

1. Ruído Térmico

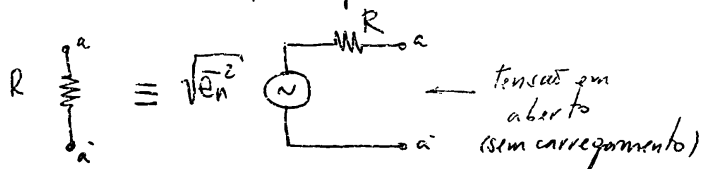
①

O ruído térmico está sempre presente em todos os sistemas de telecomunicações, tendo como origem o movimento aleatório dos elétrons. Um condutor (resistor) quando submetido a uma temperatura superior a 0 (zero) graus Kelvin torna-se uma fonte de ruído térmico. Neste caso, a tensão de ruído média quadrática é dada por

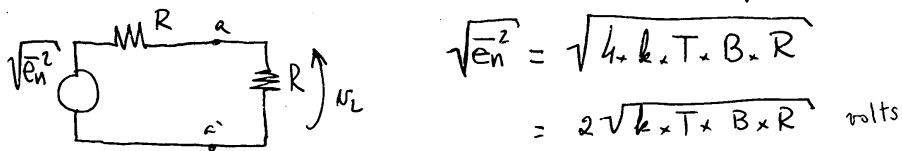
$$\overline{e_n^2} = 4 \cdot k \cdot T \cdot B \cdot R \quad v^2$$

Constante de Boltzmann, $1.38 \times 10^{-23} \text{ J/K}$ Temperatura absoluta, K largura de banda, Hz resistência, Ω

Assim, o resistor "R", pode ser modelado como uma fonte de tensão ideal, cuja tensão de circuito aberto é dada por $\sqrt{\overline{e_n^2}}$ e cuja impedância de saída é "R", ou seja:



A situação ideal de transferência de energia é quando a impedância da carga é igual ao complexo conjugado da impedância da fonte. Para o caso de impedâncias puramente resistivas a condição é alcançada quando $R_L = R_g$. Neste caso, a tensão aplicada na carga é metade do valor da tensão de circuito aberto, ou seja:



Mas $v_L = \sqrt{e_n^2} / 2$, logo

②

$$v_L = \frac{\sqrt{\overline{e_n^2}}}{2} = \sqrt{k \cdot T \cdot B \cdot R} \quad \text{volts}$$

Estamos interessados na potência de ruído fornecida à carga, na condição de casamento ("matched load"). Neste caso:

$$P_{N,W} = \frac{v_L^2}{R} = k \cdot T \cdot B \quad \text{Watts}$$

Potência de ruído térmico, em watts

O termo kT é também denominado "densidade de potência de ruído", e representado pela letra η . Assim:

$$\eta = k \cdot T \quad \text{W/Hz} \quad \text{densidade espectral de potência de ruído}$$

Assim, para reduzir-se o nível de ruído devemos:

- a) "desacoplar" a fonte de ruído da carga;
- b) reduzir a temperatura;
- c) reduzir a largura de banda.

Em aplicações práticas, a potência de ruído térmico é geralmente expressa em dBm (dB em relação ao mW). Inicialmente transformamos P_N de W para mW.

$$P_{N,mW} = k \cdot T \cdot B \cdot 10^3$$

Aplicando o logaritmo e multiplicando por 10 ambos os lados da equação obtemos:

$$P_N, \text{dBm} = 10 \times \log_{10}(P_{N,mW}) = 10 \times \log_{10}(k \cdot T \cdot B) + 30 \text{ dB}$$

2/8

Ex 1) Determine a tensão de ruído média quadrática em um resistor de 100Ω , em 30°C , em 30 kHz .

Sol: $T = 30 + 273 = 303 \text{ K}$
 $B = 30 \times 10^3 \text{ Hz}$
 $R = 100 \Omega$

$$\bar{e}_n^2 = 4 \times 1,38 \times 10^{-23} \times 303 \times 30 \times 10^3 \times 100 = 5,0 \times 10^{-14} \text{ V}^2$$

Ex 2) Determine a tensão em aberto produzida por um resistor de 100Ω , em 30°C , em 30 kHz , considerando-se o ruído térmico.

Sol: $\sqrt{\bar{e}_n^2} = \sqrt{5,0 \times 10^{-14}} = 224 \text{ nV}$

Ex 3) Determine a tensão de ruído disponível sobre uma carga variável, devido a um resistor de 100Ω , em 30°C , em 30 kHz .

Sol: $v_L = \frac{\sqrt{\bar{e}_n^2}}{2} = 112 \text{ nV}$

Ex 4) Determine a potência média de ruído disponível devido a um resistor de 100Ω , em 30°C , em 30 kHz . Em dBm.

Sol: $P_n = k \cdot T \cdot B = 1,38 \times 10^{-23} \times 303 \times 30 \times 10^3 = 1,25 \times 10^{-16} \text{ W}$

$P_n, \text{ dBm} = 10 \times \log_{10}(1,25 \times 10^{-16}) + 30 \text{ dB} = -129 \text{ dBm}$

Ex 5) Determine a densidade de potência ^{espectral} de ruído térmico na temperatura de 30°C .

Sol: $\eta = k \cdot T = 1,38 \times 10^{-23} \times 303 = 4,18 \times 10^{-21} \text{ W/Hz}$

Ex 6) Um resistor de 50Ω é ligado a uma fonte de ruído com 100Ω de impedância e tensão de ruído de 224 nV . Determine a potência de ruído no resistor ou carga.

Sol: $v_L = v_N \frac{50}{50+100} = 224 \times 10^{-9} \times \frac{50}{150} = 74,7 \text{ nV}$

2: Relação sinal-ruído

(4)

Em sistemas práticos (comerciais) de telecomunicações, mais importante do que o nível ou a intensidade do sinal ou do ruído, é a relação entre o nível do sinal e o nível do ruído, a denominada relação sinal-ruído. É a relação sinal-ruído que vai indicar a qualidade da voz ou da imagem e a integridade dos dados.

Em sistemas digitais existe uma relação direta entre a relação sinal-ruído e a taxa de bits errados, BER, em função do tipo de modulação empregada. Quanto MAIOR a relação sinal-ruído

MEHOR é a qualidade de áudio e imagem e MENOR a taxa de bits errados. Em sistemas comerciais de rádio e passivos de ions e imagem a norma requer uma relação sinal-ruído mínima de 52 dB no contorno protegido I, ou seja exige-se um determinado valor de qualidade do serviço.

Na relação sinal-ruído, sinal é o sinal desejado e ruído é qualquer outro sinal ou perturbação indesejada, a incluir os ruído natural, industrial ou outras formas de degradação.

A relação sinal-ruído é escrita de maneira abreviada como:

$$\frac{S}{N} \begin{array}{l} \rightarrow \text{intensidade do sinal} \\ \rightarrow \text{intensidade do ruído} \end{array}$$

A relação sinal-ruído é adimensional. O sinal e o ruído podem ser expressos em volts ou watts, mas de forma consistente.

Ex 1) Em um determinado sistema o sinal é de $2,5 \mu\text{V}$ e o ruído é 23 nV . Determine a relação sinal-ruído.

Sol: $\frac{S}{N} = \frac{2,5 \times 10^{-6}}{23 \times 10^{-9}} = 108,7 \text{ ou } 40,7 \text{ dB}$

Na prática a relação S/N é mais usada em sistemas de recepção, quando então os sinais são expressos em dBm (sinal e ruído). Neste caso tem-se que:

(5)

$$SNR, dB = S_i, dBm - N_i, dBm$$

relação sinal-ruído em dB nível do sinal, em dBm nível de ruído, em dBm

Observe que:

$$SNR, dB = 10 \times \log_{10} \left(\frac{S_{w,i}}{N_{w,i}} \right) = S_i, dBm - N_i, dBm$$

Ex 2) Em um determinado sistema cuja impedância de entrada é 50Ω apresenta 2,5μV como sinal de entrada e 23nV como ruído de entrada. Determine:

- a potência do sinal de entrada, em dBm;
- a potência do ruído de entrada, em dBm;
- a relação sinal-ruído, em dB.

