

Notas sobre el producto tensorial *

Israel García Lara

February 18, 2004

1 introducción

Desde principios del siglo pasado los tensores se convirtieron en pieza fundamental para la física moderna. Sin embargo en los cursos de física básicos aún se sigue utilizando (hasta donde el autor sabe) la vieja presentación de los tensores por medio de índices y de como estos se transforman bajo cambios de coordenadas. Si bien esta manera de representarlos hace que su presentación al estudiante sea rápida, también hace a un lado el aspecto intrínseco (es decir libre de coordenadas) de la materia.

Estas notas se dividen de la siguiente manera: primero definimos los tensores como en [sp] y probamos algunas propiedades básicas de ellos, posteriormente enunciamos algunas otras manera de construir el producto tensorial y finalmente se explica la relación de todo esto con la computación cuántica. Cabe señalar que la presentación que se hace del producto tensorial es más útil para estudiar la *teoría de la relatividad* que computación cuántica, sin embargo hemos escogido este enfoque por ser mucho más general.

2 Tensores

Definición 1 Sea V un espacio vectorial sobre un campo K (por ejemplo K puede ser $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$), definimos el espacio de los tensores de orden k sobre V como el conjunto de todas las funciones

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ copias}} \rightarrow K$$

tal que F es multilineal, es decir que para cualesquiera $x_i, y_i \in V, \lambda \in K$ se cumple

$$1. F(x_1, x_2, \dots, x_i + y_i, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n) + F(x_1, x_2, \dots, y_i, \dots, x_n)$$

*Notas escritas con motivo del seminario de computo cuántico de la facultad de matemáticas

$$2. F(x_1, x_2, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n) = \lambda F(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$$

en otras palabras tenemos que F *separa sumas y escalares* como se suele decir. A partir de ahora denotaremos al espacio de los tensores de orden k sobre V como $\tau^k V$.

Consideremos $f, g \in \tau^k V$, $\lambda \in K$. Si definimos la suma de dos tensores como

$$\begin{aligned}(f + g)(x_1, \dots, x_n) &:= f(x_1, \dots, x_n) + g(x_1, \dots, x_n) \\ (\lambda f)(x_1, \dots, x_n) &:= \lambda f(x_1, \dots, x_n)\end{aligned}$$

entonces es fácil ver que $\tau^k V$ se convierte en un espacio vectorial sobre K .

Ejemplo 1 Sea $V^* = \{f : V \rightarrow K \mid f \text{ es lineal}\}$ el espacio dual de V . Por la mera definición tenemos que V^* es el espacio de los tensores de orden 1 sobre V .

A partir de ahora y por simplicidad supondremos que $V = \mathbb{R}^n$ y $K = \mathbb{R}$ aunque no es difícil ver que todos los resultados que obtendremos se aplican igualmente bien a V y K .

Definición 2 Sean $f \in \tau^k \mathbb{R}^n$, $g \in \tau^l \mathbb{R}^n$ definimos $f \otimes g \in \tau^{k+l} \mathbb{R}^n$, el producto tensorial de f y g , como

$$f \otimes g(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l) := f(x_1, \dots, x_k)g(y_1, \dots, y_l)$$

i.e. evaluamos la función f en las primeras k variables, la función g en las segundas l y los números que obtenemos los multiplicamos.

Un cálculo directo muestra que $f \otimes g$ es realmente un tensor de orden $k + l$. El producto tensorial tiene las siguientes propiedades

Teorema 1 Si $\lambda \in \mathbb{R}$, $f, f' \in \tau^k \mathbb{R}^n$, $g, g' \in \tau^l \mathbb{R}^n$ y $h \in \tau^m \mathbb{R}^n$ entonces

1. $(\lambda f) \otimes g = f \otimes (\lambda g) = \lambda(f \otimes g)$
2. $(f \otimes g) \otimes h = f \otimes (g \otimes h) = f \otimes g \otimes h$
3. $(f + f') \otimes g = f \otimes g + f' \otimes g$
4. $f \otimes (g + g') = f \otimes g + f \otimes g'$

La demostración es un largo cálculo que se deja de ejercicio al lector ¹

Sea $\{e_1, \dots, e_n\}$ una base de $\mathbb{R}^n$. Recordemos que dada esta base podemos definir la *base dual* en $(\mathbb{R}^n)^*$, $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$, dada por $\theta_i(x) = x_i$ (x_i es la i -ésima coordenada del vector x) ². Entonces es un hecho básico

