



UNIVERSIDAD DISTRITAL FJDC
FACULTAD TECNOLÓGICA
INGENIERÍA EN TELECOMUNICACIONES
MEDIOS DE TRANSMISIÓN
"Ejercicios 3.5 y 3.8 Chipman."

Prof. Francisco J. Zamora

Agosto 17 de 2002

3.5 Escriba de nuevo la ecuación 3.7 para una línea de transmisión sin pérdidas que tiene $R=G=0$.

a) Muestre que para la ecuación resultante,

$$v(z, t) = f_1(t - \sqrt{LC} \cdot z) + f_2(t + \sqrt{LC} \cdot z)$$

es una solución dada, donde f_1 y f_2 son funciones continuas que tienen derivadas de primero y segundo orden.

b) ¿Qué dimensiones se pueden indicar para la cantidad $\sqrt{LC}$?

SOLUCIÓN:

a) La ecuación 3.7
$$\frac{d^2}{dz^2}v(z, t) = \left[L \cdot C \cdot \frac{d^2}{dt^2}v(z, t) \right] + \left[(L \cdot G + R \cdot C) \cdot \left(\frac{d}{dt}v(z, t) \right) + R \cdot G \cdot v(z, t) \right]$$

es la ecuación diferencial de onda del voltaje en una línea de transmisión general, derivada a partir de consideraciones del modelo circuital de un elemento diferencial cuadripolar (red de dos puertos) en la línea de transmisión. Este modelo refleja propiedades básicas observadas en las LT reales, por unidad de longitud, tales como pérdidas y almacenamiento de energía por corriente (R y L) y pérdidas y almacenamiento de energía por tensión (G y C).

Para el caso de $R=G=0$ la ecuación se simplifica a:

$$\frac{d^2}{dz^2}v(z, t) = LC \cdot \frac{d^2}{dt^2}v(z, t)$$

El ejercicio requiere encontrar las segundas derivadas parciales respecto a z y t de las función $v(z, t)$ propuesta y verificar que son equivalentes.

Supóngase que $v(z, t) = f_1(u(z, t)) + f_2(w(z, t))$ siendo $u(z, t) = t - \sqrt{LC} \cdot z$ $w(z, t) = t + \sqrt{LC} \cdot z$

Nota: También es posible utilizar como argumento de f_2 a $u(z, t) + 2 \cdot (\sqrt{LC} \cdot z)$ y obtener el mismo resultado. Se deja como ejercicio adicional al estudiante.

El proceso de derivación, utilizando la regla de la cadena, arroja:

$$\frac{d}{dt}v(z, t) = \left(\frac{d}{du}f_1(u) \right) \left[\frac{d}{dt}(u(z, t)) \right] + \left(\frac{d}{dw}f_2(w) \right) \left[\frac{d}{dt}(w(z, t)) \right]$$

pero como las derivadas de u y w respecto a t son iguales a uno, entonces:

$$\frac{d}{dt}v(z, t) = \frac{d}{du}(f_1(u)) + \frac{d}{dw}(f_2(w))$$

Para la segunda derivada se aplica el mismo procedimiento y se obtiene:

$$\frac{d^2}{dt^2}v(z,t) = \frac{d^2}{du^2}f1(u) + \frac{d^2}{dw^2}f2(w)$$

Y ahora derivando con respecto a z se obtiene:

$$\frac{d}{dz}v(z,t) = \left(\frac{d}{du}f1(u)\right)\left[\frac{d}{dz}(u(z,t))\right] + \left(\frac{d}{dw}f2(w)\right)\left[\frac{d}{dz}(w(z,t))\right]$$

Pero para este caso se debe recordar que: $\frac{d}{dz}(u(z,t)) = -\sqrt{L \cdot C}$ y $\frac{d}{dz}(w(z,t)) = \sqrt{L \cdot C}$

$$\frac{d}{dz}v(z,t) = -\sqrt{L \cdot C} \cdot \left[\frac{d}{du}(f1(u))\right] + \sqrt{L \cdot C} \cdot \left[\frac{d}{dw}(f2(w))\right] \quad \text{y nuevamente derivando:}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}v(z,t) = L \cdot C \cdot \frac{d^2}{du^2}f1(u) + L \cdot C \cdot \frac{d^2}{dw^2}f2(w) \quad \text{que se puede simplificar como:}$$

$$\frac{d^2}{dz^2}v(z,t) = L \cdot C \left(\frac{d^2}{du^2}f1(u) + \frac{d^2}{dw^2}f2(w) \right)$$