Solução:

$$a) P = \frac{V^2}{R} \text{ logo } S = \frac{(2,5 \times 10^{-6})^2}{50} = 0,125 \times 10^{-12} W$$

$$S_i, dBm = 10 \times \log_{10}(S, W) + 30 dB = -99 dBm$$

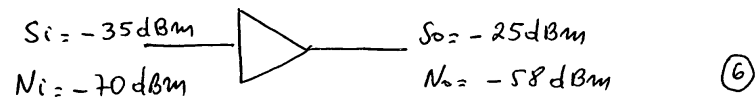
$$b) N = \frac{(23 \times 10^{-9})^2}{50} = 10,58 \times 10^{-18} W$$

$$N_i, dBm = 10 \times \log_{10}(10,58 \times 10^{-18}) + 30 dB = -139,7 dBm$$

$$c) SNR_{dB}^i = S_i, dBm - N_i, dBm = -99 - (-139,7) = 40,7 dB$$

Ex 3) Para o circuito abaixo determine:

- a relação sinal-ruído de entrada;
- a relação sinal-ruído de saída; 5/8



$$a) SNR_{dB}^i = S_i, dBm - N_i, dBm = -35 dBm - (-70 dBm) = 35 dB$$

$$b) SNR_{dB}^o = S_o, dBm - N_o, dBm = -25 dBm - (-58 dBm) = 33 dB$$

c) Houve um decréscimo na relação sinal-ruído de saída-relação à relação sinal-ruído de entrada.

3. Fator de ruído e Figura de ruído.

O fator de ruído é definido como a relação entre a relação sinal-ruído de entrada e a relação sinal-ruído de saída, ou seja:

$$F = \frac{(S/N)_{input}}{(S/N)_{output}} \quad \text{adimensional}$$

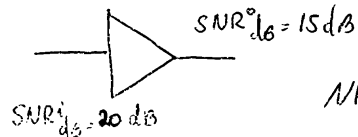
Observe que em sistemas reais, a relação sinal-ruído de entrada de um estágio amplificador é sempre MAIOR do que a relação sinal-ruído de saída do estágio amplificador. Ou seja, na prática: $F > 1$. Isso significa que todo dispositivo amplificador real degrada a relação sinal-ruído de entrada. Uma exceção são os circuitos regerem fatores), que dentro de certas margens de degradação restauram o sinal digital (bit) à forma original.

6/8

Os fabricantes de amplificadores costumam caracterizar essa degradação pela figura de ruído ("noise figure"), dada por:

$$NF, dB = 10 \times \log_{10} (F) \quad (7)$$

Ex 4) Determine a figura de ruído do sistema abaixo

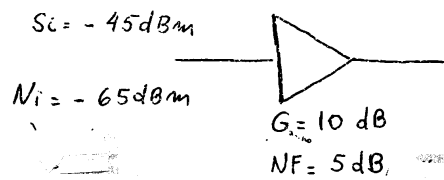


$$NF, dB = SNR_i, dB - SNR_o, dB = 20 dB - 15 dB = 5 dB$$

A relação sinal-ruído é degradada de 5 dB na saída.

Ex 5) Para o sistema abaixo determine:

- a relação sinal-ruído de entrada, em dB;
- a relação sinal-ruído de saída, em dB.



Solução:

$$a) SNR_i, dB = S_i, dBm - N_i, dBm = -45 dBm - (-65 dBm) = 20 dB$$

$$b) \text{ Calculamos o sinal de saída: } S_o, dBm = S_i, dBm + G, dB = -45 dBm + 10 dB = -35 dBm$$

$$\text{O ruído de saída é dado por: } N_o, dBm = N_i, dBm + G, dB + NF, dB = -65 dBm + 10 dB + 5 dB = -50 dBm$$

$$SNR_o, dB = S_o, dBm - N_o, dBm = -35 dBm - (-50 dBm) = 15 dB$$

7/8

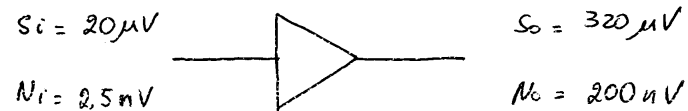
Alternativamente poderíamos ter empregado a definição da figura de ruído, ou seja:

$$SNR_o, dB = SNR_i, dB - NF, dB = 20 dB - 5 dB = 15 dB \quad (8)$$

Observe que esta é a definição da Figura de Ruído. O quanto a relação sinal-ruído de entrada é degradada na saída.

Ex 6) Para o sistema abaixo determine:

- o ganho linear;
- o ganho em dB;
- o fator de ruído;
- a figura de ruído, em dB.



Solução:

$$a) G = \frac{320 \times 10^{-6}}{20 \times 10^{-6}} = 16 \quad (\text{de tensões})$$

$$b) G, dB = 20 \times \log(16) = 24,08 dB \approx 24 dB$$

$$c) \left(\frac{S}{N}\right)_i = \frac{20 \times 10^{-6}}{2,5 \times 10^{-9}} = 8000 \rightarrow F = \frac{8000}{1600} = 5$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_o = \frac{320 \times 10^{-6}}{200 \times 10^{-9}} = 1600$$

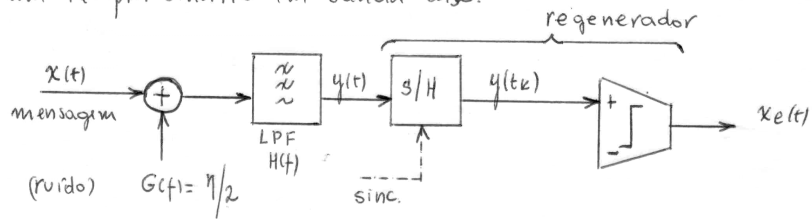
$$d) NF = 10 \times \log_{10}(5) = 7 dB$$

8/8

Ruído e Erros

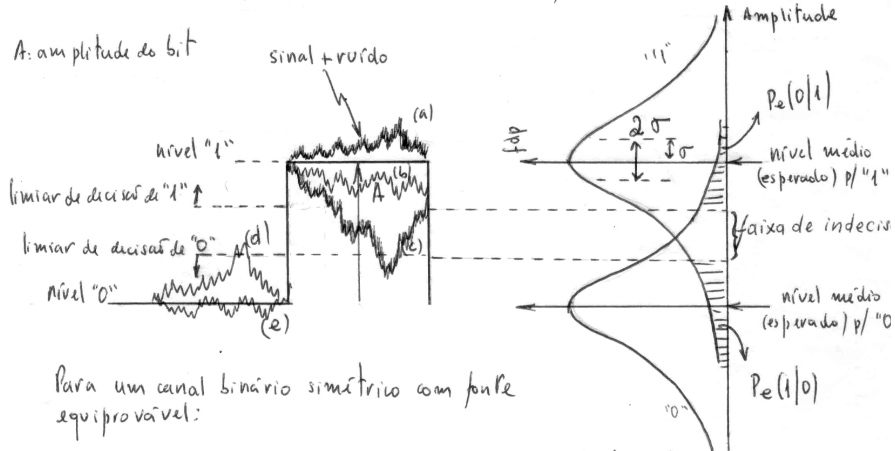
1. Probabilidade de Erros Binários

Na recepção de sinais o ruído está sempre presente, degradando a mensagem recebida pela introdução de erros. A figura abaixo mostra um receptor binário em banda base.

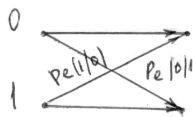


Vamos considerar que o ruído é do tipo gaussiano, com média igual a zero e variância σ^2 . Neste caso o sinal recebido estará corrompido pelo ruído, caracterizando uma relação sinal-ruído de recepção. A figura abaixo representa o sinal esperado e o sinal recebido, bem como a distribuição da amplitude do sinal recebido (função densidade de probabilidade).