¹Yo recomendaría hacer esto una sola vez en la vida

²Si $x = \sum x_i e_i$ entonces su i -ésima coordenada es x_i

Teorema 2 El conjunto $\{\theta_{i_1} \otimes \theta_{i_2} \otimes \cdots \otimes \theta_{i_k} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$ es una base para $\tau^k \mathbb{R}^n$ que por lo tanto es un espacio vectorial de dimensión n^k

Prueba. Sea β el conjunto que queremos probar que es base, entonces

β genera $\tau^k \mathbb{R}^n$:

Sea $f \in \tau^k \mathbb{R}^n$, entonces como $\{e_1, \dots, e_n\}$ es una base de $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_k) &= f\left(\sum_i a_{1i} e_i, \dots, \sum_i a_{ki} e_i\right) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n a_{1i_1} \cdots a_{ki_k} f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n \theta_{i_1}(x_1) \cdots \theta_{i_k}(x_k) f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \\ &= \sum_{i_1=1}^n \cdots \sum_{i_k=1}^n f(e_{i_1}, \dots, e_{i_k}) \theta_{i_1} \otimes \cdots \otimes \theta_{i_k}(x_1, \dots, x_k) \end{aligned}$$

Por lo tanto β genera $\tau^k \mathbb{R}^n$.

β es un conjunto linealmente independiente de vectores:

Escribamos una combinación lineal de β igualada a cero

$$\sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} \theta_{i_1} \otimes \cdots \otimes \theta_{i_k} = 0$$

escojamos k vectores básicos $e_{r_1}, \dots, e_{r_k}$ arbitrarios, entonces

$$\begin{aligned} 0 &= \sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} \theta_{i_1} \otimes \cdots \otimes \theta_{i_k}(e_{r_1}, \dots, e_{r_k}) \\ &= \sum a_{i_1 i_2 \dots i_k} \theta_{i_1}(e_{r_1}) \cdots \theta_{i_k}(e_{r_k}) \\ &= a_{r_1 r_2 \dots r_k} \end{aligned} \tag{1}$$

donde hemos usado que $\theta_s(e_t)$ es uno solo si $t = s$ y cero en cualquier otro caso.

Por lo tanto como la combinación lineal dada fue arbitraria, por (1) concluimos que β es un conjunto linealmente independiente de vectores.

■

Hasta ahora los tensores que hemos estudiado son llamados *tensores covariantes*, en contraste con los *tensores contravariantes* y los *tensores mixtos* que definiremos a continuación. Recuerdese que aunque trabajamos en $\mathbb{R}^n$ todas las construcciones que estamos haciendo se pueden realizar en un espacio vectorial arbitrario sobre un campo arbitrario.

2.1 Otras clases de tensores

Sea V un espacio vectorial arbitrario sobre un campo K . Para cada $v \in V$ podemos definir un operador lineal ³ $f_v : V^* \rightarrow K$ dado por $f_v(h) := h(v)$. Nótese que como f_v es una función lineal de V^* a K resulta que f_v pertenece al espacio dual de V^* , es decir que $f_v \in (V^*)^* = V^{**}$. Si definimos la función $F : V \rightarrow V^{**}$ dada por $F(v) := f_v$ es fácil ver que F es una transformación lineal de V en el doble espacio dual V^{**} . Si el espacio V es de dimensión finita ⁴ entonces se puede probar que F es un isomorfismo llamado el isomorfismo canónico de V y V^{**} (Se le llama canónico porque es independiente de que base se escogió para V y su doble dual).

Como antes por simplicidad consideraremos $V = \mathbb{R}^n$ y $K = \mathbb{R}$.

Definición 3 Sea f un tensor de orden k sobre $(\mathbb{R}^n)^*$ entonces diremos que f es un tensor contravariante. Al conjunto de todos los tensores contravariantes lo denotaremos por $\tau^k(\mathbb{R}^n)^*$

Consideremos el isomorfismo F dado anteriormente. Así podemos identificar a $\mathbb{R}^{n**}$ con $\mathbb{R}^n$, entonces $\tau^1(\mathbb{R}^n)^* = \mathbb{R}^{n**} = \mathbb{R}^n$ y bajo esta identificación podemos suponer que cualquier vector $v \in \mathbb{R}^n$ es un tensor contravariante de orden 1 tal que $v(h) = h(v)$ para cualquier funcional lineal h . De este modo si $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base para $\mathbb{R}^n$ resulta inmediato que

