

Subvariedades y la conjetura de Caratheodory

Israel García

11 de enero de 2005

1 Geometría de subvariedades

Definición 1.1. Sea $f : M^n \rightarrow N^{n+k}$ una inmersión isométrica entre variedades Riemannianas, entonces M es una subvariedad inmersa de N .

Por simplicidad, diremos que M es una subvariedad de N . Dado el haz tangente TM , para cada $x \in M$ tenemos una descomposición de $T_{f(x)}N$ dada por la suma directa $f_*T_xM \oplus N_xM$, donde N_xM es el complemento ortogonal de f_*T_xM . Sea

$$NM = \{(x, \nu) : x \in M, \nu \in N_xM\}.$$

NM es el haz normal.

Teorema 1.1. NM es una variedad de la misma dimensión que N .

Para una prueba del teorema se puede consultar [Lee97]. Si definimos $\rho : NM \rightarrow M$ como la función $(x, \nu) \mapsto x$ también se puede mostrar que $\rho : NM \rightarrow M$ es un haz vectorial tal como el haz tangente, más aún, como para cada x se tiene que $T_{f(x)}N = T_{f(x)}M \oplus N_xM$ se puede probar que $TN = TM \oplus NM$.

Definición 1.2. Sean X, Y una pareja de campos vectoriales tangentes a M , entonces el operador de segunda forma fundamental está dado por la ecuación

$$\alpha(X, Y) = [\tilde{\nabla}_X Y]^\perp.$$

Además, si ν es un campo vectorial normal a M , la conexión normal $\nabla_X^\perp \nu$ está dada por la ecuación

$$\nabla_X^\perp \nu = [\tilde{\nabla}_X \nu]^\perp,$$

donde $\tilde{\nabla}$ es la conexión de TN .

Se puede probar que para cada $x \in M$ y $\nu \in N_x M$ la transformación lineal $(l_\nu)_x(X, Y) = \langle \alpha(X, Y), \nu \rangle$ es una función bilineal simétrica de $T_x M$, por lo que para cada x y cada $\nu \in N_x M$ existe un único operador lineal autoadjunto $(S_\nu)_x : T_x M \rightarrow T_x M$ tal que

$$l_\nu(X, Y) = \langle X, (S_\nu)_x Y \rangle.$$

Definición 1.3. *La función $S : TM \times NM \rightarrow TM$ tal que $(X, \nu) \mapsto S_\nu(X)$ es el operador de forma.*

Dadas las conexiones tangente y normal a la variedad, podemos calcular los tensores de curvatura de cada una de ellas, y utilizando la descomposición de la conexión $\tilde{\nabla}$ en sus partes tangencial y normal obtenemos las siguientes ecuaciones.

Ecuación de Gauss:

$$Rm(X, Y, Z, W) = \tilde{R}(X, Y, Z, W) + \langle \alpha(X, W), \alpha(Y, Z) \rangle - \langle \alpha(X, Z), \alpha(Y, W) \rangle,$$

Ecuación de Ricci:

$$R^\perp(X, Y)\xi = (\tilde{R}m(X, Y)\xi)^\perp + \alpha(X, S_\xi Y) - \alpha(S_\xi X, Y).$$

Finalmente, calculando la derivada covariante del operador de forma obtenemos la ecuación de Codazzi.

$$(\tilde{R}m(X, Y)Z)^\perp = (\nabla_X^\perp \alpha)(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \alpha)(X, Z).$$

En cada caso, X, Y, Z son campos tangentes a M y ξ es un campo normal.

