificación adquiere una relevancia aún mayor. En relación con este problema un posible camino es el siguiente.

Dado que una superficie en \mathbb{R}^3 se encuentra también en \mathbb{R}^4 , podemos intentar clasificar el índice de las inmersiones en \mathbb{R}^3 clasificando primero el de las inmersiones en \mathbb{R}^4 y aplicando el teorema fundamental de las subvariedades para buscar cuáles de esas inmersiones son en realidad inmersiones en \mathbb{R}^3 . Nótese que el ν -operador de forma se construyó de manera que si el punto $x \in M$ es ν -umbílico para la inmersión $f : M \rightarrow \mathbb{R}^4$ y si se satisface el teorema fundamental, entonces x también es umbílico para la inmersión en \mathbb{R}^3 dada en el teorema. Además, el valor del índice de x como punto ν -umbílico es el mismo que el del índice como punto umbílico en \mathbb{R}^3 .

3.4 Puntos Umbílicos en \mathbb{R}^4

En este capítulo consideraremos puntos ν -umbílicos aislados en superficies. El siguiente teorema es un resultado clásico de geometría diferencial que dice que localmente toda superficie inmersa en \mathbb{R}^4 es la gráfica de una función.

Teorema 3.6. (teorema de la gráfica) *Sea $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una inmersión isométrica y sea τ una isometría de \mathbb{R}^m tal que $\tau(f(p)) = 0$ y $\tau_*(v_i) = \hat{e}_i$, donde v_1, \dots, v_n es una base ortonormal de $f_*(T_p M)$ y \hat{e}_i es el i -ésimo vector canónico de \mathbb{R}^m . Entonces existe*

un sistema de coordenadas $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ en una vecindad de p , tal que $\phi(p) = 0$, y se cumple la siguiente ecuación,

$$\tau \circ f \circ \phi^{-1}(x) = (x, h(x)).$$

DEMOSTRACION. Sea $\phi' : U' \rightarrow \mathbb{R}^n$ un sistema de coordenadas en una vecindad de p , haciendo una traslación en \mathbb{R}^n de ser necesario, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $\phi'(p) = 0$. Sea e_1, \dots, e_n la base ortonormal usual de \mathbb{R}^n . Se tiene la siguiente ecuación en $T_0\mathbb{R}^n$,

$$[\tau \circ f \circ \phi'^{-1}]_*(e_i) = \tau_* f_*(\partial_i).$$

Como $\tau_* f_*(\partial_i)$ se encuentra en el subespacio generado por $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_n$, la matriz Jacobiana de $[\tau \circ f \circ \phi'^{-1}]$ tiene la siguiente forma en 0,

$$[\tau \circ f \circ \phi'^{-1}]'(0) = \begin{pmatrix} A_{n \times n} \\ - & - & - \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Como f es una inmersión, tenemos que $\det(A) \neq 0$. Sea

$$\tau \circ f \circ \phi'^{-1}(x) = (g^1(x), \dots, g^m(x)),$$

y definamos $g(x) = (g^1(x), \dots, g^n(x))$. La matriz Jacobiana de g en 0 es la matriz A . Por el teorema de la función inversa, existe una vecindad V de 0 tal que g es un difeomorfismo entre V y su imagen.

Sea $U = \phi'^{-1}(V)$, $\phi = g \circ (\phi'|_U)$ y $h = (g^{n+1} \circ g^{-1}, \dots, g^m \circ g^{-1})$. ϕ es un difeomorfismo tal que $\phi(p) = 0$, además, se tiene que

$$\tau \circ f \circ \phi^{-1}(x) = \tau \circ f \circ \phi'^{-1} \circ g^{-1}(x) = (x, h(x)).$$

Por lo tanto, ϕ es el sistema de coordenadas buscado. □

Como τ es una isometría, τ_* induce un isomorfismo entre el haz normal a M a lo largo de f y el haz normal a lo largo de $\tau \circ f$ tal que conserva la métrica, conexión normal y segunda forma fundamental. Por lo tanto, podemos usar el teorema de la gráfica para estudiar, localmente, las ecuaciones fundamentales suponiendo que la inmersión es la gráfica de una función.

Sea $X : U \rightarrow M$ una parametrización de M y sea ν un campo normal definido en $X(U)$. Como los campos vectoriales ∂_1, ∂_2 forman una base de $T_x M$ para cada x en U , podemos calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental utilizando las ecuaciones siguientes,

$$e_\nu = l_\nu(\partial_1, \partial_1) = \langle \nu, \bar{\nabla}_{\partial_1} \partial_1 \rangle,$$

similarmente,

$$f_\nu = \langle \nu, \bar{\nabla}_{\partial_1} \partial_2 \rangle \quad y \quad g_\nu = \langle \nu, \bar{\nabla}_{\partial_2} \partial_2 \rangle.$$

Sean e_1, e_2 los vectores canónicos en \mathbb{R}^2 . Como $\partial_i = X_*(e_i)$ y e_1, e_2 se extienden paralelamente en \mathbb{R}^2 , tenemos que

$$(\bar{\nabla}_{\partial_i} \partial_j) \circ X = \bar{\nabla}_{f_* X_*(e_i)} f_* X_*(e_j) = (f \circ X)_{ij},$$

donde $(f \circ X)_{ij}$ denota la función cuyas componentes son las derivadas parciales de segundo orden, i, j , de la función $f \circ X$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} e_\nu \circ X &= \langle \nu \circ X, (f \circ X)_{11} \rangle, \\ f_\nu \circ X &= \langle \nu \circ X, (f \circ X)_{12} \rangle, \\ g_\nu \circ X &= \langle \nu \circ X, (f \circ X)_{22} \rangle. \end{aligned}$$

Haciendo U suficientemente pequeño, podemos suponer que en U existe un campo normal unitario ν^\perp , ortogonal a ν . Sean $v_1, v_2 \in T_p M$ las ν^\perp -direcciones principales y sea τ la isometría de \mathbb{R}^4 tal que $\tau(f(p)) = 0$ y tal que τ_* envía los vectores ortonormales $f_*(v_1), f_*(v_2), \nu(p), \nu^\perp(p)$ en la base usual $\hat{e}_1, \dots, \hat{e}_4$. Por el teorema de la gráfica, existe una parametrización $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow M$ tal que $\tau \circ f \circ g(x) = (x, h(x))$. Sea $h(x) = (\phi(x), \psi(x))$ y supongamos que p es un punto ν -umbílico. Definamos $\mathbf{x} = \tau \circ f \circ g$. Llamaremos a \mathbf{x} la *parametrización canónica* de f .