Teorema 3 $\{v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_k} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n\}$ es una base para $\tau^k(\mathbb{R}^n)^*$

Ahora que sabemos qué es un tensor covariante y un tensor contravariante resulta bastante natural definir los tensores mixtos

Definición 4 Si

$$f : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{r\text{-veces}} \times \underbrace{(\mathbb{R}^n)^* \times \dots \times (\mathbb{R}^n)^*}_{s\text{-veces}} \rightarrow \mathbb{R}$$

decimos que f es un tensor r veces covariante y s veces contravariante. Definimos el orden de f como (r, s) . Al espacio de todos los tensores mixtos de orden (r, s) se le denota $\tau_s^r(\mathbb{R}^n)$.

A partir de lo que hemos estudiado de los tensores resulta bastante natural la siguiente

Proposición 1 Si $v_1, \dots, v_n$ es una base para $\mathbb{R}^n$ con la correspondiente base dual $\theta_1, \dots, \theta_n$ entonces el conjunto $\{v_{i_1} \otimes \dots \otimes v_{i_k} \otimes \theta_{j_1} \otimes \dots \otimes \theta_{j_l} \mid 1 \leq i_1, \dots, i_k, j_1, \dots, j_l \leq n\}$ es una base para $\tau_l^k(\mathbb{R}^n)$ que por lo tanto tiene dimensión $n^k \cdot n^l$.

³Operador lineal, función lineal, funcional lineal o incluso transformación lineal son varios nombres que la gente le da a este tipo de función y a muchos otros más por lo que se debe tener cuidado del contexto en que se usa el nombre

⁴O de manera más general es un espacio de Hilbert

La demostración es una repetición casi palabra por palabra de la prueba del teorema (2), con una pequeña diferencia: para probar independencia lineal en lugar de evaluar en los vectores básicos $e_{r_1}, \dots, e_{r_k}$ es necesario evaluar en los vectores $v_{r_1}, \dots, v_{r_k}, \theta_{s_1}, \dots, \theta_{s_l}$. De cualquier forma se dejan los detalles al lector.

2.2 $\tau_1^1(\mathbb{R}^n) \cong \text{End}\mathbb{R}^n$

Sea $\text{End}\mathbb{R}^n = \{f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ es una transformación lineal}\}$. Muchas veces es útil el siguiente

Teorema 4 $\text{End}\mathbb{R}^n \cong \tau_1^1(\mathbb{R}^n)$

Prueba. Considérese $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n**}$ el isomorfismo canónico que hemos mencionado anteriormente. Definamos $G : \text{End}\mathbb{R}^n \rightarrow \tau_1^1(\mathbb{R}^n)$ y $H : \tau_1^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \text{End}\mathbb{R}^n$ de la siguiente manera:

Dados $\tilde{T} = G(T)$ y $\hat{h} = H(h)$ definamos para cada $v \in V$ y $f \in \mathbb{R}^{n*}$

$$\begin{aligned}\tilde{T}(v, f) &:= f(T(v)) \\ \hat{h}(v) &:= F^{-1}(h(v, \cdot))\end{aligned}$$

donde $h(v, \cdot) \in \mathbb{R}^{n**}$ denota al operador lineal que obtenemos al fijar el valor de la primera variable en h . Un cálculo sencillo demuestra que tanto G como H realmente son operadores lineales. Más aún tenemos que $G \circ H : \tau_1^1(\mathbb{R}^n) \rightarrow \tau_1^1(\mathbb{R}^n)$ es la identidad lo mismo que $H \circ G : \text{End}\mathbb{R}^n \rightarrow \text{End}\mathbb{R}^n$:

$$\begin{aligned}(G \circ H(h))(v, f) &= G(\hat{h})(v, f) \\ &= f(\hat{h}(v)) \\ &= f(F^{-1}(h(v, \cdot))) \\ &= h(v, f)\end{aligned}$$

Luego $G \circ H$ es la identidad en $\tau_1^1(\mathbb{R}^n)$. A su vez

$$\begin{aligned}(H \circ G(T))(v) &= H(\tilde{T})(v) \\ &= F^{-1}(\tilde{T}(v, \cdot)) \\ &= T(v)\end{aligned}$$

donde la última igualdad se debe a que $F^{-1}(\tilde{T}(v, \cdot))$ es el único vector tal que $f(F^{-1}(\tilde{T}(v, \cdot))) = \tilde{T}(v, f)$ pero por definición $f(T(v)) = \tilde{T}(v, f)$, de donde

se sigue la última igualdad.