A: amplitude do bit



Para um canal binário simétrico com fonte equiprovável:



Gibson

$$P_e(1/0) = P_e(0/1) = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

probabilidade de erro ocorrência

(1)

Taxa de erro mínima

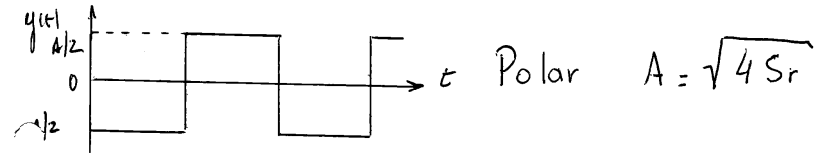
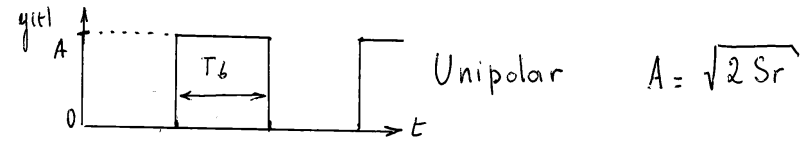
para sinalização (transmissão)

binária, em ruído gaussiano

com fonte de dígitos equiprovável

$$P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

$$Q(k) \rightarrow k \rightarrow S/N$$



S_r : potência média do sinal recebido.

$$k^2 = \left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 = \frac{A^2}{4N_r} = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{S}{N}\right)_r & \text{Unipolar } \left(\frac{S}{N}\right)_r = 2 \left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 = 2k^2 \\ \left(\frac{S}{N}\right)_r & \text{Polar } \left(\frac{S}{N}\right)_r = \left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 = k^2 \end{cases}$$

$(S/N)_r$: relação sinal-ruído de recepção (adimensional)

$$\text{Potência de ruído} = N_r = \eta \cdot BW \geq \eta \cdot r_b/2 \quad (\text{watts})$$

$$T_b = 1/r_b \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{densidade espectral de ruído, W/Hz (k.T)} \\ \text{taxa de transmissão (bps)} \\ \text{duração do bit} \end{array} \right.$$

Exemplo: Suponha que um computador produza pulsos unipolares segundo a taxa de $r_b = 10^6 \text{ bps} = 1 \text{ Mb/s}$, para transmissão em um canal ruidoso, com $\eta = 4 \times 10^{-20} \text{ W/Hz}$. A taxa de erro especificada é de no máximo 1 bit errado por hora. Determine a potência

Gibson

Ruído e Erros

(2)

minima necessária de transmissões:

Solução:

$$0 \text{ número de bits transmitidos em 1 hora é igual a } r_b \times 3600 \\ = 10^6 \times 3600 = 3,6 \times 10^9$$

Um erro por hora equivale a uma probabilidade de erro igual a

$$P_e = \frac{1}{3,6 \times 10^9} \approx 2,8 \times 10^{-10}$$

Com este valor de P_e em uma tabela de $Q(x)$ obtemos

$$A/2\sigma \geq 6,2, \text{ mas para pulso unipolar } (S/N)_r = 2 \left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 \text{ e} \\ N_r \geq \eta \cdot r_b/2, \text{ logo}$$

$$S_r = 2 \left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 \cdot N_r \geq 2 \times (6,2)^2 \times \underbrace{4 \times 10^{-20}}_{\eta} \times \underbrace{10^6}_{\frac{r_b}{2}} = 1,5 \mu W$$

Observa-se que qualquer sinal com potência razoável assegura uma transmissão quase livre de erros. Pulsos espúrios e outros efeitos serão os fatores limitantes no desempenho.

2. Filtragem casada

Todo e qualquer receptor digital, quer na recepção final ou parte de um repetidor regenerativo, deve incluir um filtro passa-baixa projetado para remover o excesso de ruído, sem introduzir interferência inter-simbólica, ISI.

Para o caso de pulsos limitados no tempo o filtro ótimo para este propósito, considerando-se o sinal degradado pelo ruído branco é um filtro casado ("matched filter")

Obteremos a seguir a probabilidade de erro mínima para a situação de filtro casado.

Gibson

Ruído e Erros

(3)

Considere uma transmissão binária com taxa " r_b ", potência média do sinal recebido " S_r " e densidade de ruído " η ". Podemos caracterizar este sistema em termos de dois novos parâmetros, " E_b " e " γ_b " definidos por:

$$E_b \triangleq S_r / r_b \quad \text{e} \quad \gamma_b \triangleq S_r / \eta r_b = E_b / \eta$$

E_b : energia média por bit, J;

γ_b : relação entre a energia do bit e a densidade de ruído.

S_r : potência média do sinal recebido

É comum também encontrar-se a representação $E_b/N_0 = E_b/\eta$.

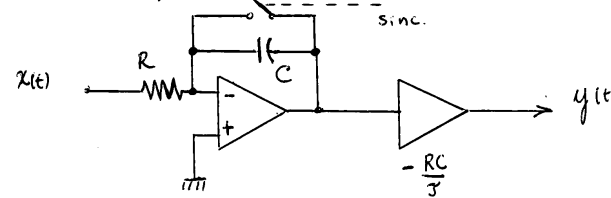
Assim:

$$\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 = \begin{cases} E_b/\eta = \gamma_b & \text{Unipolar} & \gamma_{bu} = k^2 \\ 2E_b/\eta = 2\gamma_b & \text{Polar} & \gamma_{bp} = \frac{1}{2}k^2 \end{cases}$$

P_e = probabilidade de erro torna-se:

$$P_e = \begin{cases} Q(\sqrt{\gamma_b}) & \text{Unipolar} \\ Q(\sqrt{2\gamma_b}) & \text{Polar} \end{cases}$$

Esta é a menor probabilidade de erro possível, alcançada APENAS com filtragem casada. Um exemplo de filtro casado é mostrado abaixo



Filtro "integrate-and-dump"

Gibson

Ruído e Erros

(4)

3. Probabilidade de Erro em sistemas M-ários

Para sistemas M-ários tem-se que:

$$r_b = r \cdot \log_2 M$$

\swarrow nº de níveis
 \searrow taxa de sinalização M-ária (bauds)
 \swarrow taxa de transmissão, bps.

Considerando-se filtragem casada, para pulsos NRZ retangulares tem-se que:

$$k^2 = \left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 = \frac{3}{M^2 - 1} \cdot (S/N)_R = \frac{6 \log_2 M}{M^2 - 1} \gamma_b$$

\hookrightarrow não é em dB

A tabela abaixo considera $r = 3$ kbauds e $(S/N)_R = 26$ dB (400)

M	r_b (kbps)	$A/2\sigma, k$	P_{be}, BER
2	3	20,0	3×10^{-89}
4	6	8,9	1×10^{-19}
8	9	4,4	4×10^{-6}
16	12	2,2	7×10^{-3}
32	15	1,1	6×10^{-2}

$$P_e = 2 \frac{M-1}{M \log_2 M} Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

$$Q(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot k} e^{-k^2/2} \quad k > 3$$

$$k = \sqrt{\frac{3}{M^2 - 1} \cdot \left(\frac{S}{N}\right)_R}$$

$$\left(\frac{S}{N}\right)_R = \frac{(M^2 - 1) k^2}{3}$$

M	2	4	8	16	32
r_b kbps	3	6	9	12	15
P_e	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}	10^{-6}