Al comparar esta última ecuación con la obtenida anteriormente $\frac{d^2}{dt^2}v(z,t) = \frac{d^2}{du^2}f1(u) + \frac{d^2}{dw^2}f2(w)$

se puede concluir que en efecto, $\frac{d^2}{dz^2}v(z,t) = LC \cdot \frac{d^2}{dt^2}v(z,t)$ mostrando que la función propuesta

es un tipo de solución válida para la ecuación diferencial de la línea de transmisión uniforme sin pérdidas.

b) Para hallar las dimensiones de la cantidad $\sqrt{L \cdot C}$ se debe recordar simplemente que

las dimensiones de $\sqrt{L \cdot C} \cdot z$ deben ser las mismas de t, pues aparecen operando linealmente con éste (+/-). Esto permite deducir que dimensionalmente $|\sqrt{L \cdot C} \cdot z| = |t|$ y entonces

$$|\sqrt{L \cdot C}| \quad \text{tiene las dimensiones del recíproco de la velocidad} \quad \left| \frac{t}{z} \right|.$$

3.6 (Ejercicio para el estudiante)

3.8 (a) Para la línea sin pérdida del problema 3.5, muestre que si el voltaje en la línea está dado por $v(z,t) = v_1 \cdot f_1(t - \sqrt{L \cdot C} \cdot z)$ donde v_1 es una constante y f_1 es cualquier función continua con derivadas de primero y segundo orden, la corriente está dada entonces por:

$$i(z,t) = \frac{v(z,t)}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

(b) Muestre para la línea indistorsionada de Heaviside del problema 3.6, que si el voltaje en la línea está dado por

$$v(z,t) = v_1 \cdot e^{-R \cdot \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot z} \cdot f_1(t - \sqrt{L \cdot C} \cdot z) \quad \text{donde } f_1 \text{ cumple con las condiciones establecidas en (a), entonces la corriente en la línea es:}$$

$$i(z,t) = \frac{v(z,t)}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Observación: Las relaciones anteriores entre v e i se aplican en casos especiales como los mencionados, y en particular en líneas de baja pérdida, pero estas relaciones no son válidas para todas las líneas ni para las frecuencias bajas especialmente (voz).

SOLUCIÓN:

(a) Las ecuaciones del gradiente en la línea de transmisión, sin pérdidas, indican que:

$$\frac{d}{dz} v(z,t) = -L \cdot \left(\frac{d}{dt} i(z,t) \right) \quad \text{y} \quad \frac{d}{dz} i(z,t) = -C \cdot \left(\frac{d}{dt} v(z,t) \right)$$

Una de las posibles soluciones:

$$\text{Entonces se puede afirmar que:} \quad i(z,t) = \frac{-1}{L} \cdot \int \frac{d}{dz} v(z,t) dt$$

$$\text{y como } \frac{d}{dz} v(z,t) = -\sqrt{LC} \cdot \left(v_1 \cdot \frac{d}{du} f_1(u) \right) \cdot \frac{d}{dt} u \quad \text{siendo } u = t - \sqrt{L \cdot C} \cdot z \quad \text{entonces}$$

$$i(z,t) = \frac{-1}{L} \cdot \int -\sqrt{LC} \cdot \left[v_1 \cdot \left(\frac{d}{du} f_1(u) \right) \cdot \left(\frac{d}{dt} u \right) \right] dt \quad \text{de donde se puede concluir que:}$$

$$i(z,t) = \frac{\sqrt{LC}}{L} \cdot \int v_1 d(f_1(u)) \quad \text{e} \quad i(z,t) = \frac{\sqrt{LC}}{L} \cdot v_1 \cdot f_1(t - \sqrt{L \cdot C} \cdot z)$$

$$\text{y finalmente:} \quad i(z,t) = \sqrt{\frac{C}{L}} \cdot v_1 \cdot f_1(t - \sqrt{L \cdot C} \cdot z) \quad i(z,t) = \frac{v_1 \cdot f_1(t - \sqrt{L \cdot C} \cdot z)}{\sqrt{\frac{L}{C}}} \quad i(z,t) = \frac{v(z,t)}{\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

(b) Ejercicio para el estudiante!