ENG 0570 - Teoria das Comunicações

Teoria da Informação

A teoria da informação trata de três conceitos básicos: a medida da informação da fonte, a capacidade de informação do canal e a codificação, como recurso para utilizar-se a capacidade do canal para transferência de informação. Os três conceitos podem ser agrupados da seguinte forma:
" Caso a taxa de informação de uma fonte não exceda a capacidade de um canal de comunicação, então existe uma técnica de codificação tal que a informação pode ser transmitida pelo canal, segundo uma freqüência arbitrariamente pequena de erros, à despeito da presença do ruído"

Conceitos:
- fonte:
- taxa de informação da fonte:
- capacidade do canal:
- codificação:
- freqüência de erros:
- ruído:

1. Medida da Informação

A medida de informação envolve a probabilidade de ocorrência da mensagem. Caso "x_i" seja uma mensagem arbitrária

e $P(x_i) = P_i$ é a probabilidade de ocorrência do evento tal que x_i é escolhida para transmissão, então a quantidade de informação é dada por:

$$I_i = \log_2 \frac{1}{P_i}$$

auto informação da mensagem x_i, expressa em bits

Tem-se que:

$$I_i \geq 0 \quad \text{para} \quad 0 \leq P_i \leq 1$$
$$I_i \to 0 \quad \text{para} \quad P_i \to 1$$
$$I_i > I_j \quad \text{para} \quad P_i < P_j$$

Supondo-se que a fonte produz duas mensagens sucessivas e independentes, x_i e x_j, com probabilidade conjunta $P(x_i x_j) = P_i \cdot P_j$ tem-se que:

$$I_{ij} = \log_2 \frac{1}{P_i \cdot P_j} = I_i + I_j \quad \text{bits}$$

Lembre que: $\log_2 A = \dfrac{\log_{10} A}{\log_{10} 2}$

2. Entropia e Taxa de Informação

Considere uma fonte de informação que emite uma seqüência de símbolos selecionados de um alfabeto com M diferentes símbolos. Considere que X denota o conjunto completo de símbolos $x_1, x_2, \ldots, x_M$. Podemos tratar cada símbolo x_i, como uma mensagem que ocorre com probabilidade P_i e transporta a auto informação I_i. O conjunto de símbolos deve apresentar probabilidades tais que:

$$\sum_{i=1}^{M} P_i = 1$$

A fonte é suposta estacionária, ou seja, as probabilidades permanecem constantes ao longo do tempo. Consideraremos também que os sucessivos símbolos são estatisticamente independentes, e provêm de uma fonte segundo uma taxa de "r" símbolos por segundo. Este modelo é denominado "fonte discreta sem memória".

A entropia desta fonte, ou a informação esperada por símbolo é dada por:

$$H(X) \triangleq \sum_{i=1}^{M} P_i \times I_i = \sum_{i=1}^{M} P_i \log_2 \frac{1}{P_i} \quad \text{bits/símbolo}$$

A taxa de informação da fonte é definida por:

$$R \triangleq r.\,H(X) \qquad \text{bits/s}$$

Observe que: $\quad 0 \leq H(X) \leq \log_2 M$

Exemplo 15.1-1 do livro texto, pag 565

Considere uma fonte emitindo $r = 2.000$ símbolos/s, selecionados de um alfabeto com dimensão $M = 4$, com os símbolos e respectivas probabilidades dadas na tabela a seguir. Determine:

Gibson

a) a auto-informação de cada símbolo;
b) a entropia da fonte;
c) a taxa de informação da fonte, em bps.

Tabela 15.5-1

x_i	P_i	I_i
A	1/2	$\log_2(1/{1/2}) = \log_2(2) = 1$ bit
B	1/4	$\log_2(4) = 2$ bits
C	1/8	$\log_2(8) = 3$ bits
D	1/8	$\log_2(8) = 3$ bits

a) da tabela: $I_A = 1$ bit; $I_B = 2$ bits; $I_C = 3$ bits; $I_D = 3$ bits

b) $H(X) = 1/2 \times 1 + 1/4 \times 2 + 1/8 \times 3 + 1/8 \times 3 = 1{,}75$ bits/símbolo

c) $R = 2.000 \times 1{,}75 = 3500$ bits/segundo

Quando um código binário é unicamente decifrável?
Quando atende a desigualdade de Kraft.

$$K = \sum_{i=1}^{M} 2^{-N_i} \leq 1$$

onde:

$$\bar{N} = \sum_{i=1}^{M} P_i \cdot N_i$$

(código variável)

$\bar{N}$: comprimento médio do código
N_i: comprimento da palavra de código para o i-ésimo símbolo

Gibson

A tabela abaixo apresenta alguns códigos ilustrativos. Para cada código determine $\bar{N}$, K e a eficiência $H(x)/\bar{N}$.