Definición 3.11. Sea $F : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función diferenciable definida en el abierto U . Fijemos un punto p en U . El k -ésimo Jet de F es el desarrollo de Taylor de orden k de F alrededor de p .

Teorema 3.7. El 3-jet de ϕ y ψ alrededor de p están dados por las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned} \phi(u, v) &= \frac{k}{2}(u^2 + v^2) + \frac{a}{6}u^3 + \frac{d}{2}u^2v + \frac{b}{2}uv^2 + \frac{c}{6}v^3, \\ \psi(u, v) &= \frac{\alpha}{2}u^2 + \frac{\gamma}{2}v^2 + \frac{\delta}{6}u^3 + \frac{\epsilon}{2}u^2v + \frac{\zeta}{2}uv^2 + \frac{\eta}{6}v^3, \end{aligned}$$

donde k es la ν -curvatura principal de p y $\alpha = e_{\nu^\perp}(p)$, $\gamma = g_{\nu^\perp}(p)$.

DEMOSTRACION. Como τ es una isometría, se tiene la siguiente ecuación,

$$e_\nu = \langle \nu, \bar{\nabla}_{\partial_1} \partial_1 \rangle = \langle \tau_*(\nu), \tau_*(\bar{\nabla}_{\partial_1} \partial_1) \rangle = \langle \tau_*(\nu), \bar{\nabla}_{\tau_* \partial_1} \tau_* \partial_1 \rangle,$$

similarmente para f_ν, g_ν . Por lo tanto, para la parametrización g , los coeficientes de la ν -segunda forma fundamental a lo largo de f coinciden con los coeficientes de la $\tau_*(\nu)$ -segunda forma fundamental a lo largo de $\tau \circ f$. Similarmente para la ν^\perp -segunda forma fundamental, Por lo tanto, tenemos las siguientes ecuaciones,

$$\begin{aligned} e_\nu(p) &= \langle \hat{e}_3, \mathbf{x}_{11} \rangle = \phi_{11}(0), \\ f_\nu(p) &= \langle \hat{e}_3, \mathbf{x}_{12} \rangle = \phi_{12}(0), \\ g_\nu(p) &= \langle \hat{e}_3, \mathbf{x}_{22} \rangle = \phi_{22}(0). \end{aligned}$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} e_{\nu^\perp}(p) &= \langle \hat{e}_4, \mathbf{x}_{11} \rangle = \psi_{11}(0), \\ f_{\nu^\perp}(p) &= \langle \hat{e}_4, \mathbf{x}_{12} \rangle = \psi_{12}(0), \\ g_{\nu^\perp}(p) &= \langle \hat{e}_4, \mathbf{x}_{22} \rangle = \psi_{22}(0). \end{aligned}$$

Como $\tau_*(f_*(T_p M))$ es el sub-espacio de \mathbb{R}^4 generado por \hat{e}_1, \hat{e}_2 , tenemos que $d\phi_0 = d\psi_0 = 0$, por lo que en $T_0\mathbb{R}^2$ se tiene que $\mathbf{x}_*(e_i) = \hat{e}_i$, de donde obtenemos

$$g_*(e_i) = f_*^{-1} \tau_*^{-1} \mathbf{x}_*(e_i) = v_i,$$

i.e., con la parametrización g , los coeficientes de las ν y ν^\perp segundas formas fundamentales corresponden a la base ortonormal v_1, v_2 . Utilizando el lema 2.3, la matriz para $S_\nu(p)$ en esta base está dada por la ecuación

$$[S_\nu(p)] = \begin{pmatrix} e_\nu(p) & f_\nu(p) \\ f_\nu(p) & g_\nu(p) \end{pmatrix},$$

similarmente para $[S_{\nu^\perp}(p)]$. Como p es ν -umbílico, cualquier base ortonormal para $T_p M$ diagonaliza al operador S_ν , por lo que $e_\nu(p) = g_\nu(p) = k$ y $f_\nu(p) = 0$. Además, como v_1 y v_2 son las direcciones principales de S_{ν^\perp} , la matriz del ν^\perp -operador de forma en esta base también es diagonal, en particular, $f_{\nu^\perp} = 0$. Por lo tanto, $\phi_{11}(0) = \phi_{22}(0) = k$ y $\phi_{12}(0) = \psi_{12}(0) = 0$. El resultado se sigue de la fórmula de Taylor. \square

También tenemos un resultado análogo para el 1-jet del campo $\tau_*\nu$ normal a M a lo largo de $\tau \circ f$. Sea $\mu = (\tau_*\nu) \circ g$, podemos identificar a μ con una función de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^4 como es usual.

Lema 3.6. *El 1-jet del campo μ está dado por la ecuación*

$$\mu(u, v) = (-ku, -kv, 1, mu + nv).$$

DEMOSTRACION. Como $\tau_*(\nu(p)) = \hat{e}_3$, tenemos que $\mu(0) = (0, 0, 1, 0)$. Sean μ^1, \dots, μ^4 las funciones componentes de μ , entonces $\mu^j = \langle \mu, \hat{e}_j \rangle$, por lo que,

$$\frac{\partial \mu^j}{\partial x^i} = \partial_i \langle \tau_*\nu, \hat{e}_j \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{\partial_i}(\tau_*\nu), \hat{e}_j \rangle.$$

Como τ es una isometría, $\tilde{\nabla}_{\partial_i}(\tau_*\nu) = \tau_*(\tilde{\nabla}_{\partial_i}\nu)$, por lo que

$$\langle \tilde{\nabla}_{\partial_i}(\tau_*\nu), \hat{e}_j \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{\partial_i}\nu, \tau_*^{-1}\hat{e}_j \rangle.$$

Como $\tau_*^{-1}\hat{e}_1 = v_1$, tenemos que

$$\frac{\partial \mu^1}{\partial x^i}(0) = \langle \tilde{\nabla}_{\partial_i}\nu(p), \tau_*^{-1}\hat{e}_1 \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{\partial_i}\nu(p), v_1 \rangle.$$

Similarmente,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu^2}{\partial x^i}(0) &= \langle \tilde{\nabla}_{\partial_i}\nu(p), v_2 \rangle, \\ \frac{\partial \mu^3}{\partial x^i}(0) &= \langle \tilde{\nabla}_{\partial_i}\nu(p), \nu \rangle. \end{aligned}$$

En la prueba del teorema anterior mostramos que en la parametrización g , el campo tangente ∂_i coincide con el vector v_i en p . Por lo tanto,

$$\frac{\partial \mu^1}{\partial x^1}(0) = -e_\nu(p) = -k \quad y \quad \frac{\partial \mu^1}{\partial x^2}(0) = -f_\nu(p) = 0.$$