Por lo tanto $H \circ G$ es la identidad en $End \mathbb{R}^n$ y $\tau_1^1(\mathbb{R}^n) \cong End \mathbb{R}^n$. ■

3 Otras formas de "cocinar" tensores

Hasta ahora hemos visto las propiedades básicas de los tensores desde el punto de vista que mayormente se usa en geometría, sin embargo los tensores son herramientas de origen algebraico y poseen otras maneras de construirse. Cabe señalar que entre las ventajas que tiene la definición que hemos dado se encuentra la naturaleza intrínseca de la definición, es decir libre de coordenadas e índices como el tratamiento antiguo solía tener. Originalmente uno definía los tensores como ciertos números $a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$ tales que $a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$ y $b_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$ representaban el mismo tensor si y solo si

$$b_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} = \sum g_{i_1}^{r_1} \dots g_{i_k}^{r_k} \cdot g_{s_1}^{j_1} \dots g_{s_k}^{j_k} a_{r_1 \dots r_k}^{s_1 \dots s_l} \quad (2)$$

donde los g_j^i forman una matriz invertible y los g_i^j corresponden a los coeficientes de la matriz inversa.

En el lenguaje más modernos que hemos desarrollado hasta ahora la extraña ecuación (2) corresponde a un cambio de coordenadas: si $\{v_1, \dots, v_n\}$, $\{w_1, \dots, w_n\}$ son bases para $\mathbb{R}^n$ con las correspondientes bases duales $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ y $\{\psi_1, \dots, \psi_n\}$ respectivamente y con matriz de cambio de base A para $\mathbb{R}^n$ con coeficientes g_j^i entonces es un hecho conocido de álgebra lineal que la correspondiente matriz de cambio de base para $\mathbb{R}^{n*}$ es la inversa transpuesta de A que tiene coeficientes g_i^j . Luego si $\eta \in \tau_l^k(\mathbb{R}^n)$ tiene coordenadas $a_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$ en la base $\{v_1 \otimes \dots \otimes v_n \otimes \theta_1 \otimes \dots \otimes \theta_n\}$ y coordenadas $b_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l}$ en la base $\{w_1 \otimes \dots \otimes w_n \otimes \psi_1 \otimes \dots \otimes \psi_n\}$ entonces un largo cálculo usando el teorema (1) demuestran que las coordenadas en ambas bases se transforman de acuerdo a la expresión (2).

Sin embargo la definición que hemos dado de los tensores no es ni por mucho la más abstracta, aunque su utilidad radica en que con ella resulta relativamente fácil realizar y entender los cálculos que continuamente aparecen cuando se estudia el formalismo de la geometría diferencial. A continuación presentamos la definición general que se da de los tensores en Álgebra, así como algunas relaciones interesantes con la física.

3.1 La construcción universal

De acuerdo a la definición (2) Si $f \in \tau^k \mathbb{R}^n$ y $g \in \tau^l \mathbb{R}^n$ existe una manera de "Multiplicarlos" obteniendo así su producto tensorial. En la definición algebraica es precisamente esta propiedad la que define a los tensores

Definición 5 Sean V, W espacios vectoriales. Entonces existe un único espacio vectorial $V \otimes W$ y una transformación lineal $\pi : V \times W \rightarrow V \otimes W$ tal que

1. $\pi(V \times W)$ genera $V \otimes W$
2. Para cualquier espacio vectorial H y cualquier función bilineal $F : V \times W \rightarrow H$ existe una única transformación lineal $\hat{F} : V \otimes W \rightarrow H$ tal que $F = \hat{F} \circ \pi$

Muchas veces la segunda propiedad en la definición se expresa diciendo que para la función bilineal F existe una transformación lineal $\hat{F}$ tal que hace el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} V \times W & \xrightarrow{F} & H \\ \pi \downarrow & \nearrow \hat{F} & \\ V \otimes W & & \end{array}$$

Esta manera de definir los tensores resulta un poco más general que la que en estas notas hemos dado. Se puede ver fácilmente que la definición que dimos previamente de los tensores de orden k es un caso particular de esta nueva definición. Por ejemplo tomemos $V = W = \mathbb{R}^{n*}$, entonces en los cursos avanzados de álgebra se demuestra que $\mathbb{R}^{n*} \otimes \mathbb{R}^{n*} \cong (\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^n)^*$ y este espacio a su vez es isomorfo al conjunto de todas las funciones bilineales de $\mathbb{R}^n$, es decir el espacio que originalmente definidos como $\tau^2 \mathbb{R}^n$. De manera similar (es decir utilizando métodos algebraicos) se puede mostrar que todas las formas de tensores que definimos, o sea $\tau^k \mathbb{R}^n$, $\tau^k(\mathbb{R}^n)^*$, $\tau_l^k(\mathbb{R}^n)$ son casos particulares de esta definición.