Teorema 1.2. *Si M es un variedad de curvatura seccional constante c , el tensor de curvatura de M tiene la expresión*

$$Rm(X, Y)Z = c(\langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y).$$

Idea de la prueba. Definamos $\tau(X, Y, Z, W) = c(\langle Y, Z \rangle \langle X, W \rangle - \langle X, Z \rangle \langle Y, W \rangle)$. Hay que probar que τ tiene las mismas simetrías del tensor de curvatura, es decir que se cumplen las ecuaciones

$$(i) \quad \tau(X, Y, Z, W) = -\tau(Y, X, Z, W) = -\tau(X, Y, W, Z).$$

$$(ii) \quad \tau(X, Y, Z, W) = \tau(Z, W, X, Y).$$

- (iii) $\tau(X, Y, Z, W) + \tau(Y, Z, X, W) + \tau(Z, X, Y, W) = 0$ (identidad algebraica de Bianchi).

El resultado se sigue del hecho que cualquier pareja de tensores que satisfacen *i*) – *iii*) y $R(X, Y, Y, X) = \tau(X, Y, Y, X)$ deben ser iguales.

Las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci son llamadas las ecuaciones fundamentales de las subvariedades, pues bajo las condiciones del siguiente teorema no son solo necesarias, sino también suficientes para la existencia de la inmersión isométrica.

Teorema 1.3. Teorema fundamental de las subvariedades.

- a. Supongamos que M^n es una variedad Riemanniana simplemente conexa y $\pi : E \rightarrow M$ es un haz vectorial Riemanniano de rango p con una conexión ∇' compatible con su métrica. Sea α una sección simétrica del haz vectorial $\text{Hom}(TM \times TM, E)$ de funciones bilineales con valores en E . Definamos, para cada sección local ξ de E , un operador $S_\xi : TM \rightarrow TM$ tal que

$$\langle S_\xi X, Y \rangle = \langle \alpha(X, Y), \xi \rangle, \quad X, Y \in TM.$$

Si α y ∇' satisfacen las ecuaciones de Gauss, Codazzi y Ricci para el caso de curvatura constante c , entonces existe una inmersión isométrica $f : M^n \rightarrow Q_c^{n+p}$, donde Q_c^{n+p} es $\mathbb{R}^{n+p}$ si $c = 0$, S_c^{n+p} si $c > 0$ y H_c^{n+p} si $c < 0$, y un isomorfismo de haces vectoriales, $\tilde{f} : E \rightarrow NM$, a lo largo de la identidad, tal que para todos los vectores $X, Y \in TM$ y todas las secciones locales ξ, η en E se cumplen las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{f}(\xi), \tilde{f}(\eta) \rangle &= \langle \xi, \eta \rangle, \\ \tilde{f}(\alpha(X, Y)) &= \bar{\alpha}(X, Y), \\ \tilde{f}(\nabla'_X \xi) &= \nabla_X^\perp(\tilde{f}(\xi)), \end{aligned}$$

donde $\bar{\alpha}$ y $\nabla^\perp$ son la segunda forma fundamental y la conexión normal de f .

- b. Supongamos que f y g son dos inmersiones isométricas de una variedad conexa M^n en Q_c^{n+p} . Sean NM_f , α_f y $\nabla_f^\perp$, el haz normal, segunda forma fundamental y conexión normal de f , y sean NM_g , α_g y $\nabla_g^\perp$ los correspondientes objetos de g . Si existe un isomorfismo de haces vectoriales, $\tilde{\phi} : NM_f \rightarrow NM_g$, tal que para cada $X, Y \in TM$ y cada $\xi, \eta \in NM_f$ se cumplen las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\phi}(\xi), \tilde{\phi}(\eta) \rangle &= \langle \xi, \eta \rangle, \\ \tilde{\phi}(\alpha_f(X, Y)) &= \alpha_g(X, Y), \\ \tilde{\phi}(\nabla_f^\perp \xi) &= \nabla_g^\perp \tilde{\phi}(\xi), \end{aligned}$$

entonces existe una isometría, $\tau : Q_c^{n+p} \rightarrow Q_c^{n+p}$, tal que

$$g = \tau \circ f \quad y \quad \tau_*|_{NM_f} = \tilde{\phi}.$$

Para la prueba del teorema en el caso $c = 0$ se puede consultar [Daj90], para el caso general véase [Spi79] capítulo IV.

