

TEMA IV. INTEGRALES MÚLTIPLES.

Los tipos de integrales que se estudiarán son:

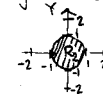
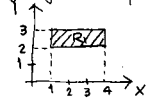
- I. Integrales dobles sobre regiones planas
- II. Integrales dobles sobre superficies alabeadas
- III. Integrales triples.

En el estudio de cada tipo de integral se verá como realizar cambios de variable con el fin de simplificar el cálculo de las integrales múltiples.

I. INTEGRALES DOBLES SOBRE REGIONES PLANAS.

Una región plana es un conjunto infinito de puntos definidos por una pareja de valores reales. Por ejemplo en el plano cartesiano una región queda completamente definida al establecer los límites de las variables x y y . La región que se muestra en la siguiente figura se puede definir de la siguiente forma: $R_1 = \{(x,y) / 1 \leq x \leq 4, 2 \leq y \leq 3\}$

que se lee "la región R es el conjunto de puntos de coordenadas $\{x,y\}$ tales que x es mayor que uno y menor que cuatro y y es mayor que dos y menor que tres". La siguiente región circular puede definirse así: $R_2 = \{(x,y) / x^2 + y^2 = 1\}$, es decir todos los puntos cuyas coordenadas satisfagan a la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ pertenecen a la región R . Para el cálculo de integrales dobles se procurará definir la región de tal forma que los

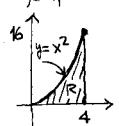


La región circular puede definirse en forma más sencilla utilizando coordenadas polares $\{\rho, \theta\}$. Se observa que cualquier punto de la región R_2 no dista más que una unidad del origen, de esta forma:

$$R_2 = \{(\rho, \theta) / 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

Es claro que θ debe ser mayor que cero y menor que 2π para definir por completo a la región circular.

Ejemplo: Definir la región limitada por las curvas



$$y = x^2, x = 4 \text{ y } y = 0.$$

Las sig. dos definiciones son válidas:

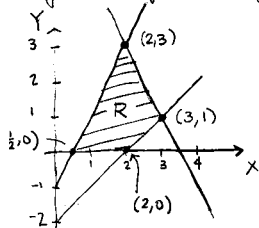
$$R_x = \{(x,y) / 0 \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq x^2\} \quad \text{y}$$

$$R_y = \{(x,y) / \sqrt{y} \leq x \leq 4, 0 \leq y \leq 16\}$$

Ejemplo: Definir la región limitada por las rectas:

$$y = 2x - 1, y = x - 2, y = 7 - 2x \text{ y } y = 0.$$

En este caso se necesita dividir a la región de la siguiente forma



$$R = R_1 \cup R_2$$

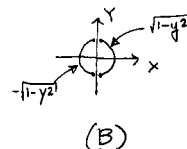
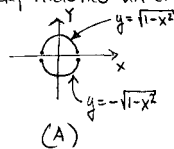
Límites de las variables x y y sean directamente los límites de integración. La forma en que se ha definido la región circular anterior no es adecuada para estos fines, por lo que es necesario definirla en forma similar a la región rectangular, es decir estableciendo límites para las variables x y y de la siguiente forma

$$R_2 = \{(x,y) / -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}\} \quad \dots (A)$$

es decir, la abscisa es mayor que -1 y menor que 1, mientras que la ordenada está limitada por las curvas de ecuaciones $y = -\sqrt{1-x^2}$ y $y = \sqrt{1-x^2}$ que son las fronteras inferior y superior de la región circular. Obsérvese que los límites de la ordenada son variables, dependen del valor de x . Otra forma de definir a la región R_2 es estableciendo los límites de la abscisa como funciones de la variable y :

$$R_2 = \{(x,y) / -\sqrt{1-y^2} \leq x \leq \sqrt{1-y^2}, -1 \leq y \leq 1\} \quad \dots (B)$$

En la sig. figura se ilustra la forma en que se interpretan las definiciones anteriores.



entonces:

$$R_{1x} = \{(x,y) / \frac{1}{2} \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq (2x-1)\}$$

$$R_{2x} = \{(x,y) / 2 \leq x \leq 3, (x-2) \leq y \leq (7-2x)\}$$

Se hace notar que fue necesario determinar las coordenadas de los puntos de intersección de las fronteras.

* CÁLCULO DE LA INTEGRAL DOBLE EN REGIONES CON FRONTERAS PARALELAS A LOS EJES COORDENADOS.

Debe notarse que en este tipo de regiones los límites de las variables x y y son constantes.

Teorema. Sea $R = \{(x,y) / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, donde $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}$. Sea $f(x,y)$ una función escalar de dos variables; entonces:

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y) dx \right] dy$$

El orden en que se efectúa la integral reiterada es irrelevante (sólo en regiones con fronteras paralelas a los ejes x y y).

* CÁLCULO DE LA INTEGRAL DOBLE EN REGIONES CUALESQUIERA.

