Capacidade do Canal

Comunicação Digital

. Capacidade do Canal Contínuo

A transferência de informação em um canal contínuo assume a forma de uma transmissão de sinal. A fonte emite um sinal, $x(t)$, que após ser corrompido pelo ruído de transmissão está disponível no destino como um outro sinal, $y(t)$. A "informação média mútua" é definida por analogia com o caso discreto como sendo:

$$I(X;Y) \triangleq \iint_{-\infty}^{\infty} p_{XY}(x,y) \log_2 \frac{p_X(x|y)}{p_X(x)} \cdot dx\, dy \qquad (1)$$

Onde:

$p_X(x)$: é a função densidade de probabilidade da fonte;
$p_{XY}(x,y)$: função densidade de probabilidade conjunta ("joint PDF")

Assim, $I(X;Y)$ mede a transferência de informação absoluta por amostra do valor de $y(t)$ no destino. Observa-se que $I(X;Y) \geq 0$ e que quando $I(X;Y)=0$ o ruído é tão intenso que $y(t)$ não tem relação com $x(t)$.

A equação acima também pode ser expressa por:

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X) \qquad (2)$$

Onde:
$H(Y)$: entropia no destino;
$H(Y|X)$: entropia do ruído.

Caso o canal apresente um ruído aditivo independente:

$$y(t) = x(t) + n(t) \qquad (3)$$

$n(t)$ → ruído
$x(t)$ → sinal transmitido
$y(t)$ → sinal recebido

e então:

$$p_Y(y|x) = p_Y(x+n) = p_n(y-x) \qquad (4)$$

onde $p_n(n)$ é a PDF do ruído. Assim $H(Y|X)$ reduz-se a:

$$H(Y|H) = \int_{-\infty}^{\infty} p_n(n) \log_2 \frac{1}{p_n(n)}\, dn \qquad (5)$$

independente de $p_X(x)$.

Consideremos agora um canal com PDF de transição direta fixa, de modo que a transferência máxima de informação por amostra de $y(t)$ é dada por:

$$C_s \triangleq \max_{p_X(x)} I(X;Y) \quad \text{bits/amostra} \qquad (6)$$

Caso o canal seja limitado em banda, B, então $y(t)$ é um sinal limitado em banda, completamente definido pelos valores das amostras tomadas na taxa de Nyquist, $f_s = 2B$; idêntica à máxima taxa de transmissão possível para uma dada largura de banda, B. Amostras tomadas em taxa superior à de Nyquist não seriam independentes e não transportariam informação adicional. A taxa máxima de transferência de informação torna-se então:

$$C \triangleq 2 . B . C_s \quad \text{bits/segundo} \qquad (7)$$

Que define a CAPACIDADE de um canal contínuo limitado em banda.

O teorema fundamental de Shannon para um canal ruidoso aplica-se aqui no sentido que a transmissão sem erro é teóricamente possível sob qualquer taxa de informação $R < C$

O modelo de canal contínuo de maior interesse é conhecido como Ruído Branco Aditivo Gaussiano (AWGN), definido pelas seguintes propriedades:

1. o canal possibilita transmissão sem distorção ao longo de alguma largura de banda B, e qualquer perda na transmissão é compensada pela amplificação;

2. o canal restringe a entrada oriunda da fonte ser um sinal limitado em banda $x(t)$ com potência média fixa $S = \overline{x^2}$;

3. o sinal recebido no destino está contaminado pela adição de ruído branco gaussiano $n(t)$, limitado em banda, com média zero e potência média de ruído $N = \overline{n^2} = \eta \cdot B$, onde "$\eta$" é a densidade espectral de ruído, expressa em W/Hz

4. o sinal e o ruído são independentes de modo que $y(t) = x(t) + n(t)$ e:

$$\overline{y^2} = \overline{x^2} + \overline{n^2} = S + N \qquad (8)$$

N → potência do ruído

S → potência do sinal

2. Capacidade máxima do canal

Já que $p_n(n)$ é uma função gaussiana com média zero com variância $\sigma^2 = N$, tem-se que $H(Y|X) = \frac{1}{2} \log 2\pi e N$. Como $H(Y|X)$ não depende da PDF da fonte, tem-se que:

$$C_s = \max_{p_X(x)} \left[H(Y) - H(Y|X)\right] = \left[\max_{p_X(x)} H(Y)\right] - \frac{1}{2} \log_2 2.\pi.e\, N \qquad (9)$$