Obs. Quando $H(x) < \log_2 M$, maior eficiência requer o emprego de códigos de comprimento variável, a fim de reduzir o comprimento médio do código, $\bar{N}$.

x_i	P_i	Código I	Código II	Código III	Código IV
A	1/2	00	0	0	0
B	1/4	01	1	01	10
C	1/8	10	10	011	110
D	1/8	11	11	0111	111
	$H(x)$	1,75	1,75	1,75	1,75
	$\bar{N}$	2.0	1,25	1,875	1,75
	K	1.0	1,5	0,9375	1.0
Eficiência		88%	não é unicamente decifrável!	93,3%	100% código ótimo!

3. Codificação Fano (código de compressão)

x_i	P_i			
A	1/2	0		
B	1/4	1	0	
C	1/8	1	1	0
D	1/8	1	1	1

Assim:

A ≡ 0

B ≡ 10

C ≡ 110

D ≡ 111

(Código IV acima)

Gibson 5 / Teoria da informação

Código Shannon-Fano

x_i	P_i	Passos da codificação 1	2	3	4	5	6	Palavra de código
A	0,5	0						0
B	0,15	1	0	0				100
C	0,15	1	0	1				101
D	0,08	1	1	0				110
E	0,08	1	1	1	0			1110
F	0,02	1	1	1	1	0		11110
G	0,01	1	1	1	1	1	0	111110
H	0,01	1	1	1	1	1	1	111111

$H(X) = 2,15$ $\bar{N} = 2,18$

Eficiência: 98,6 %

O símbolo "A" é representado pela palavra de código "0"

O símbolo "B" é representado pela palavra de código "100"

O símbolo "F" é representado pela palavra de código "11110"

O conjunto de símbolos FABC é representado (transmitido) por 1111001001 01, que univocamente representa FABC.

O comprimento médio do código (dos símbolos) é dado por: $\bar{N} = \sum_{i=1}^{M} P_i N_i$

$= (0{,}5\times1) + (0{,}15\times3) + (0{,}15\times3) + (0{,}08\times3) + (0{,}08\times4) + (0{,}02\times5) + (0{,}01\times6) +$

$+ (0{,}01\times6) = 0{,}5 + 0{,}45 + 0{,}45 + 0{,}24 + 0{,}32 + 0{,}1 + 0{,}06 + 0{,}06 =$

$= 2{,}18$ bits/símbolo

Em um sistema operando a 9600 bps teríamos, em média, uma taxa de $\frac{9600}{2{,}18} \frac{\text{bits}}{\text{s}} \frac{\text{símbolo}}{\text{bits}} = 4403{,}6$ símbolos/segundo

Gibson 6/ Teoria da informação

O que vimos até agora?

a) $I_i = \frac{1}{\log_{10} 2} \cdot \log_{10}\left(\frac{1}{P_i}\right)$ } auto informação da mensagem "x_i", expressa em bits.

b) $H(x) = \frac{1}{\log_{10} 2} \cdot \sum_{i=1}^{M} P_i . \log_{10}\left(\frac{1}{P_i}\right) = \sum_{i=1}^{M} P_i \times I_i$ bits/símbolo } entropia da fonte

c) $R = r . H(x)$ bits/s } taxa de informação da fonte, em bps

d) $\bar{N} = \sum_{i=1}^{M} P_i . N_i$ } comprimento médio do código, bits

e) $\eta = \frac{H(x)}{\bar{N}}$ } eficiência do código

f) $K = \sum_{i=1}^{M} 2^{-N_i} \leq 1$ } desigualdade de Kraft; código binário únicamente decifrável