3.2 Aplicaciones

1. Relatividad especial

En la teoría de la relatividad especial de Einstein se postula que no hay un sistema de referencia preferido, sino que todos son equivalentes. En un lenguaje más formal lo que este postulado dice es puramente geométrico. El sistema de referencia se define como una función $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ diferenciable y con inversa diferenciable (Una tal función es a menudo llamada un *difeomorfismo*).

Entonces lo que el primer postulado de la relatividad especial dice es que cualquier cantidad física que midamos debe ser invariante ante un difeomorfismo.

Resulta interesante que una de los primeros pasos que nos permiten llegar a este resultado es que las ecuaciones de Maxwell son invariantes ante transformaciones de Lorentz. Podemos considerar a las transformaciones de Lorentz que se estudian en física como difeomorfismos de $\mathbb{R}^4$. De este

modo al estudiar las propiedades del campo electromagnético por medio de las ecuaciones de Maxwell resulta que si $E : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $B : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ representan los campos eléctrico y magnético respectivamente en el espacio-tiempo y $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ es una transformación de Lorentz entonces $E \circ F$ y $B \circ F$ también satisfacen las ecuaciones de Maxwell, lo cual va muy bien con nuestra teoría pues desde el punto de vista físico $E \circ F$ y $B \circ F$ representan a los campos eléctrico y magnéticos como los "mide" otro observador.

Ahora bien el segundo postulado de la relatividad especial dice que la velocidad de la luz es la misma para todos los observadores sin importar el estado de movimiento *no acelerado* en que se encuentren. Supongamos que $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ represente el vector de posición de un rayo de luz en el tiempo t tal como lo mide un observador S . Sea S' un segundo observador. S' posee su propio sistema de referencia, lo cual se traduce en un difeomorfismo $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$. Supongamos además que $F(x, y, z, t) = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, entonces $y = (f_1 \circ x, f_2 \circ x, f_3 \circ x)$ representa el vector de posición de la luz tal como lo mide el segundo observador.

A partir de la invariancia de la velocidad de la luz tenemos que $\|\dot{x}\|^2 = \|\dot{y}\|^2 = c^2$, donde el punto encima de los vectores x , y representa derivación. Si escribimos

$$\dot{x} = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt} \right)$$

resulta

$$\frac{dx_1^2}{dt} + \frac{dx_2^2}{dt} + \frac{dx_3^2}{dt} = c^2 \quad (3)$$

Sea $v = \left(\frac{dx_1}{dt}, \frac{dx_2}{dt}, \frac{dx_3}{dt}, c \right) \in \mathbb{R}^4$, y definamos el tensor $g \in \tau^2 \mathbb{R}^4$ como

$$g((x_1, x_2, x_3, x_4), (y_1, y_2, y_3, y_4)) := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4 \quad (4)$$

entonces la ecuación (3) es equivalente a pedir $g(v, v) = 0$.

Cabe señalar que g es muy parecido a un producto interno, de hecho se puede verificar que g es una *métrica semi-riemanniana* y que si aplicamos las técnicas de geometría diferencial para definir el *tensor de curvatura* asociado resulta que $\mathbb{R}^4$ con esta métrica es un espacio plano. A partir de este hecho descubierto por Minkowski ya estamos en posición de extendernos aún más y hablar de relatividad general.

2. Un poco de geometría

A partir del tensor métrico que aparece en (4) podemos definir el tensor de curvatura R , que es un tensor covariante de orden 4, así mismo tenemos el tensor de Ricci, R_c también covariante y de orden dos, que está definido

como la contracción del tensor de curvatura (ver [Lee])⁵. También dentro del inmenso zoológico de tensores que tenemos definidos en geometría diferencial tenemos al tensor de curvatura escalar S , que es un tensor de orden 0 (es decir que S es simplemente una función) definido como la (única) contracción del tensor de Ricci.

Para el lector interesado también se recomienda el libro de Do Carmo ([dC]).