G.2 son

Ruído e Erros

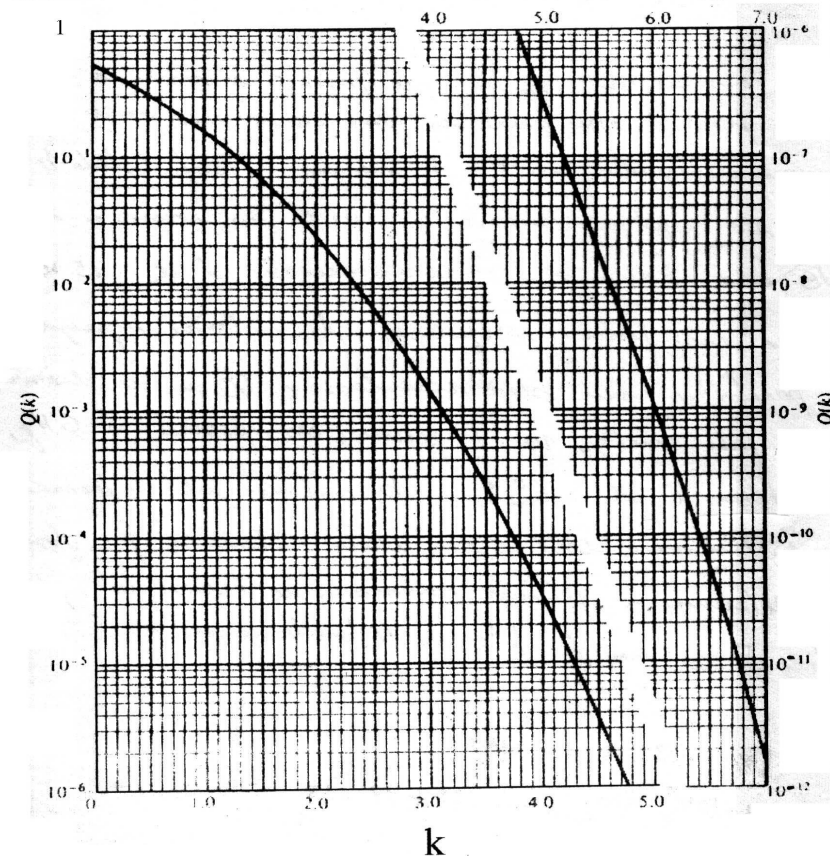
⑤

Distribuição Gaussiana

Numerical values of $Q(k)$ are plotted below for $0 < k \leq 7.0$. For larger values of k may be approximated by

$$Q(k) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi} k} e^{-k^2/2}$$

which is quite accurate for $k > 3$.



$$\text{erfc}(k) = 1 - \text{erf}(k) = 2 Q(k\sqrt{2})$$

$$\text{erf}(k) = 1 - 2 Q(k\sqrt{2})$$

23. Um sistema digital transmite pulsos retangulares com amplitude ± 1 volts e duração de 1ms através de um cabo coaxial de atenuação 0,5 dB/m e ruído com densidade espectral de potência 10⁻⁵ volt²/Hz. Determine a máxima distância que um receptor do tipo filtro casado pode ser ligado com este cabo de modo a probabilidade de erro de recepção não ultrapassar 10⁻⁴.

24. Deseja-se transmitir um sinal digital através de uma modulação em amplitude. Deseja-se também a menor taxa de erro de recepção. Determine neste caso, qual dos tres ajustes de amplitude deve ser usado para o transmissor?

Ajuste 1 : $s_1(t) = A \cos w_c t$ $s_1(t) = 0$
 Ajuste 2 : $s_1(t) = A \cos w_c t$ $s_1(t) = \frac{A}{2} \cos w_c t$
 Ajuste 3 : $s_1(t) = 2A \cos w_c t$ $s_1(t) = \frac{A}{2} \cos w_c t$

25. Deseja-se construir um gravador digital em fita magnética para uma velocidade de símbolos de 500 kbits/s usando os sinais $s_1(t) = A \cos w_c t$ e $s_1(t) = A \cos w_c t$. A fita é tal que a atenuação do sinal medida desde a entrada da cabeça gravadora até a saída da cabeça reprodutora é de 10 dB com ruído de densidade 0,5 x 10⁻⁶ V²/Hz. Se o sinal digital de saída deve ter uma taxa de erro máxima de 10⁻⁵ e o receptor a ser usado é do tipo casado, determinar a amplitude mínima dos sinais na entrada da cabeça gravadora. Para valores da função de erro complementar não encontrados na tabela, interpolar linearmente.

Gibney

26. Um sinal ASK possui os estados $s_1(t) = A \cos w_c t$ e $s_2(t) = 0$ para um intervalo $T = kT_c$ com k inteiro. O sinal é distorcido por ruído branco com densidade espectral de potência $n/2$. Determine a probabilidade de erro de recepção para o receptor de filtro casado.

$erfc(x) = 1 - erf(x)$

Valores da Função de Erro Complementar

x	erfc(x)	x	erfc(x)
0.0	1.000	2.2	1.86 x 10 ⁻³
0.2	0.777	2.4	6.9 x 10 ⁻⁴
0.4	0.572	2.6	2.4 x 10 ⁻⁴
0.6	0.396	2.8	7.5 x 10 ⁻⁵
0.8	0.258	3.0	2.2 x 10 ⁻⁵
1.0	0.157	3.2	5.4 x 10 ⁻⁶
1.2	8.97 x 10 ⁻²	3.4	1.3 x 10 ⁻⁶
1.4	4.77 x 10 ⁻²	3.6	2.9 x 10 ⁻⁷
1.6	2.37 x 10 ⁻²	3.8	6.3 x 10 ⁻⁸
1.8	1.09 x 10 ⁻²	4.0	1.54 x 10 ⁻⁸
2.0	4.88 x 10 ⁻³	4.2	3.4 x 10 ⁻⁹

no 4 canais para 1 bit

$N = A + \frac{[W/P]}{[E_b/N_0]} F_{AV}$
 $\frac{1}{[E_b/N_0]} = G_{ST} \times F_{KR} \times F_{CP}$
 $k = \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}$
 $k = \sqrt{2(x^2 - 1)}$

F_{AV}: atenuação de voz (0,5)

E_b/N₀ > dB

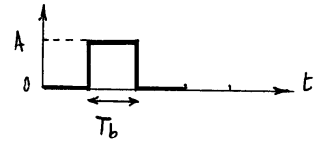
G_{ST}: ganho de transmissão (2,5)

F_{KR}: fator de eficiência de ruído de transmissão (0,6)

F_{CP}: fator de correção devido ao casamento de impedâncias (normalmente 0,7)

Transmissão em Banda Base

1. Unipolar



$A = \sqrt{2 \cdot S_r}$
 ↳ potência média do sinal recebido, W
 ↳ tensão do sinal recebido, V

a. Relação Sinal-ruído: (potência)

$\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{S}{N}\right)_r = k^2$

↳ relação sinal-ruído de recepção (NÃO É EM dB!!!)

b. Probabilidade de Erro
 $P_e = Q(\sqrt{r_b})$

$P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = Q(k) \approx \frac{1}{k\sqrt{2\pi}} e^{-k^2/2}$

c. Taxa de Transmissão e Largura de Faixa

$T_b = 1/r_b$; $BW \geq r_b/2$
 ↳ largura de banda, Hz
 ↳ taxa de transmissão, bps

durada do pulso (banda), segundos

d. Ruído na banda: $N_r = \eta \cdot BW \geq \eta \cdot r_b/2$

↳ densidade espectral de potência de ruído, W/Hz

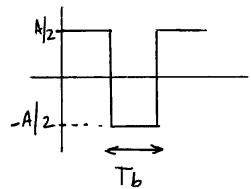
e. Filtragem casada

$\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 = k^2 = \frac{E_b}{\eta} = \gamma_b$; $E_b \triangleq S_r/r_b$
 ↳ energia do bit, J

$\gamma_b = \frac{S_r}{\eta \cdot r_b}$

Transmissão em Banda Base 1/3

2. Polar



$$A = \sqrt{4 \cdot S_r}$$

a. Relação Sinal-ruído: $\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 = \left(\frac{S}{N}\right)_r = k^2$

↳ relação sinal-ruído de recepção (NÃO É EM dB!!!)