1.1 Aplicación a las Superficies en $\mathbb{R}^4$

Supongamos ahora que M es de dimensión dos y $f : M \rightarrow \mathbb{R}^4$. Sea E un subhaz vectorial del haz normal tal que para cada x , la fibra E_x es de dimensión uno. Podemos reescribir las ecuaciones fundamentales para E utilizando la conexión ∇' obtenida al tomar la componente en E de la conexión normal y la componente del operador de segunda forma fundamental en E . En ese caso las ecuaciones fundamentales se simplifican notablemente, pues la ecuación de Ricci se vuelve trivial. A su vez, las ecuaciones restantes se reescriben de la siguiente manera,

Gauss:

$$l_{\nu^\perp} \bullet l_{\nu^\perp} = 0,$$

Codazzi:

$$\tilde{\nabla}_{W_\nu(X,Y)} \nu^\perp = 0,$$

donde,

$$\begin{aligned} l_{\nu^\perp} \bullet l_{\nu^\perp}(X, Y, Z, W) &= l_{\nu^\perp}(X, Z)l_{\nu^\perp}(Y, W) - l_{\nu^\perp}(X, W)l_{\nu^\perp}(Y, Z), \\ W_\nu(X, Y) &= \langle \nabla_Y^\perp \nu^\perp, \nu \rangle X + \langle \nabla_X^\perp \nu, \nu^\perp \rangle Y, \end{aligned}$$

y $\{\nu, \nu^\perp\}$ forman una base ortonormal local de NM tal que $\nu \in E$.

Ejemplo 1.1. Los toros planos. Sean $v = (a, c)$, $w = (b, d)$, vectores linealmente independientes en el plano. El toro plano generado por v y w es la imagen de la inmersión $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ dada por

$$f(\theta, \varphi) = (e^{i(a\theta+b\varphi)}, e^{i(c\theta+d\varphi)}).$$

En particular, si $v = (1, 0)$ y $w = (0, 1)$ obtenemos el toro de Clifford. Sean $X_1 = f_*(\partial_\theta)$ y $X_2 = f_*(\partial_\varphi)$. Definamos

$$X_3 = (e^{i(a\theta+b\varphi)}, 0), \quad X_4 = (0, e^{i(c\theta+d\varphi)}).$$

X_3, X_4 es una base ortonormal del haz normal al toro. Denotemos por e_ν, f_ν, g_ν a los coeficientes de la ν -segunda forma fundamental, entonces tenemos que

$$\begin{aligned} e_{X_3} &= -\langle \tilde{\nabla}_{X_1} X_1, X_3 \rangle = a^2, \\ f_{X_3} &= -\langle \tilde{\nabla}_{X_2} X_1, X_3 \rangle = ab, \\ g_{X_3} &= -\langle \tilde{\nabla}_{X_2} X_2, X_3 \rangle = b^2. \end{aligned}$$

Similarmente tenemos que

$$e_{X_4} = c^2, \quad f_{X_4} = cd, \quad g_{X_4} = d^2.$$

Sea $\nu = AX_3 + BX_4$, un campo normal a la superficie, entonces $\nu^\perp = -BX_3 + AX_4$ es el complemento ortogonal a ν en el haz normal. Por lo tanto, $e_{\nu^\perp} = -Be_{X_3} + Ae_{X_4}$, etc., y si se satisface la ν -ecuación de Gauss, debemos tener que $e_{\nu^\perp}g_{\nu^\perp} - f_{\nu^\perp}^2 = 0$. Realizando los cálculos resulta que

$$e_{\nu^\perp}g_{\nu^\perp} - f_{\nu^\perp}^2 = -AB(ad - bc)^2.$$

Por lo tanto, la ecuación de Gauss se satisface si y solo si $A = 0$ o $B = 0$. Como A y B son funciones continuas tales que $A^2 + B^2 = 1$, en cualquier vecindad conexa del toro los únicos campos normales que satisfacen la ecuación de Gauss son X_3 y X_4 . Finalmente, un cálculo directo muestra que $\langle \tilde{\nabla}_{X_1} X_3, X_4 \rangle = \langle \tilde{\nabla}_{X_2} X_3, X_4 \rangle = 0$, por lo que $W_{X_3} = 0$ y la ecuación de Codazzi se satisface trivialmente. Similarmente tenemos que $W_{X_4} = 0$. Por lo tanto, en cualquier vecindad simplemente conexa del toro existen dos inmersiones isométricas en $\mathbb{R}^3$ con segunda forma fundamental dada.