Teorema. Sea la función $f(x,y)$ y sea la región $R = \{(x,y) / a \leq x \leq b, \varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)\}$, entonces:

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y) dy \right] dx$$

Teorema. Sea la función $f(x,y)$ y sea la región $R = \{(x,y) / \psi_1(y) \leq x \leq \psi_2(y), c \leq y \leq d\}$, entonces:

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y) dx \right] dy$$

Notese que debe integrarse primero respecto a la variable que tenga límites variables, por lo que en estos casos el orden de integración sí es relevante.

Ejemplo: Sea $f(x,y) = x^2 + y^2$. Determine $\iint_R f(x,y) dx dy$ donde la región R está limitada por las rectas $x = -1$, $x = 1$, $y = 0$ y $y = 1$.

Solución: La región R se define de la sig. manera:

$$R = \{(x,y) / -1 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$$

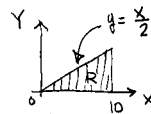
Luego $\iint_R f(x,y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dy \right] dx$

$$= \int_{-1}^1 \left[yx^2 + \frac{y^3}{3} \right]_0^1 dx = \int_{-1}^1 \left[(1)x^2 + \left(\frac{1}{3}\right) - (0x^2 + \frac{0^3}{3}) \right] dx$$

$$= \int_{-1}^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{1}{3}x \right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3}$$

$$\therefore \iint_R (x^2 + y^2) dx dy = \frac{4}{3}$$

Ejemplo: Sea $f(x,y) = x^2 y^2$. Determine $\iint_R f(x,y) dx dy$ donde la región R está limitada por las rectas $y = \frac{x}{2}$, $x = 10$, $y = 0$.



Aquí la región puede definirse como

$$R_x = \{(x,y) / 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq \frac{x}{2}\}$$

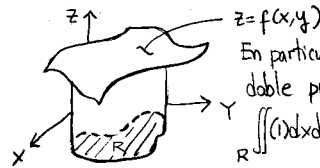
entonces:

$$\begin{aligned} \iint_R f(x,y) dx dy &= \int_0^{10} \left[\int_0^{x/2} (x^2 y^2) dy \right] dx = \int_0^{10} \left[x^2 y + \frac{x^2}{3} \right]_0^{x/2} dx \\ &= \int_0^{10} \left[x^2 \left(\frac{x}{2} \right) + \frac{x^2}{3} \right] dx = \int_0^{10} \left[\frac{x^3}{2} + \frac{x^3}{3} \right] dx \\ &= \int_0^{10} \left[\frac{5x^3}{6} \right] dx = \left[\frac{5}{24} x^4 \right]_0^{10} \\ &= \frac{5}{24} (10)^4 = 1354 \end{aligned}$$

INTERPRETACION GEOMETRICA DE LA INTEGRAL DOBLE.

Si se tiene una región R y sobre ella está definida una función $z = f(x,y)$ que puede representarse por una superficie, el volumen comprendido entre esa superficie, el plano xy y el cilindro cuya directriz es la frontera de la región R y cuya generatriz z es paralela al eje z , está dado por:

$$V = \iint_R f(x,y) dx dy$$



En particular, si $f(x,y) = 1$, la integral doble proporciona el área de la región R .

$$\iint_R (1) dx dy = \iint_R dx dy = \iint_R dA = A_R$$

↑
diferencial de área

Ejemplo: Calcular el área sombreada:

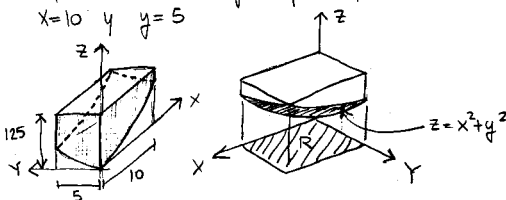
La región se define como:

$$R_y = \{(x,y) / y^2 \leq x \leq y+2, -1 \leq y \leq 2\}$$

$$\therefore A_R = \iint_R dx dy = \int_{-1}^2 \left[\int_{y^2}^{y+2} dx \right] dy = \int_{-1}^2 (y+2 - y^2) dy = \left[\frac{y^2}{2} + 2y - \frac{y^3}{3} \right]_{-1}^2$$

$$A_R = \frac{9}{2} \checkmark$$

Ejemplo: Calcular el volumen comprendido entre la superficie $z = x^2 + y^2$ y los planos xz , yz , $z = 125$, $x = 10$ y $y = 5$.