b. Probabilidade de Erro

$$P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = Q(k) \approx \frac{1}{k\sqrt{2\pi}} e^{-k^2/2} = Q(\sqrt{2\gamma_b})$$

c. Taxa de Transmissão e Largura de Faixa

$$T_b = 1/r_b ; BW \geq r_b/2$$

d. Ruído na banda: $N_r = \eta \cdot BW \geq \eta \cdot r_b/2$

e. Filtragem casada.

$$\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 = \frac{2E_b}{\eta} = 2\gamma_b ; E_b \triangleq \frac{S_r}{r_b} ; \gamma_b = \frac{S_r}{\eta \cdot r_b}$$

3. M-ário

a. Taxa versus níveis

$$r_b = r \cdot \log_2 M \rightarrow \begin{array}{l} \text{nº de níveis} \\ \text{taxa de sinalização M-ária (bauds)} \end{array}$$

↳ taxa de transmissão, bps.

b. Relação Sinal-ruído
(cf. filtragem casada, pulsos NRZ retangulares)

Transmissão em Banda base 2/3

$$\left(\frac{A}{2\sigma}\right)^2 = k^2 = \frac{3}{M^2-1} \left(\frac{S}{N}\right)_r = \frac{6 \cdot \log_2 M}{M^2-1} \gamma_b$$

$$\gamma_b = \frac{S_r}{\eta \cdot r_b} = \frac{S_r}{\eta \cdot r \cdot \log_2 M}$$

c. Filtragem casada ($r \cdot T_{eq} = 1$)

d. Probabilidade de erro

$$P_e = 2 \frac{M-1}{M \cdot \log_2 M} \cdot Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right) = 2 \frac{M-1}{M \cdot \log_2 M} \cdot Q(k)$$

Exemplo: A tabela abaixo considera $r = 3$ kbauds e a relação sinal-ruído de recepção, $(S/N)_r$, igual a 26dB ($10^{26/10} = 400$)

M	nº de bits	k, (A/2σ)	P _{be} , BER
2	1	20,0	3×10^{-89}
4	2	8,9	1×10^{-19}
8	3	4,4	4×10^{-6}
16	4	2,2	7×10^{-3}
32	5	1,1	6×10^{-2}

Transmissão em Banda Base 3/3

Efeito do Ruído Térmico na Transmissão Digital

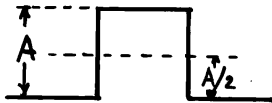
Na transmissão digital, a qualidade de uma ligação é expressa em termos da probabilidade média do sistema, P_e , normalmente expressa em potências negativas de 10, ou seja, 10^{-n} . Assim $P_e = 10^{-6}$ significa 1 (um) erro em cada 10^6 bits.

Efeito do Ruído Térmico na modulação ASK

Supondo-se: ruído aditivo e a tensão do pulso correspondente ao 1 na saída do demodulador A.

Tem-se dois tipos de erro:

$$\begin{aligned} v(t) &= A + r(t) < A/2 \\ v(t) &= r(t) > A/2 \end{aligned}$$



O limiar de decisão é $A/2$:

$$\begin{cases} v(t) > A/2 & \rightarrow \text{pulso 1} \\ v(t) < A/2 & \rightarrow \text{pulso 0} \end{cases}$$

O ruído $r(t)$ será tratado como Gaussiano e de média nula. Assim, na transmissão de um "zero", a função densidade de probabilidade de $v(t)$ será:

$$p_0(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right]$$

a probabilidade de erro é dada por:

$$P_{e0} = P(v > A/2) = \int_{A/2}^{\infty} p_0(v) dv$$

σ^2 : variância de $r(t)$

1D

Na transmissão de um pulso "um", embora a estatística de v continue a mesma, o ruído passa a flutuar em torno de A, isto é:

$$p_1(v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left[-\frac{(v-A)^2}{2\sigma^2}\right], \text{ e assim:}$$

$$P_{e1} = P(v < A/2) = \int_{-\infty}^{A/2} p_1(v) dv$$

Considerando-se os pulsos equiprováveis, a probabilidade de erro total é expressa por:

$$P_e = \frac{1}{2} [P_{e0} + P_{e1}] = \left\{ \int_{-\infty}^{A/2} \exp\left[-\frac{(v-A)^2}{2\sigma^2}\right] dv + \int_{A/2}^{\infty} \exp\left[-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right] dv \right\} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$$

e assim:

$$P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right), \text{ onde } Q(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^{\infty} \exp\left[-\frac{y^2}{2}\right] dy$$

(função erro complementar, de argumento x)

Na modulação ASK, a potência média do sinal na entrada do receptor é dada por:

$$P = \frac{1}{T} \int_0^{T/2} A^2 \cos^2 \omega t dt, \text{ o que corres.}$$

ponde, aproximadamente a $P = \frac{1}{4} A^2$, por outro lado, a variância do ruído, corresponde ao valor da potência média de ruído R . Assim:

2D

$$P_e = Q \left[\sqrt{\frac{P}{R}} \right] \quad (\text{ASK})$$

Modulação PSK-2φ:

O sinal na saída do demodulador coerente é $\pm A$, e o nível de decisão passa a ser zero. Obtém-se que $P_e = Q \left(\frac{A}{\sigma} \right)$.

Além disto, a portadora está ativa todo o tempo, resultando para a potência média $P = \frac{1}{T} \int_0^T A^2 \cos^2 \omega_p t dt = \frac{A^2}{2}$. Assim

$$P_e = Q \left[\sqrt{\frac{2P}{R}} \right] \quad (\text{PSK-2}\phi)$$

Modulação PSK-2φ diferencial:

$$P_e = \frac{1}{2} \exp \left[-\frac{P}{R} \right] \quad (\text{PSK-2}\phi \text{ diferencial})$$

Modulação PSK-4φ coerente:

$$P_e = 1 - \left\{ 1 - Q \left[\sqrt{\frac{P}{R}} \right] \right\}^2 \quad (\text{PSK-4}\phi \text{ coerente})$$

PSK coerente, $\frac{P}{R} \gg 1$:

$$P_e = \frac{\exp \left[\frac{P}{R} \sin^2 \left(\frac{\pi}{n} \right) \right]}{\sqrt{\frac{P}{R}} \sin \left(\frac{\pi}{n} \right)} \quad n: \text{n}^\circ \text{ de fases do sistema}$$

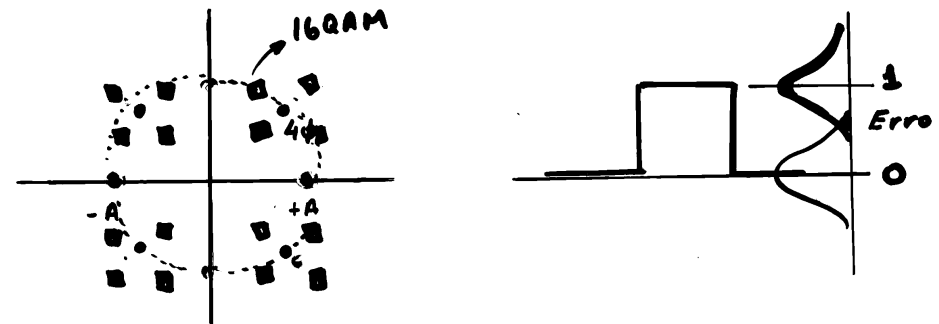
3 D

A modulação diferencial com 4 fases apresenta um desempenho 2,3 dB inferior ao PSK-4φ coerente. No caso de 8 fases, a degradação é de 2,8 dB. A degradação aproxima-se assintoticamente de 3 dB, à medida que n tende para o infinito.