De manera similar, $\frac{\partial \mu^2}{\partial x^1}(0) = 0$ y $\frac{\partial \mu^2}{\partial x^2}(0) = -k$. Finalmente, como ν es un campo unitario, tenemos que $\langle \tilde{\nabla}_{\partial_i} \nu, \nu \rangle = 0$, por lo que $\frac{\partial \mu^3}{\partial x^i}(0) = 0$. El resultado se sigue de la fórmula de Taylor. \square

Lema 3.7. *El 2 Jet del campo μ está dado por la siguiente ecuación,*

$$\begin{aligned} & (-ku - \frac{b}{2}v^2 - \frac{a + 2m\alpha}{2}u^2 - (d + n\alpha)uv, -\frac{d}{2}u^2 - kv - (b + m\gamma)uv - \frac{1}{2}(c + 2n\gamma)v^2, \\ & 1 - \frac{1}{2}(k^2 + m^2)u^2 - mn uv - \frac{1}{2}(k^2 + n^2)v^2, mu + nv + \frac{1}{2}w_{02}v^2 + w_{11}uv + \frac{1}{2}w_{20}u^2) \end{aligned}$$

DEMOSTRACION. En el lema 3.6 se calcularon las derivadas de primer orden de la función μ asociada con el campo normal ν , por lo que sólo resta hallar las derivadas de segundo orden de las componentes de μ .

Como $\langle \nu, \partial_i \rangle = 0$, al tomar la segunda derivada obtenemos,

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial_j \partial_k} \langle \nu, \partial_i \rangle &= \frac{\partial^2}{\partial_j \partial_k} \langle \nu, \mathbf{x}_i \rangle \\ &= \langle \nu_{kj}, \mathbf{x}_i \rangle + \langle \nu_k, \mathbf{x}_{ij} \rangle + \langle \nu_j, \mathbf{x}_{ik} \rangle + \langle \nu, \mathbf{x}_{ikj} \rangle \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde los subíndices representan las derivadas parciales componente a componente. Evaluando en el origen y utilizando el teorema 3.7 obtenemos lo siguiente

$$\langle \nu_{kj}, \hat{e}_i \rangle = -(\langle \nu_k, \mathbf{x}_{ij} \rangle + \langle \nu_j, \mathbf{x}_{ik} \rangle + \langle \nu, \mathbf{x}_{ikj} \rangle). \quad (3.7)$$

Utilizando el valor del polinomio de Taylor de primer orden dado en el teorema 3.6, junto con el teorema 3.7 obtenemos el resultado para las primeras dos componentes del campo ν . De manera similar, utilizando la ecuación $\langle \nu, \nu \rangle = 1$, obtenemos al derivar dos veces,

$$\langle \nu_{jk}, \nu \rangle = -\langle \nu_j, \nu_k \rangle. \quad (3.8)$$

Como en el origen el vector ν coincide con \hat{e}_3 los coeficientes del polinomio de Taylor de la tercera componente se obtienen del teorema 3.6. Finalmente, las componentes de la cuarta componente se obtienen de la fórmula de Taylor. \square

Lema 3.8. *Sea $\mu^\perp = (\tau_* \nu^\perp) \circ g$, el 1-jet de μ^\perp está dado por la ecuación*

$$\mu^\perp(u, v) = (-\alpha u, -\gamma v, -mu - nv, 1)$$

donde α, γ son los coeficientes de u^2 y v^2 en la parametrización canónica y m, n están dados por el teorema 3.6.

DEMOSTRACION. Sean μ^1, \dots, μ^4 las funciones componentes de μ^\perp . Por construcción de la isometría τ , tenemos que $\mu^\perp(0) = (0, 0, 0, 1)$. En el teorema 3.6 probamos que $\frac{\partial \mu^1}{\partial x^1}(0) = -e_\nu(p)$ y $\frac{\partial \mu^1}{\partial x^2}(0) = -f_\nu(p)$, de manera similar tenemos las siguientes ecuaciones,

$$\frac{\partial \mu'^1}{\partial x^1}(0) = -e_{\nu^\perp}(p), \quad \frac{\partial \mu'^1}{\partial x^2}(0) = -f_{\nu^\perp}(p),$$

además,

$$\frac{\partial \mu'^2}{\partial x^1}(0) = -f_{\nu^\perp}(p), \quad \frac{\partial \mu'^2}{\partial x^2}(0) = -g_{\nu^\perp}(p).$$

Como en la parametrización canónica $f_{\nu^\perp}(p) = 0$, tenemos que los 1-jets de las funciones componentes μ'^1 y μ'^2 están dados por las ecuaciones

$$\mu'^1 = -e_{\nu^\perp}(p)u = -\alpha u \quad y \quad \mu'^2 = -g_{\nu^\perp}(p)v = -\gamma v.$$

También se mostró en el teorema 3.6 que $\frac{\partial \mu^j}{\partial x^i} = \langle \tilde{\nabla}_{\partial_i} \nu, \tau_*^{-1} \hat{e}_j \rangle$. De manera similar,

$$\frac{\partial \mu'^j}{\partial x^i} = \langle \tilde{\nabla}_{\partial_i} \nu^\perp, \tau_*^{-1} \hat{e}_j \rangle,$$

por lo que

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mu'^3}{\partial x^i}(0) &= \langle \tilde{\nabla}_{\partial_i} \nu^\perp(p), \tau_*^{-1} \hat{e}_3(p) \rangle \\ &= \langle \tilde{\nabla}_{\partial_i} \nu^\perp(p), \nu(p) \rangle \\ &= -\langle \nu^\perp(p), \tilde{\nabla}_{\partial_i} \nu(p) \rangle \\ &= -\frac{\partial \mu^4}{\partial x^i}(0). \end{aligned}$$

Como $\frac{\partial \mu^4}{\partial x^1}(0) = m$ y $\frac{\partial \mu^4}{\partial x^2}(0) = n$, el primer jet de μ'^3 alrededor de 0 es $-mu - nv$. Finalmente,

$$\frac{\partial \mu'^4}{\partial x^i}(0) = \langle \tilde{\nabla}_{\partial_i} \nu^\perp(p), \tau_*^{-1} \hat{e}_4(p) \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{\partial_i} \nu^\perp(p), \nu^\perp(p) \rangle = 0,$$

donde la última igualdad se debe a que ν^\perp es un campo de longitud unitaria. Por lo tanto, el 1-jet de μ'^4 es constante e igual 1. \square