Mas o sinal recebido $y(t)$ apresenta potência média fixa $\overline{y^2} = S + N$, e então $H(Y) \leq \frac{1}{2} \log 2\pi.e(S+N)$. Caso $p_X(x)$ seja uma função gaussiana com média zero, então $y = x + n$ possui PDF gaussiana e $H(Y)$ é maximizada. Logo:

$$C_S = \frac{1}{2} \log_2 2.\pi.e(S+N) - \frac{1}{2} \log_2 2\pi e\, N = \frac{1}{2} \log_2 \left(\frac{S+N}{N}\right) \qquad (10)$$

Substituindo-se a equação (10) na equação (7) obtém-se a equação da "TAXA MÁXIMA TEÓRICA SEM ERROS EM UM CANAL LIMITADO EM BANDA E SUBMETIDO À RUIDO BRANCO ADITIVO GAUSSIANO" expressa por:

$$C = BW . \log_2 \left(1 + \frac{S}{N}\right) \quad \text{bits/segundo} \qquad (11)$$

C: taxa teórica máxima sem erros do canal, bps;
BW: largura de banda do canal (sistema), Hz;
S: potência do sinal recebido, W;
N: potência média do ruído, W.
S/N: relação sinal-ruído (adimensional) de recepção.

Observe que na equação (11) acima o logaritmo é na base "2". Podemos usar a regra de mudança de base ($\log_2 A = \log_{10} A / \log_{10} 2$) para obter uma expressão como logaritmo na base "10". Ou seja:

$$C = \frac{BW}{\log_{10} 2} \times \log_{10}\left(1 + \frac{S}{N}\right) \quad bps \qquad (12)$$

A equação (11) é a Lei de Hartley-Shannon. Quando reunida com o Teorema fundamental estabelece um limite superior para a transmissão de informação confiável em um canal limitado em banda e AWGN, ou seja

$$R \leq BW \cdot \log_2(1 + S/N) \text{ bits/segundo.}$$

Considerando-se que largura de banda e relação sinal-ruído são os parâmetros básicos de transmissão a equação (11) estabelece um padrão geral de comparação entre sistemas de comunicações.

Veremos à seguir algumas implicações desta lei.

3. Sistemas ideais de Comunicações

Basicamente todo sistema real de comunicações é capaz de transmitir sinais contínuos, com limitações de potência e de largura de banda. Além disso, caso excluamos a transmissão radio com desvanecimento, um projeto cuidadoso pode praticamente eliminar as demais contaminações, com exceção, é claro, do inevitável ruído térmico.

Definiremos um sistema ideal como aquele aquele que obtém uma taxa de erros aproximadamente zero, com a taxa aproximando-se de $R = BW \cdot \log_2(1 + S/N)$. Segundo Shannon o diagrama em blocos de tal sistema seria igual ao mostrado abaixo.

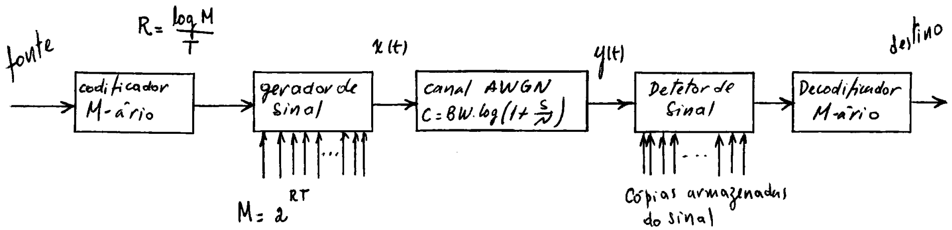

Figura 1: Sistema ideal de comunicações em canal AWGN

A informação oriunda da fonte é observada em intervalos de T segundos e codificada em símbolos equiprováveis M-ários, tal que $(\log_2 M)/T = R$. Para cada símbolo o gerador emite uma forma de onda única, $x(t)$, selecionada à partir de um conjunto de $M = 2^{RT}$ sinais. Estes sinais são gerados por um processo limitado em banda branco gaussiano. e cópias armazenadas estão disponíveis na recepção. O detetor de sinal compara o sinal recebido $y(t) = x(t) + n(t)$ com as cópias armazenadas e escolhe a mais provável para detecção. As operações de codificação na fonte e decodificação na recepção resultam em um retardo total de $2T$ segundos, denominado "retardo de codificação"