QAM 16 níveis: $P_e = \frac{3}{2} Q \left[\sqrt{\frac{1}{5} \frac{P}{R}} \right]$

Relacionamento entre P_e e P/R

P_e	P/R em dB função do tipo de modulação							
	OOK	CPSK-2φ	DPSK-2φ	CPSK-4φ	DPSK-4φ	CPSK-8φ	DPSK-8φ	QAM-16
10^{-3}	9,8	6,8	7,9	10,3	12,6	15,7	18,5	17,6
10^{-4}	11,4	8,4	9,3	11,8	14,1	17,1	19,9	19,0
10^{-5}	12,6	9,6	10,4	12,9	15,2	18,2	21,0	20,1
10^{-6}	13,5	10,5	11,2	13,8	16,1	19,0	21,8	20,9
10^{-7}	14,3	11,3	11,9	14,7	16,8	19,8	22,6	21,6
10^{-8}	15,0	12,0	12,5	15,2	17,5	20,4	23,2	22,3
10^{-9}	15,6	12,6	13,0	15,7	18,0	21,0	23,8	22,8
10^{-10}	16,0	13,0	13,5	16,1	18,4	21,5	24,3	23,3

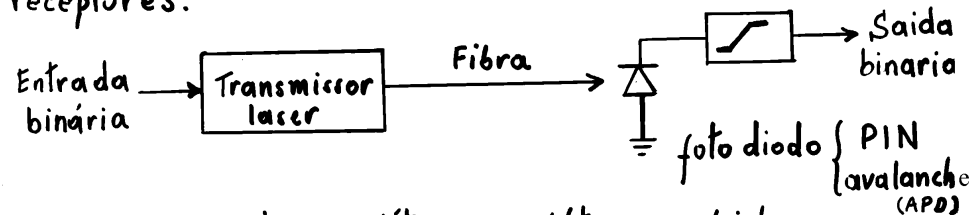


Ref.: Mauro Soares de Assis, "Radio Digital", EMBRATEL

4 D

Limites de Desempenho em Sistemas Digitais Óticos (transmissão por fibra ótica)

Tecnologia atual: Transmissão OOK ("on-off keying"), com detecção direta (detecção de envelope) nos foto-receptores.



{ diodo PIN: emite um elétron por fóton recebido.
 (sinal fraco na entrada → sinal fraco na saída)
 { APD: elevada saída, muito ruidoso.

Para o sistema considerado: 1000 fótons/bit → 10^{-9} BER

Um fóton em $1,3 \mu\text{m}$ → quantum de energia $h\nu = 15 \times 10^{-20} \text{ J}$
 Para uma taxa de 1 Gbits/s ($R=1/T$) → $P = 15 \times 10^{-8} \text{ W}$
 (para uma BER de 10^{-9})

Considerando-se uma atenuação de 0,4 dB/km, para um enlace de 100 km tem-se uma atenuação de 40 dB (10^4)
 Assim, a potência de transmissão, $P_t = 1,5 \text{ mW}$.

Lasers em 1,3 nm e 1,5 nm fornecem cerca de 1 mW

Os numeros acima são típicos. Qual o melhor desempenho absoluto que se pode esperar?

Saída do diodo PIN ao fim do intervalo binário T é a medida do numero de fótons coletados pelo diodo, no intervalo.

Cada elétron \equiv pulso estreito de corrente

O numero medido é comparado com um limiar de detecção, para determinar se um pulso de luz atingiu ou não o diodo. Para o diodo ideal, este limiar é "zero".

OOK → estado de repouso \equiv nenhuma luz no diodo

Considerando-se o numero de eletrons em um feixe de luz acompanhando uma distribuição de Poisson, tem-se que o numero médio de fótons que atinge o diodo no intervalo T é dado por $E(n) = \lambda_p T$. A probabilidade da contagem ser n é dada por:

$$P(n) = (\lambda_p T)^n \cdot e^{-\lambda_p T} / n!$$

Em qualquer intervalo de tempo $(t, t+\Delta t)$, a probabilidade que um fóton apareça é $\lambda_p \Delta t \ll 1$, e a probabilidade de nenhum fóton aparecer é $1 - \lambda_p \Delta t$.

λ_p : é uma medida da intensidade do feixe de luz (O processo de chegada dos fótons é sem memória)

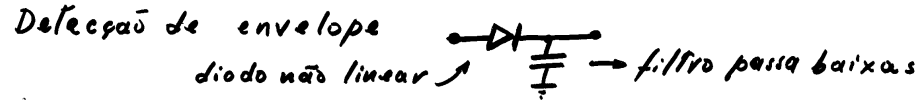
A energia média E , absorvida pelo diodo no intervalo T é:

$$E = E(n) \cdot h \cdot \nu = \lambda_p T \cdot h \cdot \nu$$

OOK → $A_T \cos \omega t$, $0 \leq t \leq T$ para pulso 1
 0 , $0 \leq t \leq T$ para pulso 0

Na recepção tem-se: $A \cdot \cos \omega t$, $0 \leq t \leq T$, com a energia do pulso proporcional a $A^2 T$, que deve ser igual à equação acima.

Fazemos $A^2 T = \lambda_p T$ ou $A^2 = \lambda_p$, neste caso $E = A^2 T \cdot h f_0$
 $A^2 \rightarrow \frac{1}{T} \rightarrow A^2 T$; o fotodiodo ideal produz em sua saída a integral do quadrado do envelope



Funcionamento do diodo ideal

Interpretação
partícula

- somatório do número de fótons que atinge o diodo no intervalo binário T

Interpretação
onda

- a saída para cada intervalo binário é proporcional à integral do envelope ao quadrado do sinal óptico que o atinge.

Para um ambiente sem ruído, ocorre o erro quando existe um pulso e o número de fótons recebido é zero, ao longo de T . A probabilidade desta ocorrência é $P(0) = e^{-\lambda_p T}$ supondo-se os pulsos presentes, em média, em metade do tempo (para OOK), tem-se que a probabilidade de erro é dada por:

$$P = \frac{1}{2} P(0) = \frac{1}{2} e^{-\lambda_p T}$$

Para $P_e = 10^{-9} \rightarrow \lambda_p T = 20,7$ fótons. $\rightarrow n^\circ$ médio em $T = 10,3$ (limite quântico). É o menor número possível, já que considerou-se ideal. Na prática requer-se 1000 fótons/bit, para chegar-se a $P_e = 10^{-9}$

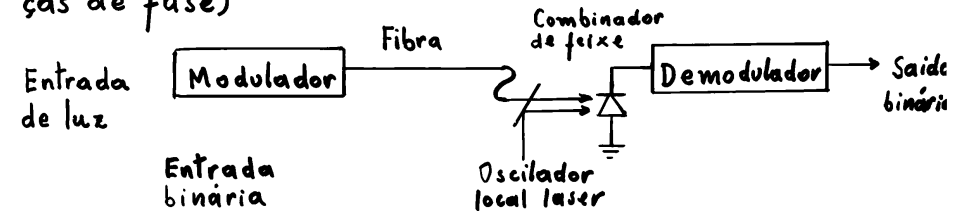
Qual a solução: técnicas de detecção coerentes.

Detecção Coerente (Homódina)

homodino \Rightarrow síncrona ou coerente

300

PSK, QPSK e QAM: detecção coerente
 (a informação do bit é transportada nas mudanças de fase)



é difícil obter-se, e manter o sincronismo entre o oscilador local e a frequência de chegada, na faixa de 10^{14} Hz!