Lema 3.9. *El 2 Jet de μ^\perp alrededor del origen está dado por la siguiente ecuación,*

$$\begin{aligned} &(-\alpha u + \frac{1}{2}(2km - \delta)u^2 + (kn - \epsilon)uv - \frac{1}{2}\zeta v^2, \\ &-\gamma v - \frac{1}{2}\epsilon u^2 + (km - \zeta)uv + \frac{1}{2}(2kn - \eta)v^2, \\ &-mu - nv - w_{11}uv - \frac{1}{2}(w_{20} + k\alpha)u^2 - \frac{1}{2}(w_{02} + k\gamma)v^2, \\ &1 - mn uv - \frac{1}{2}(m^2 + \alpha^2)u^2 - \frac{1}{2}(n^2 + \gamma^2)v^2). \end{aligned}$$

DEMOSTRACION. En analogía a las ecuaciones (3.7) y (3.8) del Lema 3.7, en el origen tenemos las siguientes ecuaciones,

$$\langle \nu_{kj}^\perp, \hat{e}_i \rangle = -(\langle \nu_k^\perp, \mathbf{x}_{ij} \rangle + \langle \nu_j^\perp, \mathbf{x}_{ik} \rangle + \langle \nu^\perp, \mathbf{x}_{ikj} \rangle). \quad (3.9)$$

$$\langle \nu_{jk}^\perp, \nu^\perp \rangle = -\langle \nu_j^\perp, \nu_k^\perp \rangle, \quad (3.10)$$

como en el origen ν^\perp coincide con \hat{e}_4 , los coeficientes de segundo orden de las dos primeras componentes y de la última componente del campo ν^\perp se obtienen de las ecuaciones (3.9) y (3.10). Finalmente, como $\langle \nu, \nu^\perp \rangle = 0$ tenemos la siguiente ecuación,

$$\langle \nu_{ij}^\perp, \nu \rangle = -(\langle \nu_j^\perp, \nu_i \rangle + \langle \nu^\perp, \nu_{ij} \rangle).$$

Evaluando en el origen y utilizando el lema 3.7 obtenemos los términos de segundo orden del polinomio de Taylor correspondiente a la tercera componente de ν^\perp . \square

En el capítulo 2 se mostró que para que exista una inmersión isométrica de una superficie inmersa en \mathbb{R}^4 en \mathbb{R}^3 , con segunda forma fundamental determinada por la segunda forma fundamental de la inmersión en \mathbb{R}^4 , es suficiente con verificar que las siguientes ecuaciones se cumplen,

$$\begin{aligned} S_{\nu^\perp} W_\nu &= 0, \\ \bar{\nabla}_{W_\nu} \nu^\perp &= 0. \end{aligned}$$

Donde $W_\nu = \langle \nabla_Y^\perp \nu^\perp, \nu \rangle X + \langle \nabla_X^\perp \nu^\perp, \nu \rangle Y$, además X, Y son cualquier pareja de campos tangentes linealmente independientes, más aún, si $W_\nu \neq 0$, es suficiente con verificar la segunda ecuación. Utilicemos la parametrización canónica \mathbf{x} para suponer que $X = \partial_u$, $Y = \partial_v$ y que los vectores normales coinciden en p con \hat{e}^3 y \hat{e}^4 . Si utilizamos las aproximaciones de los campos normales dadas por los teoremas 3.6 y 3.8 tenemos que en una vecindad del origen podemos aproximar W_ν con la ecuación $W_\nu = (n - kv\gamma)\partial_u + (-m + ku\alpha)\partial_v$, que se obtiene sustituyendo cada campo normal por su aproximación a primer orden. Podemos utilizar el mismo procedimiento para estudiar una aproximación de la ecuación de Codazzi a primer orden. Como $\langle \bar{\nabla}_{\partial_v} \nu^\perp, \nu \rangle = \langle \nabla_{\partial_v}^\perp \nu^\perp, \nu \rangle$, podemos reescribir la ecuación de Codazzi, tomando $X = \partial_u$ y $Y = \partial_v$, del siguiente modo,

$$\langle \bar{\nabla}_{\partial_v} \nu^\perp, \nu \rangle \bar{\nabla}_{\partial_u} \nu^\perp + \langle \nu^\perp, \bar{\nabla}_{\partial_u} \nu \rangle \bar{\nabla}_{\partial_v} \nu^\perp = 0.$$

Como en \mathbb{R}^4 la conexión coincide con la derivada del campo vectorial componente a componente, la ecuación de Codazzi es equivalente a

$$\langle \nu_v^\perp, \nu \rangle \nu_u^\perp + \langle \nu^\perp, \nu_u \rangle \nu_v^\perp = 0.$$

Utilizando la parametrización canónica y haciendo la identificación usual del campo ν con la función μ definida en la sección anterior obtenemos, al evaluar en el origen la ecuación de Codazzi y utilizando los lemas 3.7 y 3.9, la siguiente ecuación:

$$(n\alpha, -m\gamma, 0, 0) = 0.$$

Es decir que $n\alpha = m\gamma = 0$. Si tomamos las derivadas parciales de las componentes de la ecuación de Codazzi en el origen, obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} \langle \nu_{vu}^\perp, \nu \rangle \nu_u^\perp + \langle \nu_v^\perp, \nu_u \rangle \nu_u^\perp + \langle \nu_v^\perp, \nu \rangle \nu_{uu}^\perp + \langle \nu_u^\perp, \nu_u \rangle \nu_v^\perp + \langle \nu^\perp, \nu_{uu} \rangle \nu_v^\perp + \langle \nu^\perp, \nu_u \rangle \nu_{vu}^\perp &= 0, \\ \langle \nu_{vv}^\perp, \nu \rangle \nu_u^\perp + \langle \nu_v^\perp, \nu_v \rangle \nu_u^\perp + \langle \nu_v^\perp, \nu \rangle \nu_{uv}^\perp + \langle \nu_v^\perp, \nu_u \rangle \nu_v^\perp + \langle \nu^\perp, \nu_{uv} \rangle \nu_v^\perp + \langle \nu^\perp, \nu_u \rangle \nu_{vv}^\perp &= 0, \end{aligned}$$

donde la primera se obtiene de derivar la ecuación de Codazzi respecto de u y la segunda respecto de v . Sustituyendo en el origen y utilizando los lemas 3.7 y 3.9 obtenemos las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} (-kmn + n\delta - m\epsilon + \alpha w_{11}, km^2 - k\alpha\gamma + n\epsilon - m\zeta - \gamma w_{20}, 0, 0) &= 0, \\ (-kn^2 + n\epsilon - m\zeta + \alpha w_{02}, kmn + n\zeta - m\eta - \gamma w_{11}, 0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Por el capítulo 2 sabemos que la ecuación de Gauss es equivalente a la ecuación