O número de sinais diferentes requeridos depende da probabilidade de erro desejada, P_e, e Shannon demonstrou que:

$$\lim_{P_e \to 0} \lim_{T \to \infty} \frac{\log M}{T} = B . \log\left(1 + \frac{S}{N}\right) \qquad (13)$$

Ou seja R tende para C no limite em que $T \to \infty$, o que significa que o número de sinais e o retardo de codificação tornam-se infinitamente grandes, de modo que o sistema ideal é irrealizável. No entanto, sistemas reais, com valores elevados, porém finitos, de M e T podem ser projetados para aproximarem-se tanto quanto quisermos do desempenho ideal.

Observe que a equação (11) prenuncia uma solução de compromisso entre largura de banda e relação sinal-ruído. Isto é constatado nos sistemas FM e no CDMA. Assim, o teorema de Hartley-Shannon especifica uma relação ótima de largura de banda e potência, e portanto, sugere a possibilidade da "compressão da largura de banda".

Vamos reescrever a equação (11) empregando a densidade espectral de potência de ruído. Assim.

$$C = BW . \log_2\left(1 + \frac{S}{\eta BW}\right) \qquad (14)$$

Portanto, caso η e BW tenham valores fixos, a transmissão da informação na taxa $R < C$ requer que:

Capacidade do canal 7/14

$$\frac{S}{\eta . R} \geqslant \frac{BW}{R}\left(2^{R/BW} - 1\right) \qquad (15)$$

que se torna uma igualdade quando $R = C$. A figura abaixo mostra a curva de $S/\eta R$ em dB versus BW/R.

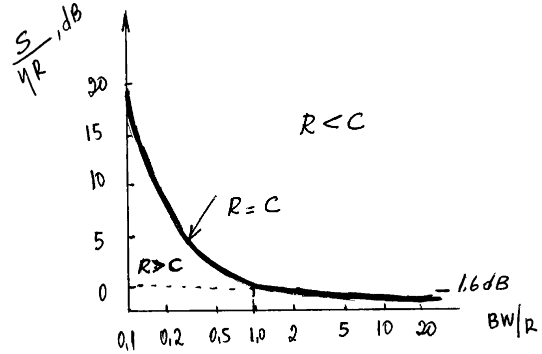

Figura 2: Solução de compromisso entre largura de banda e potência do sinal em um sistema ideal

Um sistema ideal com largura de banda infinita tem a capacidade dada por:

$$C_\infty \triangleq \lim_{BW \to \infty} BW . \log\left(1 + \frac{S}{\eta BW}\right) = \frac{S}{\eta . \ln 2} \simeq 1.44 \frac{S}{\eta} \qquad (16)$$

A equação (16) é obtida da equação (15) escrita na forma:

$$C = \frac{S}{\eta \lambda} \cdot \frac{\ln(1+\lambda)}{\ln 2} \qquad \text{com } \lambda = \frac{S}{\eta BW}$$

A expansão em série $\ln(1+\lambda) = \lambda - \frac{1}{2}\lambda^2 + \cdots$ mostra que $[\log(1+\lambda)]/\lambda \to 1$ conforme $\lambda \to 0$, correspondendo a $BW \to \infty$. Observe que C_∞ é a máxima capacidade para um dado S e η, de forma que:

Capacidade do canal 8/14

$$S/\eta R \geq S/\eta C_\infty = \ln 2 \simeq -1{,}6\,dB \qquad (17)$$

Da figura acima observa-se que $C \simeq C_\infty$ quando $BW/R > 10$.

Deve ser enfatizado que estes resultados são aplicáveis a um sistema ideal, porém irrealizável. Portanto, podem ser usados para estimar-se os limites superiores de desempenho de qualquer sistema real cujo canal de transmissão aproxime-se do modelo AWGN.