3. Por fin Relatividad General

La relevancia para la física de las construcciones puramente geométricas mencionadas arriba resulta de las ecuaciones de Einstein. Alrededor de 1915 Albert Einstein terminaba por fin su idea de la teoría general de la relatividad, una idea que le tomó poco más de 10 años expresar. En esta teoría él explicaba la fuerza de gravedad como un fenómeno puramente geométrico. De acuerdo a la teoría la materia "curva" al espacio-tiempo de manera proporcional a su densidad. Recuérdese que ya habíamos definido antes un tensor métrico en el caso de la relatividad especial (ecuación 4), pues bien, en el caso general suponemos que el espacio-tiempo en el que vivimos también posee un tensor métrico que seguiremos llamando g . Asociado con este tensor tenemos un tensor de curvatura R y correspondientes tensores Rc y S tal como se discutió anteriormente. Lo que Einstein propuso en 1915 es que el tensor métrico del espacio-tiempo debería de cumplir las llamadas *ecuaciones de campo* de la relatividad

$$Rc - 8\pi Sg = \rho \quad (5)$$

donde ρ es un tensor covariante de orden 2 llamado el tensor de energía momento y que representa cómo se distribuye toda la materia y energía en el espacio-tiempo. Finalmente mencionemos que a la ecuación (5) le llamamos ecuaciones de campo, en plural, pues si fijamos una base, dx, dy, dz, dt para $\mathbb{R}^{4*}$ y escribimos la ecuación (5) en coordenadas resultan $4^2 = 16$ ecuaciones de la forma $Rc_{ij} - 8\pi Sg_{ij} = \rho_{ij}$.

4 Computación Cuántica

Por fin, después de la larga preparación podemos hablar del papel que juegan los tensores en computación cuántica. Para mostrar su utilidad empezaremos con una analogía con la computación clásica:

Si tenemos 2 bits, digamos (0, 1), entonces solamente existen 4 maneras de

⁵Si $f = \sum f_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_l} \otimes \theta^{i_1} \dots \otimes \theta^{i_k}$ es un tensor mixto definimos la contracción del primer índice covariante y el primer índice contravariante como $c_1^1(f) = \sum f_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_l} \theta^{i_1}(e_{j_1}) e_{j_2} \otimes \dots \otimes e_{j_l} \otimes \theta^{i_2} \dots \otimes \theta^{i_k}$, de manera similar se definen las demás combinaciones c_s^r como contracciones en el r -ésimo factor covariante y el s -factor contravariante. Es un ejercicio divertido probar que esta definición es independiente de la base elegida

”transformarlos”, a saber, $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$. Ahora en computación cuántica si tenemos dos qubits, para mantener la analogía llamémosles $(|0\rangle, |1\rangle)$, existen una infinidad de maneras de operarlos: la razón se debe a que cada uno de ellos ”vive” en un espacio vectorial de dimensión 2 en el que hay una infinidad de vectores de longitud unitaria a los que podemos asignar el qubit $|0\rangle$ y el qubit $|1\rangle$. Resulta entonces necesario un poco más de terminología para estudiar formalmente los circuitos cuánticos, que son esencialmente transformaciones unitarias entre espacios vectoriales, por ejemplo, podríamos estudiar un sistema compuesto de dos qubits estudiando las propiedades que tiene el producto cartesiano $V \times V$ visto como un espacio vectorial. Pero en lugar de estudiar solamente $V \times V$ preferimos estudiar $V \otimes V$ (que después de todo resulta isomorfo a $V \times V$) y pensar en la pareja de qubits con la que empezamos como el vector $|0\rangle \otimes |1\rangle$. La razón está en la comodidad y la elegancia. Resulta menos engorroso construir nuevos productos hermitianos a partir del que ya tenemos en V para $V \otimes V$ que para el producto cartesiano, además es más fácil estudiar ciertas propiedades de los espacios con producto hermitiano (como la desigualdad de Cauchy) y las transformaciones unitarias, que son elementos de $EndV$, a partir de la identificación natural con $\tau_1^1 V$. En definitiva, podemos afirmar que la razón de complicarnos la vida aprendiendo un poco del álgebra de los tensores es que saber su lenguaje simplifica varios resultados de computación cuántica (y de muchos otros campos) y nos permite verlos desde un punto de vista más elegante.

Bibliografía

[sp]

Michael Spivak; Calculus on manifolds; Addison-Wesley

[dC]

Manfredo P. do Carmo; Riemannian Geometry; Birkhäuser

[Lee]

John M. Lee; Riemannian geometry, an introduction to curvature; Springer-Verlag