$$e_{\nu^\perp} g_{\nu^\perp} - f_{\nu^\perp}^2 = 0,$$

además de que $e_{\nu^\perp} = \langle x_{uu}, \nu^\perp \rangle$, $f_{\nu^\perp} = \langle x_{uv}, \nu^\perp \rangle$, $g_{\nu^\perp} = \langle x_{vv}, \nu^\perp \rangle$. En particular, si evaluamos las expresiones para los coeficientes de la segunda forma fundamental en el origen encontramos que la ecuación de Gauss en el punto umbílico es la ecuación

$$\alpha\gamma = 0.$$

Finalmente, al tomar las derivadas de la ecuación de Gauss de la misma manera como hicimos con la ecuación de Codazzi y evaluar en el origen obtenemos

$$\begin{aligned} -km\alpha - km\gamma + \gamma\delta + \alpha\zeta &= 0, \\ -kn\alpha - kn\gamma + \gamma\epsilon + \alpha\eta &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, utilizando las relaciones $\alpha\gamma = 0$, $m\gamma = 0$ y $n\alpha = 0$, las ecuaciones para las derivadas de la ecuación de Codazzi se convierten en las siguientes:

$$\begin{aligned} -kmn + n\delta - m\epsilon + \alpha w_{11} &= 0, \\ km^2 + n\epsilon - m\zeta - \gamma w_{20} &= 0, \\ -kn^2 + n\epsilon - m\zeta + \alpha w_{02} &= 0, \\ kmn + n\zeta - m\eta - \gamma w_{11} &= 0. \end{aligned}$$

Así mismo, las ecuaciones para la derivada de la ecuación de Gauss se simplifican en las siguientes:

$$\begin{aligned} -km\alpha + \gamma\delta + \alpha\zeta &= 0, \\ -kn\gamma + \gamma\epsilon + \alpha\eta &= 0. \end{aligned}$$

Como $\alpha\gamma$, $m\gamma$ y $n\alpha$ deben ser nulos, obtenemos las siguientes posibilidades para los valores de los parámetros de los campos normales y la inmersión isométrica en \mathbb{R}^4 :

$n, \gamma = 0$	$m, \alpha = 0$	$\alpha, \gamma = 0$
$-m\epsilon + \alpha w_{11} = 0$	$n\delta = 0$	$-kmn + n\delta - m\epsilon = 0$
$m(km - \zeta) = 0$	$n\epsilon - \gamma w_{20} = 0$	$km^2 + n\epsilon - m\zeta = 0$
$-m\zeta + \alpha w_{02} = 0$	$n(-kn + \epsilon) = 0$	$-kn^2 + n\epsilon - m\zeta = 0$
$-m\eta = 0$	$n\zeta - \gamma w_{11} = 0$	$kmn + n\zeta - m\eta = 0$
$\alpha(-km + \zeta) = 0$	$\gamma\delta = 0$	
$\alpha\eta = 0$	$\gamma(-kn + \epsilon) = 0$	

Tabla 3.1: Condiciones sobre los parámetros de una superficie para que exista una inmersión isométrica en \mathbb{R}^3 con segunda forma fundamental determinada por su inmersión en \mathbb{R}^4 .

Por lo tanto, de existir una inmersión isométrica de la superficie en una vecindad del punto umbílico, esta debe cumplir las ecuaciones correspondientes a alguna de las columnas de la Tabla 3.1. Resulta que, en una vecindad de un punto umbílico, se encuentran clasificados ciertos tipos de líneas de curvatura, que se denotan por D_1, D_2, D_3 y D_{12} . Además se sabe que los casos genéricos o estables son los casos D_1, D_2 y D_3 . Al caso no genérico D_{12} se le conoce como una *bifurcación* de los casos D_1 y D_2 . En [NSB01] se describe la dinámica de la configuración principal en una vecindad del punto umbílico al variar el campo normal, manteniendo la condición de que p debe ser un punto umbílico. Entre los resultados principales de [NSB01] encontramos que en el espacio de parámetros (m, n) del 1-jet de los campos normales tales que p sigue siendo un punto umbílico, el único conjunto de campos normales de los que no se sabe el valor del índice del campo de líneas de curvatura que definen en p está dado por la ecuación lineal

$$n = \frac{b}{d}m + \frac{(a-b)b + (c-d)d}{(\alpha-\gamma)d}, \quad (\alpha-\gamma)d \neq 0. \quad (3.11)$$

Utilizando la tabla 3.1 vemos que el último caso $\alpha = \gamma = 0$ no es posible en el caso de que el campo normal corresponda en el espacio de parámetros a la recta no simple. Si tomamos el caso $m = \alpha = 0$ y suponemos que $\gamma \neq 0$, entonces la ecuación de Gauss se convierten en

$$\begin{aligned} \delta &= 0, \\ -kn + \epsilon &= 0. \end{aligned}$$

Utilizando las ecuaciones anteriores, la ecuación de Codazzi se reduce a las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} n\epsilon - \gamma w_{20} &= 0, \\ n\zeta - \gamma w_{11} &= 0. \end{aligned}$$

Similarmente, si tomamos el caso en que $n = \gamma = 0$ y suponemos que $\alpha \neq 0$, las

ecuaciones fundamentales se convierten en:

$$\begin{aligned}\eta &= 0, \\ -km + \zeta &= 0, \\ -m\epsilon + \alpha w_{11} &= 0, \\ -m\zeta + \alpha w_{02} &= 0.\end{aligned}$$

La importancia de las ecuaciones anteriores es que relacionan propiedades puramente geométricas de la superficie, i.e. la curvatura Gaussiana y las derivadas de la inmersión en el punto umbílico, con las propiedades extrínsecas, es decir con los parámetros n y m que corresponden al haz normal y las derivadas del haz normal en el punto umbílico.

En relación con las conjeturas del índice y de Carathéodory surge la pregunta natural de hallar el valor del índice para los dos únicos pares de parámetros de los campos normales que admiten una inmersión isométrica en \mathbb{R}^3 . Sin embargo, no se sabe aún cual es el valor de este índice y no se espera que se pueda dar una respuesta pronta.

Apéndice A

Construcciones en haces vectoriales

A.1 La suma de Whitney

Sean V, W dos espacios vectoriales reales de dimensión finita, entonces la suma directa $V \oplus W$ de estos dos espacios está definida como el producto cartesiano $V \times W$ con operaciones de suma y producto por un escalar definidas componente a componente. Esta misma construcción se puede llevar a cabo sobre una variedad si reemplazamos V y W por haces vectoriales.