Ejemplo 1.2. El plano proyectivo. Sea $f : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ la función dada en coordenadas cartesianas por

$$f(x, y, z) = \left(\frac{x^2 - y^2}{2}, xy, xz, yz \right).$$

Entonces f es una función invariante bajo el mapeo antipodal, por lo que f desciende en una función $\tilde{f} : P^2\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^4$, donde $P^2\mathbb{R}$ es el espacio proyectivo real de dimensión 2. En [HCV32] se demuestra que $\tilde{f}$ es un encaje del plano proyectivo en $\mathbb{R}^4$. Como la esfera es un espacio cubriente del plano proyectivo, podemos parametrizar $\tilde{f}$ utilizando la parametrización de la esfera dada en notación compleja por

$$g(\theta, \phi) = (\cos(\theta)e^{i\varphi}, \sin(\theta)), \quad \theta \in (-\pi/2, \pi/2).$$

Sea $h = f \circ g$, entonces

$$h(\theta, \phi) = \left(\frac{\cos^2(\theta)}{2} e^{2\varphi i}, \frac{\sin(2\theta)}{2} e^{\varphi i} \right).$$

Definamos $X_1 = h_*(\partial_\theta)$, $X_2 = h_*(\partial_\varphi)$, a su vez, sean X_3 y X_4 los campos normales dados por

$$X_3 = \left(\frac{-\sin(2\theta)}{2} i e^{2\varphi i}, \cos^2(\theta) i e^{\varphi i} \right), \quad X_4 = \left(-\cos(2\theta) e^{2\varphi i}, \frac{-\sin(2\theta)}{2} e^{\varphi i} \right).$$

Sean $Y_3 = \frac{1}{|X_3|} X_3$ y $Y_4 = \frac{1}{|X_4|} X_4$. Un cálculo directo similar al del ejemplo anterior demuestra que

$$e_{Y_3} = 0, \quad f_{Y_3} = -\cos(\theta), \quad g_{Y_3} = 0.$$

Similarmente,

$$e_{Y_4} = \frac{-1}{|X_4|}, \quad f_{Y_4} = 0, \quad g_{Y_4} = \frac{-\cos^2(\theta)(1 + 3\cos(2\theta))}{2|X_4|}.$$

Si $\nu = AY_3 + BY_4$ es un campo ortonormal, entonces $\nu^\perp = -BY_3 + AY_4$, por lo que

$$e_{\nu^\perp} g_{\nu^\perp} - f_{\nu^\perp}^2 = \frac{\cos^2(\theta)(1 + 3\cos(2\theta))}{2|X_4|^2} A^2 - \cos^2(\theta) B^2.$$

Por lo tanto, la ecuación de Gauss es equivalente a

$$B^2 = \frac{1 + 3\cos(2\theta)}{2|X_4|^2} A^2. \quad (1)$$

Como $|X_4|^2 = 1/4(1 + 3\cos^2(2\theta))$ y $A^2 + B^2 = 1$, al sustituir en (1) tenemos que A y B están determinados por las ecuaciones

$$B^2 = \frac{1 + 3\cos(2\theta)}{6\cos^4(\theta)}, \quad A^2 = \frac{3\cos^4(\theta) - 3\cos^2(\theta) + 1}{3\cos^4(\theta)}.$$