No sistema coerente sempre há um sinal forte no diodo (bomp/PIN)

• Transmissão OOK e PSK homódinas

$$1) \text{PSK} : \begin{cases} 1 \text{ Transmitido} : +A \cos \omega_c t \text{ recebido } (T \text{ seg}) \\ 0 \text{ Transmitido} : -A \cos \omega_c t \text{ recebido } (T \text{ seg}) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Oscilador local: } B \cos \omega_c t & B > A \end{cases}$$

Entradas no fotodiodo: $(B+A) \cos \omega_c t$ e $(B-A) \cos \omega_c t$

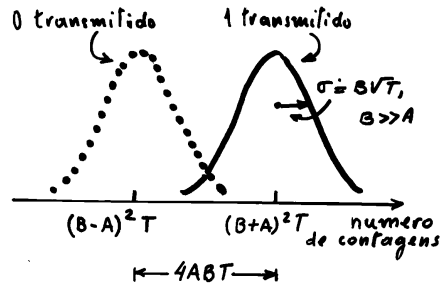
Sinal do LO \rangle obedecem uma estatística de Poisson
 Sinal recebido \rangle

Saídas: $(B+A)^2 T$ e $(B-A)^2 T$ (confiança em média do foto diodo)

Uma distribuição de Poisson com elevado valor médio, pode ser aproximada por uma distribuição normal (gaussiana) com a mesma média e variância (resultado do teorema do limite central).

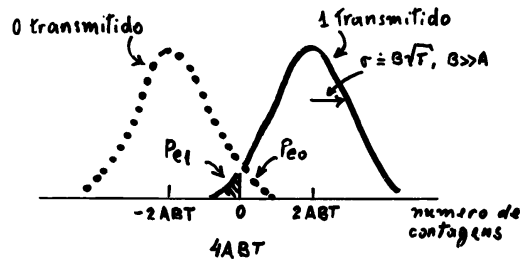
$$1 \text{ fóton} \rightarrow \text{diode symbol} \rightarrow 1 \text{ elétron}$$

400



Observa-se que o ponto médio, de valor constante $(B^2 + A^2)T$, onde as duas curvas se interceptam é inalterado ao processo de contagem e pode ser removido → usar diodo balanceado.

a) Saída do diodo: estatística da contagem de fótons, Transmissão PSK homódina



Tem-se agora as distribuições centradas em $-2ABT$ e $+2ABT$. As variâncias das duas distribuições são $(B-A)^2 T$ e $(B+A)^2 T$. Mas já que $B \gg A$, tem-se que $\sigma^2 \approx B^2 T$ (variância) e $\sigma = B\sqrt{T}$, desvio padrão

b) Saída do diodo, receptor balanceado.

Dada a contagem ao fim de cada intervalo binário, ou equivalentemente, a integral do quadrado do envelope deve-se decidir se 1 ou 0 foi transmitido. As probabilidades de erro são Pe_0 e Pe_1

Usaremos a aproximação gaussiana para a distribuição de Poisson: A função densidade normal é dada por:

$$f_x(x) = \frac{e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}, \text{ com } \sigma^2 = B^2 T$$

$$a = \begin{cases} -2ABT & \text{ou} \\ \text{(média)} & +2ABT \end{cases}$$

$$Pe_1 \text{ é dada por: } Pe_1 = \int_{-\infty}^0 \frac{e^{-\frac{(x-2ABT)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dx$$

Pe_0 é obtida integrando-se o outro lado da cauda.

500

Tais integrais só podem ser calculadas por integração numérica. Usaremos uma forma padrão. É denominada função erro $\text{erf } x$, definida por:

$$\text{erf } x \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-y^2} dy \quad \text{com } \text{erf } \infty = 1$$

Para pequenas probabilidades de erro, consideraremos $1 - \text{erf } x$, denominada "função erro complementar", $\text{erfc } x$

$$\text{erfc } x \equiv 1 - \text{erf } x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-y^2} dy$$

Assim:

$$Pe_1 = \frac{1}{2} \text{erf } \frac{2 \cdot A \cdot B \cdot T}{\sigma \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \text{erfc } \sqrt{2AT^2}$$

já que $\sigma^2 = B^2 T$

A probabilidade de erro de bit total, Pe , é calculada a partir das probabilidades de erro a priori, com P_0 a probabilidade de ocorrência do bit 0, e $P_1 = 1 - P_0$, a probabilidade de ocorrência do bit 1. Assim.

$$Pe = P_0 \cdot Pe_0 + P_1 \cdot Pe_1, \text{ com } P_1 = P_0 = 1/2 \text{ e } Pe_1 = Pe_0, \text{ então.}$$

$$Pe = Pe_1, \text{ com } A^2 T = \lambda_p T, \text{ tem-se:}$$

$$Pe = \frac{1}{2} \text{erfc } \sqrt{2\lambda_p T} \quad \text{Transmissão homódina PSK}$$

Aproximação: $\text{erfc } x \approx \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}}, x > 3$, então:

$$Pe = \frac{1}{2} \frac{e^{-2\lambda_p T}}{\sqrt{2\pi\lambda_p T}} \quad \sqrt{2\lambda_p T} > 3$$

600

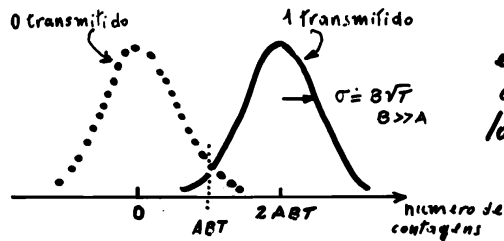
Para $P_e = 10^{-9} \rightarrow \lambda_p T = 9 \text{ fotons/bit} \rightarrow$ limite quântico para Transmissão PSK homódina

Por que então coerente?

1. o limite quântico para a detecção direta é idealizado (receptor sem ruído);
2. sistemas binários coerentes possibilitam FDM.

De 1.3 a 1.55 $\mu\text{m} \rightarrow BW \approx 0.5 \times 10^{14} \text{ Hz}$. Digamos que deseja-se uma transmissão PSK a 10 Gbit/s. Para um roll-off de 25%, a largura de banda é 12.5 GHz \rightarrow 4000 canais poderiam ser acomodados via FDM nesta faixa de comprimento de onda. (Para 2 Gbit/s \rightarrow 20.000 canais)

2. OOK homódino



O sinal recebido, $+A \cos \omega_b t$ ou 0, é detectado sincronamente, adicionando-se o sinal do oscilador local, $B \cos \omega_b t$, $B \gg A$. O sinal de luz no fotodiodo é então: $(B+A) \cos \omega_b t$ ou $B \cos \omega_b t$.

Estatística de contagem dos fótons, receptor balanceado, Transmissão OOK homódina.

Observe! Na detecção direta (sem oscilador local), qualquer contagem significa que o bit 1 está presente.

Na detecção OOK homódina, se o número de contagens exceder AB , o bit 1 é considerado presente.

$$P_e = \frac{1}{2} \text{erfc} \sqrt{A^2 T / 2} = \frac{1}{2} \text{erfc} \sqrt{\lambda_p T / 2} \approx \frac{1}{2} \frac{e^{-\lambda_p T / 2}}{\sqrt{\pi \lambda_p T / 2}}$$

Para $P_e = 10^{-9} \rightarrow$ limite quântico = 18 fótons/bit

700

3. PSK homódino com $B=A$

O sinal de luz recebido $\pm A \cos \omega_b t$ é adicionado ao sinal óptico do oscilador local $B \cos \omega_b t$, com $B=A$. A amplitude, fase e a frequência do sinal recebido estão sincronizadas com o oscilador local. A entrada do diodo é $2A \cos \omega_b t$ para 1, e 0 para o bit 0, e a saída é 0 para 0 e $4A^2 T = 4\lambda_p T$, se 1 é recebido. A distribuição de Poisson se aplica, e a probabilidade de erro é dada por:

$$\text{para } P_e = 10^{-9} \rightarrow \lambda_p T = 5.2 \text{ fotons/bit} \text{ (limite superquântico)}$$

além do sincronismo de fase e frequência, o desvio fraccional de amplitude deve ser mantido inferior a 0,004%. Já que qualquer contagem feita durante a transmissão de um 0 ($-A \cos \omega_b t$) produz um erro - o termo do erro é $\frac{1}{2} [1 - e^{-(A-B)^2 T}] \approx \frac{1}{2} (A-B)^2 T$. Como $(A+B)^2 T =$