Proposición A.1. Sean E, F dos haces vectoriales reales sobre una variedad M . Denotemos por E_x a la fibra de E sobre x . Definimos la suma de Whitney, $E \oplus F$, de los haces como

$$E \oplus F = \{(x, v) \mid x \in M, v \in E_x \oplus F_x\}.$$

Si $\pi((x, v)) = x$, se cumple que $\pi : E \oplus F \rightarrow M$ es un haz vectorial sobre M .

A.2 Tensores con valores en un haz vectorial

Sea M^n una variedad Riemanniana. Entonces para cada par de enteros p, q podemos construir el haz vectorial $\otimes^{p,q}TM$ de tensores p veces contravariantes y q veces covariantes como es usual. Sea $\pi : E \rightarrow M$ un haz vectorial arbitrario real en el que hemos introducido una métrica Riemanniana. Para cada $x \in M$ denotemos por E_x a la fibra de E sobre x y por ΓE al espacio de todas las secciones diferenciables de E .

Definición A.1. Sean $\pi : E \rightarrow M$ y $\rho : F \rightarrow M$ dos haces vectoriales reales, entonces el producto tensorial $E_x \otimes F_x$ está bien definido. Sea $E \otimes F$ el espacio cuya fibra en x es el producto tensorial $E_x \otimes F_x$, $E \otimes F$ es un haz vectorial que llamaremos el producto tensorial de E y F .

Dados dos espacios vectoriales V y W existe un isomorfismo natural entre $W^* \otimes V$, donde W^* es el espacio dual de W , y el espacio $\text{Hom}(W, V)$ de transformaciones lineales de W a V dado en generadores por $(f \otimes v)(x) = f(x)v$. Esta misma construcción se extiende a los haces vectoriales de manera que existe un isomorfismo de haces vectoriales a lo largo de la identidad entre $F^* \otimes E$, donde F^* es el haz vectorial cuya fibra en x es el espacio dual F_x , y $\text{Hom}(E, F)$, el haz vectorial cuya fibra en x son todas las transformaciones lineales entre E_x y F_x . Dado que una forma diferencial $\omega \in \Lambda^1 M$ es una sección de T^*M , para cualquier campo vectorial $X \in \Gamma(TM)$, podemos identificar

el producto $\omega \otimes X$ con un operador de $\Gamma(TM)$ a $\Gamma(TM)$. Esta construcción se puede generalizar a un producto arbitrario $\Lambda^1 M \otimes E$, de modo que podemos identificar a un vector $\omega \otimes v \in \Lambda^1 M \otimes E$ con un operador lineal $\Gamma(TM) \rightarrow \Gamma E$. En general, se tiene el siguiente teorema.

Teorema A.1. *Sea $\otimes^{0,k} TM$ el haz vectorial sobre M que consiste de todos los tensores k veces covariantes. Entonces existe un isomorfismo de haces vectoriales a lo largo de la identidad entre $(\otimes^{0,k} TM) \otimes E$ y $\text{Hom}(\times^k TM, E)$, el haz vectorial sobre M cuya fibra en x es el espacio de todas las funciones k veces multilineales de $T_x M$ a E tal que si η es la imagen de $(\omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k) \otimes v$ bajo este isomorfismo, entonces $\eta(X_1, \dots, X_k) = \omega^1(X_1) \cdots \omega^k(X_k)v$.*

DEMOSTRACION. [Bosquejo de la prueba] Para cada $x \in M$, la fibra de $\otimes^{0,k} TM$ en x es el espacio $\otimes^k T_x^* M$, donde $T_x^* M$ es el espacio dual de $T_x M$, pero por las propiedades del producto tensorial de espacios vectoriales sabemos que existe un único isomorfismo \tilde{f} entre el espacio T de funciones k veces multilineales en $T_x M$ y $\otimes^k T_x^* M$ tal que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \otimes^k T_x^* M & \xrightarrow{\tilde{f}} & T \\ p \uparrow & & \parallel \\ \times^k T_x^* M & \xrightarrow{f} & T \end{array}$$

donde $\rho(\omega^1 \times \cdots \times \omega^k) = \omega^1 \otimes \cdots \otimes \omega^k$ es la proyección natural, y si $g = f(\omega^1 \times \cdots \times \omega^k)$, entonces $g(v_1, \dots, v_k) = \omega^1(v_1) \cdots \omega^k(v_k)$. A partir del isomorfismo \tilde{f} podemos construir un isomorfismo F de haces vectoriales entre $\otimes^{0,k} TM$ y el haz vectorial cuya fibra en x es el espacio de todas las funciones k veces multilineales de $T_x M$ a \mathbb{R} . Como $\otimes^{0,1} TM$ es el espacio de las 1 formas diferenciales, ya hemos probado que $(\otimes^{0,1} TM) \otimes E$ es isomorfo a $\text{Hom}(TM, E)$. El resultado general se sigue por inducción utilizando el isomorfismo F . \square

Ejemplo A.4. Sea α el operador de la segunda forma fundamental definido en el capítulo 1, entonces $\alpha \in \text{Hom}(TM \times TM, NM)$, por lo que salvo isomorfismo podemos suponer que $\alpha \in (\otimes^{0,2} TM) \otimes NM$. Si ν, ν^\perp es una pareja de campos normales a la superficie que forman una base ortonormal de NM , entonces para cada par de vectores tangentes X, Y podemos descomponer $\alpha(X, Y)$ como $l_\nu(X, Y)\nu + l_{\nu^\perp}(X, Y)\nu^\perp$, donde l_ν, l_{ν^\perp} son funciones bilineales simétricas definidas en $T_x M$ para cada x . Por lo tanto, utilizando el isomorfismo del teorema A.1 podemos escribir $\alpha = l_\nu \otimes \nu + l_{\nu^\perp} \otimes \nu^\perp$.

Teorema A.2. *Sean E y F haces vectoriales sobre M con métricas Riemannianas g y h definidas en cada uno de ellos. Existe una única métrica $g \otimes h$ en $E \otimes F$ tal que*

$$g \otimes h(v \otimes w, v' \otimes w') = g(v, v')h(w, w').$$

Si en el haz E existe una métrica Riemanniana podemos construir una conexión en $(\otimes^{0,k} TM) \otimes E$ tal que se satisfaga la regla de Leibniz en el producto tensorial.

Teorema A.3. Sean ∇ una conexión en M y ∇' una conexión en el haz vectorial Riemanniano E . Entonces existe una única conexión $\tilde{\nabla}$ en $(\otimes^{0,k}TM) \otimes E$ tal que se cumplen las siguientes condiciones.