Sea $\omega_3^4(X) = \langle \tilde{\nabla}_X Y_3, Y_4 \rangle$, un cálculo directo muestra que

$$\omega_3^4 = \frac{1}{4|X_4|} (5\sin(\theta) - 3\sin(3\theta)) d\varphi.$$

Por lo tanto, se tiene que $\langle \nabla_X^\perp \nu, \nu^\perp \rangle = -BX(A) + AX(B) + \omega_3^4(X)$, en particular, como A y B únicamente son funciones de θ , tenemos que

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{X_2}^\perp \nu, \nu^\perp \rangle &= \omega_3^4(X_2) = \frac{1}{4|X_4|} (5\sin(\theta) - 3\sin(3\theta)), \\ \langle \nabla_{X_1}^\perp \nu, \nu^\perp \rangle &= -BA' + AB', \end{aligned}$$

donde A' y B' representan las derivadas de A y B . Un cálculo directo muestra que los coeficientes de la primera forma fundamental en la base X_1, X_2 están dados por

$$E = \frac{5 + 3 \cos(4\theta)}{8}, \quad F = 0, \quad G = \cos^2(\theta).$$

Como $F = 0$, la matriz del $\nu^\perp$ -operador de forma en la base X_1, X_2 es

$$[S_{\nu^\perp}] = \begin{pmatrix} \frac{e_{\nu^\perp}}{E} & \frac{f_{\nu^\perp}}{G} \\ \frac{f_{\nu^\perp}}{E} & \frac{g_{\nu^\perp}}{G} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{e_{Y_4}}{E} A & \frac{-f_{Y_3}}{G} B \\ \frac{-f_{Y_3}}{E} B & \frac{g_{Y_4}}{G} A \end{pmatrix}.$$

En la base X_1, X_2 , el vector $S_{\nu^\perp} W_\nu$ tiene coordenadas

$$[S_{\nu^\perp} W_\nu] = \begin{pmatrix} \frac{e_{Y_4}}{E} A(-\omega_3^4(X_2)) + \frac{f_{Y_3}}{G} (B^2 A' - A B B') \\ \frac{-f_{Y_3}}{E} B(-\omega_3^4(X_2)) + \frac{g_{Y_4}}{G} (-B A A' + A^2 B') \end{pmatrix}.$$

Como $A^2 + B^2 = 1$, se tiene que $A A' + B B' = 0$. Utilizando estas identidades en la expresión para $[S_{\nu^\perp} W_\nu]$ tenemos que

$$[S_{\nu^\perp} W_\nu] = \begin{pmatrix} \frac{-e_{Y_4}}{E} \omega_3^4(X_2) A + \frac{f_{Y_3}}{G} A' \\ \frac{f_{Y_3}}{E} \omega_3^4(X_2) B + \frac{g_{Y_4}}{G} B' \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto, para que la ecuación de Codazzi se cumpla, se deben cumplir las ecuaciones diferenciales

$$\frac{-e_{Y_4}}{E} \omega_3^4(X_2) A + \frac{f_{Y_3}}{G} A' = 0, \quad (2)$$

$$\frac{f_{Y_3}}{E} \omega_3^4(X_2) B + \frac{g_{Y_4}}{G} B' = 0. \quad (3)$$

Sustituyendo los valores de $e_{Y_4}, \omega_3^4(X_2)$, etc., tenemos que la ecuación (2) es equivalente a la ecuación

$$\frac{A'}{A} = \frac{16(5 \sin(\theta) - 3 \sin(3\theta)) \cos(\theta)}{(5 + 3 \cos(4\theta))^2}. \quad (4)$$

Sea f el lado derecho de (4), entonces A debe cumplir la ecuación $A' = A f$. Además, si A cumple la ecuación de Gauss, debe ser de la forma $A = \pm \sqrt{g}$, donde

$$g = \frac{3 \cos^4(\theta) - 3 \cos^2(\theta) + 1}{3 \cos^4(\theta)},$$

por lo que se deben cumplir las ecuaciones $A' = Af$ y $A' = \pm g'/(2A)$, de donde obtenemos la ecuación $2gf = \pm g'$. Realizando los cálculos en MATHEMATICA se tiene que la ecuación $2gf = \pm g'$ sólo tiene un conjunto finito de raíces. Por lo tanto, no existe ninguna inmersión isométrica del plano proyectivo en $\mathbb{R}^3$ con segunda forma fundamental determinada por el encaje en $\mathbb{R}^4$.