Gibson 7/ Teoria da Informação

4. Codificação de Huffman (compressão)

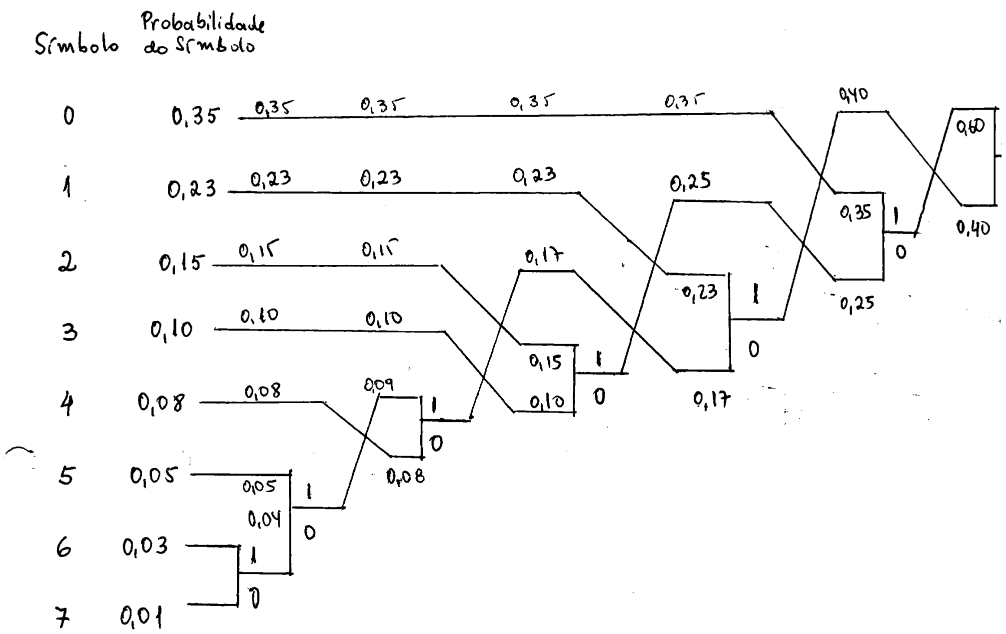
A finalidade do código de Huffman é fornecer o menor número médio de bits por símbolo da fonte, sujeito à condição que o código seja unicamente decifrável.

A codificação de Huffman segue o procedimento abaixo

1. Disponha todos os símbolos da fonte em ordem decrescente de probabilidade;
2. Combine os dois símbolos de menor probabilidade para formar um novo símbolo cuja probabilidade é a soma das duas probabilidades originais. Atribua "1" ao ramo superior e "0" ao ramo inferior. Ou vice versa, mas mantenha até o fim;
3. Rearranje os símbolos não usados e o novo símbolo em ordem decrescente de probabilidades;
4. Repita os passos 2 e 3 até que finalmente apenas <u>um</u> símbolo reste com probabilidade 1.0;
5. A palavra código para cada símbolo da fonte é obtido refazendo-se o percurso gerado nos passos 1-4, que levam ao símbolo de interesse.

No exemplo a seguir a fonte apresenta uma entropia igual a 2,486 bits por símbolo e um comprimento médio de palavra igual a 2.55 bits por símbolo. A eficiência é então de 97,5%. Para um código de comprimento fixo a eficiência seria de 82.8%. A compressão foi alcançada

Gibson 8/ Teoria da Informação



Símbolo	Palavra de código: Huffman	Palavra de código: Fano
0	1 1	0 0
1	0 1	0 1
2	1 0 1	1 0 0
3	1 0 0	1 0 1
4	0 0 0	1 1 0
5	0 0 1 1	1 1 1 0
6	0 0 1 0 1	1 1 1 1 0
7	0 0 1 0 0	1 1 1 1 1

5. Extensão da fonte

Quando o número de símbolos da fonte é reduzido e as probabilidades significativamente diferentes, a codificação ótima de Huffman pode levar a baixos valores de eficiência. Empregando-se uma técnica denominada "extensão da fonte" a eficiência do código pode ser aumentada. Os códigos de -Fano e Huffman podem ser considerados de "primeira ordem".

Considere uma fonte cujas probabilidades de ocorrência dos símbolos A e B sejam respectivamente $P(A) = 0,8$ e $P(B) = 0,1$. O procedimento de Huffman atribui 1 ao símbolo A e 0 ao símbolo B. A entropia $H = 0,7219$ bits por símbolo e a eficiência do código $\eta = 0,7219$.

Vejamos agora um código de segunda ordem, mostrado na tabela abaixo.

Símbolos de segunda ordem da fonte	Probabilidade do símbolo		Palavra de código Huffman	Probabilidade × Número de símbolos do código	
A A	0,64	$(0,8)^2$	1	0,64	(0,64×1)
A B	0,16	(0,8×0,2)	0 0	0,32	(0,16×2)
B A	0,16	(0,2×0,8)	0 1 1	0,48	(0,16×3)
B B	0,04	(0,2×0,2)	0 1 0	0,12	(0,04×3)
				$\bar{N} = 1,56$	

A entropia desta "nova" fonte é $H = 1,4434$ bits por símbolo e o número médio de bits $\bar{N} = 1,56$. A nova eficiência é 92,55%. Um aumento de 28,2% em relação à 1ª ordem