- a) $\tilde{\nabla}_X v = \nabla'_X v$, si $v \in \Gamma E$.
- b) $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y$, si $Y \in \Gamma M$.
- c) $\tilde{\nabla}_X(v \otimes Y) = (\nabla'_X v) \otimes Y + v \otimes \nabla_X Y$.
- d) Además, si la métrica en $(\otimes^{0,k}TM) \otimes E$ es la métrica producto y tanto ∇ como ∇' son compatibles con sus respectivas métricas, entonces $\tilde{\nabla}$ también es una conexión compatible con la métrica.

La prueba del teorema es consecuencia inmediata de las condiciones enumeradas.

Sean $\alpha, \beta \in \text{Hom}(\times^k TM, E)$, entonces si E posee una métrica Riemanniana h , podemos definir el producto $\langle \alpha, \beta \rangle$ como

$$\langle \alpha, \beta \rangle_x = \sum_{i_1, \dots, i_k} h(\alpha(V_{i_1}, \dots, V_{i_k}), \beta(V_{i_1}, \dots, V_{i_k})), \quad (\text{A.1})$$

donde V_1, \dots, V_n es una base ortonormal de $T_x M$. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ es una métrica Riemanniana bien definida en $\text{Hom}(\times^k TM, E)$. Si $E = C^\infty(M)$ y h_x es la métrica usual en \mathbb{R} es un hecho conocido de la geometría Riemanniana que (A.1) es la única métrica Riemanniana en $\otimes^{0,k}TM$ tal que la base dual de cualquier base ortonormal en TM genera una base ortonormal en $\otimes^{0,k}TM$ (véase por ejemplo [Lee97]). En tal caso seguiremos denotando por g a la métrica en $\otimes^{0,k}TM$.

Proposición A.2. Sea g la métrica dada en M y h la métrica en E , entonces si F es el isomorfismo dado en el teorema A.1 se cumple que F es una isometría de haces vectoriales, es decir que si $\alpha, \beta \in \otimes^{0,k}TM \otimes E$, entonces

$$\langle F(\alpha), F(\beta) \rangle = g \otimes h(\alpha, \beta).$$

La prueba de la proposición es un cálculo directo utilizando el teorema A.1. Si E posee no sólo una métrica Riemanniana sino también una conexión ∇' , podemos construir una conexión $\bar{\nabla}$ en $\text{Hom}(\times^k TM, E)$ definiendo

$$(\bar{\nabla}_X \alpha)(X_1, \dots, X_k) = \nabla'_X(\alpha(X_1, \dots, X_k)) - \sum_i \alpha(X_1, \dots, \nabla_X X_i, \dots, X_k).$$

De manera que si ∇ y ∇' son compatibles con sus métricas, entonces $\bar{\nabla}$ es compatible con la métrica dada en la ecuación (A.1).

Proposición A.3. Sea α una sección diferenciable de $\otimes^{0,k}TM \otimes E$. Denotemos por $\tilde{\nabla}$ a la conexión para $\otimes^{0,k}TM \otimes E$ dada en el teorema A.3. Entonces

$$F(\tilde{\nabla}_X \alpha) = \bar{\nabla}_X(F(\alpha)).$$

La prueba es de nueva cuenta un cálculo laborioso utilizando una base para TM .

Ejemplo A.5. Hemos visto en el ejemplo anterior que podemos identificar al operador de la segunda forma fundamental α con $\beta = l_\nu \otimes \nu + l_{\nu^\perp} \otimes \nu^\perp$. Utilizando las proposiciones A.2 y A.3 podemos calcular $\bar{\nabla}_X \alpha$ hallando primero $\tilde{\nabla}_X \beta$. Esto es importante al realizar los cálculos pues $\tilde{\nabla}$ tiene más propiedades algebraicas que $\bar{\nabla}$, siendo la regla de Leibniz para el producto tensorial la más notable. Esto nos permite simplificar enormemente los cálculos.

A.3 El haz de direcciones

Sea M una variedad diferenciable, denotemos por $TM - \{0\} = \{v \in TM \mid v \neq 0\}$. Podemos probar que $TM - \{0\}$ es una subvariedad diferenciable de la misma dimensión que TM introduciendo una métrica Riemanniana en M , ya que $TM - \{0\} = N^{-1}(\mathbb{R} - \{0\})$, donde $N(v) = g(v, v)$ es la norma al cuadrado de v . En $TM - \{0\}$ introduzcamos la siguiente relación: $v \sim w$ si y solo si $\pi(v) = \pi(w)$, donde $\pi : TM \rightarrow M$ es la proyección natural, y si existe un número $\lambda \neq 0$ tal que $v = \lambda w$.

Proposición A.4. \sim es una relación de equivalencia en $TM - \{0\}$.

Sea $p : TM - \{0\} \rightarrow TM - \{0\} / \sim$ la proyección natural. Si dotamos de la topología cociente al espacio $TM - \{0\}$ entonces obtenemos un espacio de Hausdorff, pues si $[v] \neq [w]$ entonces $\pi(v) \neq \pi(w)$ por lo que existen vecindades U, V de $\pi(v)$ y $\pi(w)$ respectivamente tales que $U \cap V = \emptyset$, por lo que $p(\pi^{-1}(U))$ y $p(\pi^{-1}(V))$ son dos abiertos disjuntos que contienen a $[v]$ y $[w]$.

Sea $\theta : \mathbb{R} - \{0\} \times TM - \{0\} \rightarrow TM - \{0\}$ dada por $\theta(\lambda, v) = \lambda v$. θ es una acción diferenciable de \mathbb{R} en $TM - \{0\}$ tal que la relación de equivalencia inducida por la acción coincide con la relación dada en la proposición A.4. Además θ es una acción libre, por lo que se tiene la siguiente proposición.

Proposición A.5. Sean $PM = TM - \{0\} / \sim$ el espacio cociente de la relación de equivalencia con la topología cociente, y $p : TM - \{0\} \rightarrow PM$ la proyección usual. Entonces PM tiene una estructura de variedad diferenciable tal que p es un difeomorfismo local.

Como construimos PM de manera que cada fibra $p^{-1}(z)$ se encuentra en el mismo espacio tangente, podemos definir $\pi'(z)$ como $\pi(p^{-1}(z))$, entonces π' es una función diferenciable pues p es un difeomorfismo local y $\pi|_{TM-\{0\}} = \pi' \circ p$.

Definición A.2. PM con la proyección π' es el haz proyectivo de la variedad.

Definición A.3. Sean M, N y H variedades diferenciables. La terna (M, N, p) , donde $p : M \rightarrow N$ es una función diferenciable, es un haz fibrado con fibra H , si se satisfacen las condiciones siguientes.