Ejemplo 1.3. La botella de Klein. Sea $g(\theta, \varphi) = ((a + r \cos(\theta))e^{i\varphi}, r \operatorname{sen}(\theta))$, con $a > r$. g es el encaje usual del toro en $\mathbb{R}^3$. Nótese que la imagen de g es invariante bajo el mapeo antipodal, $A(x) = -x$. Por lo tanto el grupo $\mathcal{G} = \{I, A\}$, donde I es la identidad, actúa de manera libre y discontinua en la imagen de g . El espacio cociente K es la botella de Klein. Por construcción el toro es un cubriente doble de la botella de Klein. Sea $T = S^1 \times S^1$, definamos el mapeo $f : T \rightarrow \mathbb{R}^4$ dado por

$$f(e^{i\theta}, e^{i\varphi}) = ((a + r \cos(\theta))e^{2\varphi i}, r \operatorname{sen}(\theta)e^{\varphi i}).$$

Como $f(e^{-i\theta}, e^{i(\varphi+n\pi)}) = f(e^{i\theta}, e^{i\varphi})$, al identificar a T con su imagen en $\mathbb{R}^3$ tenemos que f manda puntos antipodales del toro en la misma imagen. Por lo tanto, existe una única función diferenciable $\tilde{f} : K \rightarrow \mathbb{R}^4$ tal que $\tilde{f} \circ \rho = f$, donde $\rho : T \rightarrow K$ es la proyección usual. Decimos que f desciende en la función $\tilde{f} : K \rightarrow \mathbb{R}^4$. Se puede probar que $\tilde{f}$ es un encaje, (ver [dC92], cap. 0). Como T es un espacio cubriente de K , podemos utilizar la parametrización usual del toro para describir $\tilde{f}$ en términos de θ y φ , de modo que $\tilde{f}$ está dado por

$$\tilde{f}(\theta, \varphi) = ((a + r \cos(\theta))e^{2\varphi i}, r \operatorname{sen}(\theta)e^{\varphi i}).$$

Sean $X_1 = \tilde{f}_*(\partial_\theta)$, $X_2 = \tilde{f}_*(\partial_\varphi)$. Definamos X_3 y X_4 como los campos normales dados por

$$X_3 = (-r \operatorname{sen}(\theta)e^{2\varphi i}, 2(a + r \cos(\theta))e^{\varphi i}) \quad X_4 = (-\cos(\theta)e^{2\varphi i}, -\operatorname{sen}(\theta)e^{\varphi i}).$$

Sean $Y_3 = \frac{1}{|X_3|}X_3$, $Y_4 = X_4$, entonces Y_3, Y_4 es una base ortonormal del haz normal a K . Al calcular los coeficientes de la segunda forma fundamental en la dirección de los vectores Y_3 y Y_4 de la misma manera que en los ejemplos anteriores tenemos que

$$\begin{aligned} e_{Y_3} &= 0, & f_{Y_3} &= -\frac{2r}{|X_3|}(r + a \cos(\theta)), & g_{Y_3} &= 0, \\ e_{Y_4} &= -r, & f_{Y_4} &= 0, & g_{Y_4} &= -(3r \cos^2(\theta) + 4a \cos(\theta) + r). \end{aligned}$$

Sea $\nu = AY_3 + BY_4$ un campo normal a la superficie, entonces $\nu^\perp = -BY_3 + AY_4$, además,

$$\begin{aligned} e_\nu &= e_{Y_4}B, & f_\nu &= f_{Y_3}A, & g_\nu &= g_{Y_4}B, \\ e_{\nu^\perp} &= e_{Y_4}A, & f_{\nu^\perp} &= -f_{Y_3}B, & g_{\nu^\perp} &= g_{Y_4}A. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$e_{\nu^\perp} g_{\nu^\perp} - f_{\nu^\perp}^2 = e_{Y_4} g_{Y_4} A^2 - f_{Y_3}^2 B^2.$$