Exemplo 1: Um veículo equipado com uma câmera monocromática está em Marte. As imagens digitalizadas são enviadas à Terra. Deseja-se determinar o tempo necessário para a transmissão de uma imagem completa, dadas as seguintes especificações do sistema: Uma imagem digitalizada consiste de $n_p = 400 \times 300$ pixels (elementos de imagem), com cada pixel com 16 níveis de brilho possíveis. Portanto, a taxa de informação R e o tempo de transmissão da imagem relacionam-se por:

$$R.T = n_p . \log_2 16 = 400 \times 300 \times 4 = 480.000 \text{ bits.}$$

considerando-se os níveis equiprováveis.

A distância média Terra-Marte é de 3×10^8 km, sendo vencida por um enlace cuja freqüência portadora é 2GHz. O transmissor do veículo apresenta uma potência de 20W e alimenta uma antena com 1 metro de diâmetro. A estação terrena é composta por um receptor de baixo ruído cuja temperatura de ruído é igual a 58K, alimentado por uma antena do tipo refletor parabólico com 30 metros de diâmetro.

O sinal recebido pode ser obtido à partir de:

capacidade do canal 9/14

$$P_{r,dBW} = P_{t,dBW} + G_{t,dB} + G_{r,dB} - L_{o,dB} \qquad (18)$$

perda por espaço livre, dB

ganho da antena receptora, dB

ganho da antena transmissora, dB

potência transmitida, dBW

Potência recebida, em dBW

Dos dados temos:

$$L_{o,dB} = 32{,}45 + 20 \times \log_{10}(2000) + 20 \times \log_{10}(3 \times 10^8) = 268\,dB$$

$G_t = 26\,dB \quad (398{,}1)$

$G_r = 56\,dB \quad (398107{,}2)$

$P_{t,dBW} = 10 \times \log_{10}(20) = 13\,dBW$

Assim:

$$P_{r,dBW} = 13\,dBW + 26\,dB + 56\,dB - 268\,dB = -173\,dB$$

$$P_r = 10^{(-173/10)} = 5 \times 10^{-18}\,W$$

A densidade de potência no receptor é:

$$\eta = k.T = 1.38 \times 10^{-23} \times 58 = 8 \times 10^{-22}\,W/Hz$$

Já que a largura de banda de transmissão não foi especificada consideremos $BW/R > 10$ (sem limitação de banda). Um sistema ideal apresentaria:

$$R \leq C \simeq C_\infty = 1.44 \frac{P_r}{\eta} \simeq 9000\,bps$$

E a largura de banda correspondente deveria ser $BW > 10R \geq 90\,kHz$. Assim, o tempo de transmissão por imagem é de:

$$T \geq \frac{480.000 \text{ bits}}{9000 \text{ bits/segundo}} \simeq 53 \text{ segundos}$$

capacidade do canal 10/14

Certamente um sistema real levaria um pouco mais de tempo para a transmissão da imagem. O ponto aqui é que nenhum sistema com as especificações acima conseguiria um tempo inferior de transmissão.

Exemplo 2: Um canal telefônico de voz é limitado em banda de 300 Hz a 3400 Hz. Um valor para a relação sinal-ruído na linha do assinante é de 8 dB. Desejamos determinar a máxima taxa teórica sem erros,

Inicialmente obtemos $BW = 3400 - 300 = 3100$ Hz.

Em seguida obtemos a relação S/N para substituirmos na equação (11).

$$\frac{S}{N} = 10^{(8/10)} = 6,3$$

Substituindo os valores acima na equação (11) temos:

$$C = 3100 \times \log_2(1 + 6,3) \simeq 8900 \text{ bps}$$

Um valor bem próximo dos 9600 bps nominais.

Exemplo 3: O sistema ADSL permite uma taxa máxima de 512 kbps usando linha telefônica. O emprego das URA's permite reduzir o comprimento da linha e assim aumentar a relação sinal-ruído. Considerando uma relação sinal-ruído de 18 dB qual a largura de banda necessária para atingir-se a taxa especificada, sem erros?