$$4A^2 T = 20.6, \text{ tem-se que } (A-B)/A \leq 4 \times 10^{-5}$$

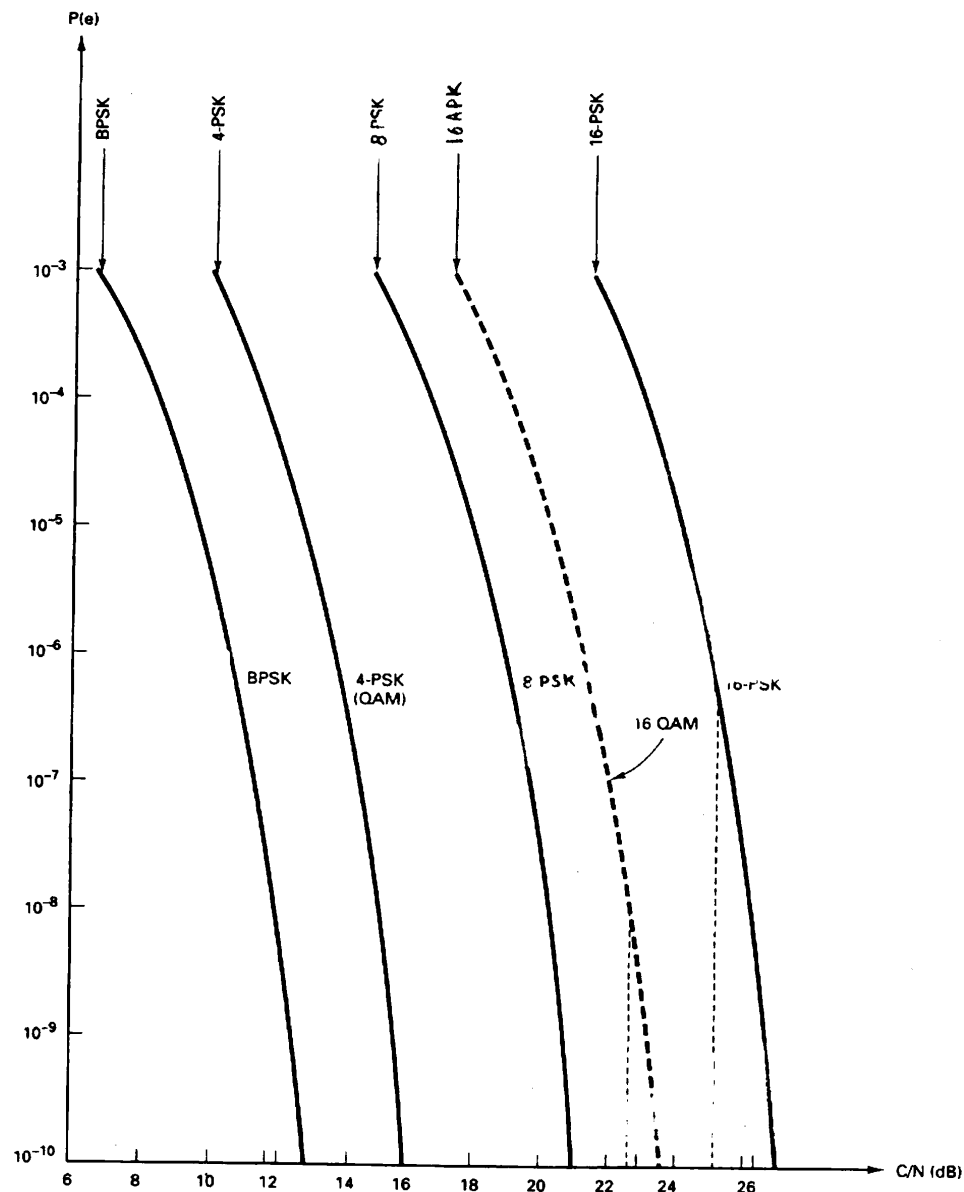
Limites quânticos, transmissão óptica, $P_e = 10^{-9}$

Técnica de detecção	Fótons/bit necessários
Detecção direta	10,3
Homódina coerente:	
OOK	18
PSK	9
Limite superquântico	5,2
Heteródina coerente	
OOK	36
FSK	36
PSK	18

Ref: Mischa Schwartz, "Information, Transmission, Modulation and Noise," 4ª edição, 1990, McGraw-Hill Publishing Company

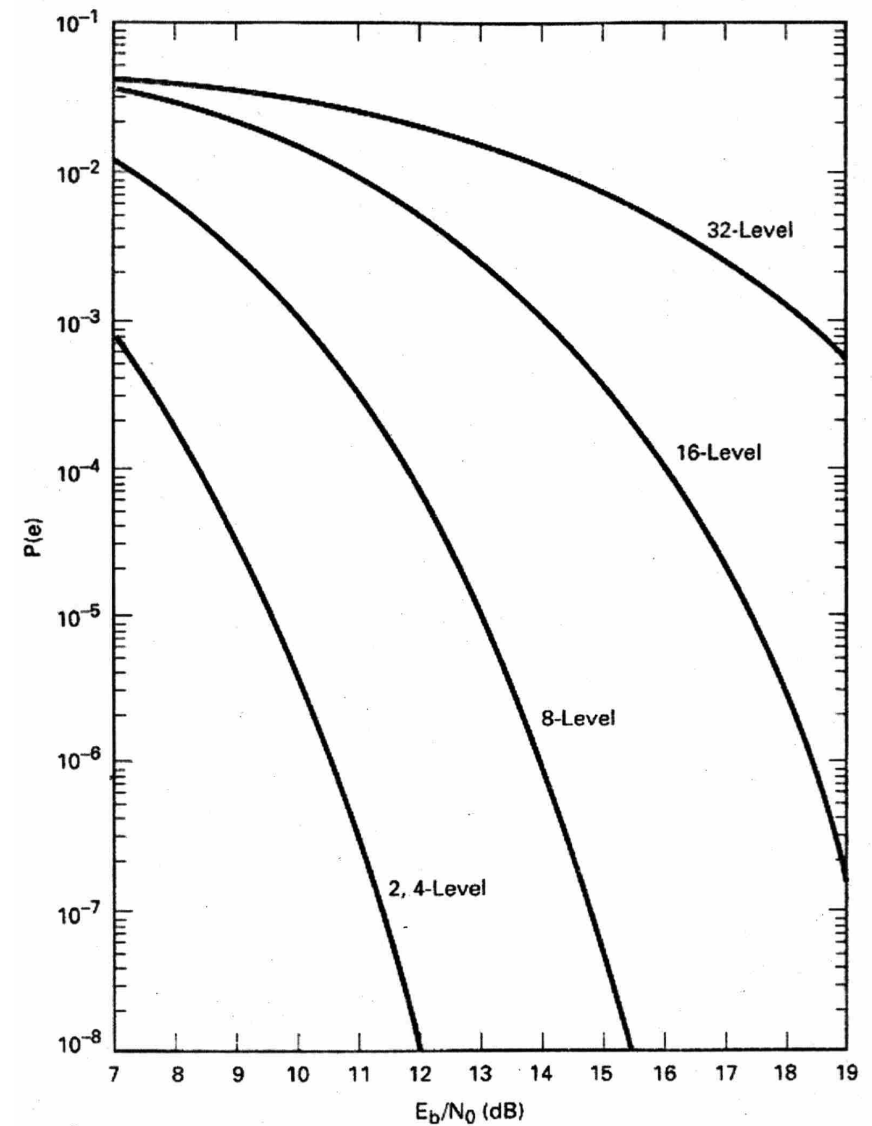
800

Probabilidade de Erro



Desempenho da Probabilidade de Erro $P(e)$ versus relação C/N para sistemas coerentes M-ário PSK, QAM, QPR e M-ário APK. O valor rms C/N está especificado para a largura de banda de Nyquist dupla no espectro.

Modulação PSK – probabilidade de erro



Probabilidade de Erro $P(e)$ versus relação E_b/N_0 para diversos tipos de modulação PSK