Como $f_{Y_3} = 0$ en un conjunto discreto de puntos, podemos suponer que $f_{Y_3} \neq 0$. Similarmemente podemos suponer que $g_{Y_4} \neq 0$. Utilizando la relación $A^2 + B^2 = 1$, tenemos que la ecuación de Gauss se satisface si y solo si

$$A^2 = \frac{f_{Y_3}^2}{e_{Y_4} g_{Y_4} + f_{Y_3}^2}, \quad B^2 = \frac{e_{Y_4} g_{Y_4}}{e_{Y_4} g_{Y_4} + f_{Y_3}^2}.$$

Además como los coeficientes $e_{Y_i}, f_{Y_i}, g_{Y_i}$ son independientes de φ , también se tiene que A y B son funciones independientes de φ , por lo tanto podemos calcular $\langle \nabla_X^\perp \nu, \nu^\perp \rangle$ como $AX(B) - BX(A) + \omega_3^4(X)$, donde $\omega_3^4(X) = \langle \nabla_X^\perp Y_3, Y_4 \rangle = 2a \operatorname{sen}(\theta) d\varphi$. Un cálculo directo muestra que $\langle X_1, X_2 \rangle = 0$. Por lo tanto, la matriz del $\nu^\perp$ -operador de forma en la base X_1, X_2 está dada por

$$[S_{\nu^\perp}] = \begin{pmatrix} \frac{e_{Y_4}}{E} A & \frac{-f_{Y_3}}{G} B \\ \frac{-f_{Y_3}}{E} B & \frac{g_{Y_4}}{G} A \end{pmatrix}.$$

Además, utilizando la expresión para $\langle \nabla_X^\perp \nu, \nu^\perp \rangle$, tenemos que

$$W_\nu = -\omega_3^4(X_2)X_1 + (AB' - A'B)X_2.$$

Análogamente al procedimiento algebraico del ejemplo 1.1 tenemos que el campo ν satisface la ecuación de Codazzi si y solo si se cumplen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{-e_{Y_4}}{E} \omega_3^4(X_2)A + \frac{f_{Y_3}}{G} A' &= 0, \\ \frac{f_{Y_3}}{E} \omega_3^4(X_2)B + \frac{g_{Y_4}}{G} B' &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, si ν cumple la ecuación de Codazzi, se debe cumplir la ecuación $A' = Ah$, donde $h = \frac{e_{Y_4} G}{f_{Y_3} E} \omega_3^4(X_2)$. Además, si ν cumple la ecuación de Gauss, entonces $A = \sqrt{g}$, donde $g = \frac{f_{Y_3}^2}{e_{Y_4} g_{Y_4} + f_{Y_3}^2}$, de allí se sigue que $A' = g'/(2A)$. Combinando ambas ecuaciones obtenemos que $g' = 2gh$. Sustituyendo el valor de los coeficientes de la segunda forma fundamental y de ω_3^4 tenemos que las funciones g y h están dadas por

$$\begin{aligned} g &= \frac{4r(r + a \cos(\theta))^2}{(3r \cos^2(\theta) + 4a \cos(\theta) + r)|X_3|^2 + 4r(r + a \cos(\theta))^2}, \\ h &= \frac{a \operatorname{sen}(\theta) |X_3|^3}{r^2(r + a \cos(\theta))}. \end{aligned}$$

Donde $|X_3|^2 = 3r^2 \cos^2(\theta) + 8ar \cos(\theta) + 4a^2 + r^2$. Nótese que $g = R \circ \cos(\theta)$, donde R es una función racional. Por lo tanto, $g' = R'(\cos(\theta))(-\sin(\theta))$. Si $g' = 2gh$, entonces $h = R'(\cos(\theta))(-\sin(\theta))/(2R(\cos(\theta)))$. Por lo tanto,

$$|X_3|^3 = -\frac{r^2(r + a \cos(\theta))R'(\cos(\theta))}{2aR(\cos(\theta))}. \quad (5)$$