Uma relação sinal-ruído de 18 dB é equivalente a:

$$\frac{S}{N} = 10^{(18/10)} = 63,1$$

$$512.000 = BW \cdot \log_2(1 + 63,1) \therefore \quad BW = 85,3 \text{ kHz}.$$

Torna-se claro que o ADSL requer circuitos com maior largura de banda, mesmo empregando modulação multinível, como ocorre na prática.

Exemplo 4: Uma máquina com 64 símbolos é ligada a um canal telefônico com $BW = 3$ kHz e $S/\eta BW = 30$ dB. Determine

a) a taxa máxima de transmissão de símbolos sem erros;

b) a taxa máxima de transmissão de símbolos sem erros se a banda for reduzida a 1 kHz.

c) a taxa máxima de transmissão de símbolos sem erros, considerando-se que não há limitação de banda ($BW \to \infty$)

Solução:

a) Aplicando a equação (11) ou a modificada (12).

$$C = 3000 \times \log_2\left(1 + \frac{S}{\eta BW}\right) \quad \text{com } \frac{S}{\eta BW} = 10^{(30/10)} = 1000$$

$$C = \frac{3000}{\log_{10} 2} \times \log_{10}(1 + 1000) = 29,9 \text{ kbps} \to 4983,3 \text{ símbolos/s}$$

b) $$C = \frac{1.000}{\log_{10} 2} \times \log_{10}(1001) = 9,97 \text{ kbps} \to 1,66 \text{ ksímbolos/s}$$

c) $$\frac{S}{\eta BW} = 1000 \text{ p/ } BW = 3000 \text{ Hz}, \text{ logo } \frac{S}{\eta} = 3 \times 10^6$$

Aplicando a equação (16): $C_\infty = 1,44 \times \frac{S}{\eta} = 1,44 \times 3 \times 10^6 =$

$= 4,32$ Mbps $\to$ 720.000 símbolos/segundo

4. Sistemas digitais

Em sistemas digitais é mais usual empregarmos a energia do bit como intensidade do sinal e a densidade espectral de potência de ruído com medida de ruído. Neste caso a equação (11) torna-se:

$$C = BW \times \log_2\left(1 + \frac{Eb}{\eta}\cdot\frac{C}{BW}\right) \quad bps \qquad (19)$$

onde:

C: taxa máxima teórica sem erros de transmissão, bps;
BW: largura de banda do canal, Hz;
Eb: energia do bit, J;
η: densidade espectral de potência de ruído, W/Hz;
C/BW: eficiência espectral, bps/Hz

A energia do bit, Eb, é característica do sistema, bem como BW, sendo ambos na prática sujeitos à limitações legais e tecnológicas.
Eb é obtido de Sr/R, onde R é a taxa de transmissão real.

A densidade espectral de ruído é característica do canal e do sistema, pode ser obtida de $\eta = k.T$, onde k é a constante de Boltzmann, igual a $1,38 \times 10^{-23}$ e T é a temperatura de ruído equivalente do sistema (receptor).

A relação C/BW é a eficiência espectral, uma medida de quantos bits por segundo são "colocados" em cada Hz de largura de banda. Quanto maior a eficiência espectral maior a quantidade de bits transmitidos na largura de banda considerada.

A taxa real de transmissão de dados, R (de operação), atende :

codificação do canal 13/14

a) $R \leq C$: pode-se obter uma taxa de erro (BER) tão baixa quanto desejado, usando-se uma modulação tão complexa quanto necessária.

b) $R > C$: Não é possível encontrar-se um código que leve a uma probabilidade de erro arbitrariamente pequena.

Limite de Shannon: é o valor mínimo de Eb/η, abaixo do qual não ocorre comunicação sem erros, QUALQUER que seja a taxa de dados (informação)

$$\left.\frac{Eb}{\eta}\right|_{mínimo} = \ln 2 \doteq -1,59\, dB$$

A relação Eb/η também pode ser obtida de:

$$\frac{Eb}{\eta} = \frac{Sr}{N} \times \frac{BW}{R} \quad \text{ou equivalentemente}$$

$$\frac{Eb}{\eta}, dB = \underbrace{(SNR)\, dB}_{\text{adimensional}} + 10 \times \log_{10}\left(\frac{BW}{R}\right)$$

BW: largura de banda, Hz
R: taxa de dados, bps

codificação do canal 14/14