- a) p es sobre.
- b) Para cada $x \in N$, $p^{-1}(x)$ es difeomorfo a H .
- c) Para cada $x \in N$ existe una vecindad U y un difeomorfismo $\varphi : p^{-1}(U) \rightarrow U \times H$ tal que si $z \in p^{-1}(U)$, entonces $\varphi(z) = (p(z), g(z))$ para alguna función diferenciable $g : p^{-1}(U) \rightarrow H$.

A los difeomorfismos locales φ dados en el inciso c de la definición A.3 se les llama trivializaciones.

Definición A.4. Sea $p : M \rightarrow N$ un haz fibrado. Una función diferenciable $s : N \rightarrow M$ es una sección del haz si se satisface que $p \circ s = Id$.

A diferencia de los haces vectoriales, donde trivialmente siempre existe la sección cero, en los haces fibrados no siempre es posible que exista una sección. En el capítulo 3 utilizamos una variación de la definición A.4.

Definición A.5. Sea A un subconjunto cerrado de N . Una función diferenciable $s : N - A \rightarrow M$ es una sección si $p \circ s$ es la identidad en $N - A$.

Definición A.6. Si s es una sección del haz proyectivo a lo largo de $M - A$, decimos que s es un campo de direcciones. Si $p \in A$, entonces p es una singularidad del campo.

Definición A.7. Sean $f : N \rightarrow N'$, $F : M \rightarrow M'$ funciones diferenciables entre los haces fibrados (M, N, p) y (M', N', p') . F es un morfismo de haces fibrados a lo largo de f si el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{F} & M' \\ p \downarrow & & p' \downarrow \\ N & \xrightarrow{f} & N' \end{array}$$

De esta manera, el haz proyectivo es un haz fibrado con fibra $P^1\mathbb{R}^n$, el espacio proyectivo real. Sea g una métrica Riemanniana en M . Definamos $SM = N^{-1}(1)$, entonces 1 es un valor regular de N por lo que SM es una subvariedad de TM . SM es el haz de esferas de M . Si denotamos por $\tau : SM \rightarrow M$ a la restricción de π a SM entonces obtenemos un haz fibrado con fibra S^n . Sea $\rho : SM \rightarrow PM$ la función dada por $\rho(v) = p(v)$, entonces ρ es una función diferenciable por ser la restricción de p a una subvariedad.

Proposición A.6. ρ es un morfismo de haces fibrados a lo largo de la identidad.

Sea U una vecindad de M tal que (U, φ) es una trivialización de SM y (U, ψ) es una trivialización de PM . Entonces $\psi \circ \rho \circ \varphi^{-1}(x, v) = (x, [v])$, donde $[v] = \{v, -v\}$ es la clase de equivalencia de v en $P^1\mathbb{R}^n$. Por lo tanto, localmente ρ es el producto $id \times \tilde{\pi}$, donde id es la identidad en U , $\tilde{\pi} : S^n \rightarrow P^1\mathbb{R}^n$ es la proyección usual y $id \times \tilde{\pi}(x, v) = (x, \tilde{\pi}(v))$.

Teorema A.4. $\rho : SM \rightarrow PM$ es un espacio cubriente de PM .

DEMOSTRACION. Sean $U' = \pi'^{-1}(U)$ y $f = \psi \circ \rho \circ \varphi^{-1}$. Entonces ψ es un difeomorfismo entre U' y $U \times P^1\mathbb{R}^n$ tal que $\rho^{-1}(U') = (\psi \circ \rho)^{-1}(U \times P^1\mathbb{R}^n)$, pero $\psi \circ \rho = f \circ \varphi$, entonces

$$\rho^{-1}(U') = \varphi^{-1}(f^{-1}(U \times P^1\mathbb{R}^n)).$$

Como $f = id \times \tilde{\pi}$, $\rho^{-1}(U') = \varphi^{-1}(U \times SM)$. Sea $z \in U'$, tal que $\psi(z) = (x, y)$. Como S^n es un cubriente doble de $P^1\mathbb{R}^n$ existe una vecindad V de y tal que $\tilde{\pi}^{-1}(V) = V_1 \cup V_2$, con V_1 y V_2 disjuntos tales que la restricción de $\tilde{\pi}$ a cada vecindad V_i es un difeomorfismo. Sean $V' = \psi^{-1}(U \times V)$ y $V'_i = \varphi^{-1}(U \times V_i)$, entonces $\rho^{-1}(V') = V'_1 \cup V'_2$, y V'_1, V'_2 son ajenos. Sea ρ_i la restricción de ρ a V'_i y f_i la restricción de f a V_i , entonces

$$\rho_i = \psi^{-1} \circ f_i \circ \varphi.$$

Por lo tanto, ρ_i es un difeomorfismo entre V'_i y V' de donde se sigue que ρ es un mapeo cubriente. \square

Bibliografía

- [AS60] L.V.Ahlfors and L.Sario, *Riemann surfaces*, Princeton University Press, Princeton, N. J., 1960.
- [dC92] Manfredo P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.
- [GRSB] J. M. Gutiérrez Núñez, C. Romero Fuster, and F. Sánchez-Bringas, *Codazzi fields and loewner's conjecture for surfaces in 4-space*, por publicar.
- [GS82] C. Gutierrez and J. Sotomayor, *Structurally stable configurations of lines of principal curvatures*, *Astérisque* **98-99** (1982), 195–215.
- [GS98] ———, *Lines of curvature, umbilic points and carathéodory conjecture*, *Resenhas* **3** (1998), 291–322.
- [GSB98] C. Gutierrez and F. Sánchez-Bringas, *On a loewner's umbilic index conjecture for surfaces in \mathbb{R}^4* , *J. Dynam. Control Systems* **4** (1998), no. 1, 127–136.
- [Gui74] Victor Guillemin, *Differential topology*, Prentice-Hall, 1974.
- [Ham40] H. Hamburger, *Beweis einer carathéodoryschen vermutung i*, *Ann. of Math.* **41** (1940), 63–68.
- [HCV32] D. Hilbert and S. Cohn-Vossen, *Geometry and the imagination*, Chelsea Publishing Company, New York, 1932.
- [Lee97] John M. Lee, *Riemannian manifolds: An introduction to curvature*, Springer-Verlag, New-York, 1997.
- [Mil65] John W. Milnor, *Topology from the differentiable viewpoint*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1965.
- [Nav01] Matías Navarro, *Bifurcaciones de puntos umbílicos simples de superficies inmersas en \mathbb{R}^4* , Tesis de Doctorado, Universidad Nacional Autónoma de México, 2001.
- [NSB01] M. Navarro and F. Sánchez-Bringas, *Bifurcations of simple umbilical points defined by vector fields normal to a surface immersed in \mathbb{R}^4* , *Qual. Theory Dyn. Syst.* **2** (2001), 359–380.