Como el cociente de dos funciones racionales es una función racional, lo mismo que la derivada, la ecuación (5) implica que $|X_3|^3$ es de la forma $R_1(\cos(\theta))$, donde R_1 es una función racional. Sea $p(x) = 3r^2x^2 + 8arx + 4a^2 + r^2$, entonces

$$|X_3|^3 = p(\cos(\theta))^{3/2} = p(\cos(\theta))p(\cos(\theta))^{1/2},$$

por lo que $p(\cos(\theta))^{1/2}$ es una función racional, lo cual es una contradicción, pues el polinomio p no es cuadrado perfecto, pues tiene raíces distintas porque su discriminante es $4a^2 - 3r^2$. Por lo tanto, el encaje $\tilde{f}$ de la botella de Klein no admite ninguna inmersión isométrica en $\mathbb{R}^3$ con segunda forma fundamental determinada por el haz normal en $\mathbb{R}^4$.

2 La conjetura de Carathéodory

Definición 2.1. Sea $x \in S$ un punto de una superficie en $\mathbb{R}^3$. x es un punto umbílico si las curvaturas principales en x coinciden.

Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ la inmersión isométrica de una superficie homeomorfa a la esfera y tal que su imagen es un conjunto convexo, es decir que su imagen es la frontera de un conjunto convexo. Bajo estas condiciones tenemos la conjetura hecha por Carathéodory en 1940.

Conjetura de Carathéodory. Todo encaje suave de una esfera en $\mathbb{R}^3$ tal que su imagen es convexa debe tener al menos dos puntos umbílicos.

Dado el conjunto de direcciones principales sobre la superficie es posible calcular el *índice de Poincaré-Hopf* alrededor de los puntos umbílicos contando el número de veces que las direcciones principales giran alrededor de los puntos umbílicos aislados.

Teorema 2.1. (Poincaré-Hopf)

$$\sum j = \frac{1}{2\pi} \chi(S),$$

donde la suma es sobre los índices de todas los puntos umbílicos.

Conjetura del Índice. Si $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ es un encaje de una superficie compacta, tal que M tiene un número finito de puntos umbílicos, entonces cada punto umbílico de M tienen índice de Poincaré-Hopf menor o igual a 1.

Teorema 2.2. *Si la conjetura del índice es cierta, entonces también lo es la conjetura de Carathéodory.*

DEMOSTRACION. Sea $f : S \rightarrow \mathbb{R}^3$ un encaje de una superficie S homeomorfa a una esfera. Supongamos que f tiene una cantidad finita de puntos umbílicos. Si la conjetura del índice es cierta, cada uno debe tener índice menor o igual a 1. Como S es homeomorfa a una esfera, $\chi(S) = 2$. Por lo tanto, por el teorema de Poincaré,

$$\sum j = 2.$$

Es claro que si cada índice es menor o igual a 1, la suma de la izquierda debe tener al menos dos términos. Por lo tanto, la conjetura del índice implica la de Carathéodory. $\square$

Referencias

- [Daj90] Marcos Dajczer, *Submanifolds and isometric immersions*, Publish or Perish, Inc, 1990.
- [dC92] Manfredo P. do Carmo, *Riemannian geometry*, Birkhäuser, Boston, 1992.
- [HCV32] D. Hilbert and S. Cohn-Vossen, *Geometry and the imagination*, Chelsea Publishing Company, New York, 1932.
- [Lee97] John M. Lee, *Riemannian manifolds: An introduction to curvature*, Springer-Verlag, New-York, 1997.
- [Spi79] Michael Spivak, *A comprehensive introduction to differential geometry*, vol. I-V, Publish or Perish, inc., 1979.