La región sobre la que se va a integrar es:

$$R = \{(x,y) / 0 \leq x \leq 10, 0 \leq y \leq 5\}$$

Según la interpretación geométrica de la integral doble el volumen buscado está dado por:

$$V = \iint_R (125) dx dy - \iint_R (x^2 + y^2) dx dy$$



$$\therefore \iint_R 125 dx dy = 125 \int_0^{10} \int_0^5 dy dx = 125 (10)(5) = 6250$$

$$\begin{aligned} \iint_R (x^2 + y^2) dx dy &= \int_0^{10} \int_0^5 (x^2 + y^2) dy dx = \int_0^{10} \left[x^2 y + \frac{y^3}{3} \right]_0^5 dx \\ &= \int_0^{10} \left(5x^2 + \frac{125}{3} \right) dx = \left[\frac{5}{3} x^3 + \frac{125}{3} x \right]_0^{10} = \frac{6250}{3} \end{aligned}$$

Finalmente

$$V = 6250 - \frac{6250}{3} = \frac{12500}{3} \text{ u}^3 \text{ unidades cúbicas.}$$

TEOREMA DE GREEN.

Sea R una región regular cerrada limitada por un conjunto de curvas suaves a trozos. Si $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, son continuas en R .

$$\oint_C P dx + Q dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

En forma vectorial este teorema se expresa como

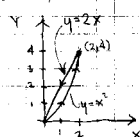
$$\oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_R (\nabla \times \vec{F}) \cdot \vec{k} dx dy$$

donde $\vec{F} = P\vec{i} + Q\vec{j}$

Ejemplo: Emplear el teorema de Green para evaluar

$$\oint_C y^2 dx + 4xy dy$$

donde C es el arco de la parábola $y=x^2$ desde el origen hasta el punto $(2,4)$ y el segmento rectilíneo de $(2,4)$ al origen.



Del teorema de Green

$$\oint_C y^2 dx + 4xy dy = \iint_R \left[\frac{\partial}{\partial x}(4xy) - \frac{\partial}{\partial y}(y^2) \right] dA$$

$$R = \{(x,y) / 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}$$

$$\begin{aligned} \iint_R (4y - y^2) dA &= \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (4y - y^2) dy dx = \int_0^2 \left[2y^2 - \frac{y^3}{3} \right]_{x^2}^{2x} dx \\ &= \left(\frac{4x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right) \Big|_0^2 = \frac{2^5}{3} - \frac{2^5}{5} = 2^5 \left(\frac{2}{15} \right) = \frac{2^6}{15} = \frac{64}{15} \end{aligned}$$

198

Para mostrar la ventaja del T. de Green, evaluemos la integral de línea como en el capítulo 4.

$$\oint_C y^2 dx + 4xy dy = \int_{C_1} (y^2 dx + 4xy dy) + \int_{C_2} (y^2 dx + 4xy dy)$$

Para C_1 ($y=x^2$) $x=t, y=t^2, 0 \leq t \leq 2$

$$\begin{aligned} \vec{r}(t) &= (t, t^2) \\ \vec{r}'(t) &= (1, 2t) \\ \frac{dx}{dt} &= 1, \frac{dy}{dt} = 2t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{C_1} (y^2 dx + 4xy dy) &= \int_0^2 (t^4 + 4t^3) dt = \left[\frac{t^5}{5} + t^4 \right]_0^2 = \frac{32}{5} + 16 = \frac{112}{5} \\ \int_{C_2} (y^2 dx + 4xy dy) &= \int_2^0 (4 + 8t) dt = \left[4t + 4t^2 \right]_2^0 = -8 - 16 = -24 \end{aligned}$$

Para C_2 ($y=2x$) $x=t, y=2t, 2 \leq t \leq 0$

integrar de $(2,4)$ a $(0,0)$ \therefore de $t=2$ a $t=0$

$$\begin{aligned} \int_{C_2} (y^2 dx + 4xy dy) &= \int_2^0 (4t^2 + 8t^2) dt = \int_2^0 12t^2 dt = \left[4t^3 \right]_2^0 = -32 \\ \text{así} \quad \oint_C y^2 dx + 4xy dy &= \frac{112}{5} - 32 = \frac{112 - 160}{5} = -\frac{48}{5} \end{aligned}$$

De lo cual

$$\oint_C y^2 dx + 4xy dy = \frac{112}{5} - \frac{160}{5} = -\frac{48}{5} \quad \text{mismo resultado.}$$

20

CAMBIO DE VARIABLES.

En ocasiones es necesario efectuar un cambio de variables en una integral múltiple con el fin de simplificar los cálculos. Sean las ecuaciones de transformación $x=x(u,v)$ y $y=y(u,v)$ cuyo jacobiano de transformación es $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) \neq 0$. Se puede demostrar que la siguiente relación es válida:

$$\iint_R f(x,y) dx dy = \iint_{R'} f(x(u,v), y(u,v)) |J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)| du dv$$

donde R es una región en el plano xy y R' es la imagen de R en el plano de los parámetros u,v .

Ejemplo: Evaluar $\iint_R 4(x^2+y^2) dx dy$ utilizando el cambio de variables $x=\frac{1}{2}(u+v)$, $y=\frac{1}{2}(u-v)$. R es una región cuadrada cuyos vértices son los puntos $(0,-1)$, $(1,0)$, $(0,1)$ y $(-1,0)$.

Solución. A continuación se calculan los elementos necesarios para la integral doble en términos de u y v .

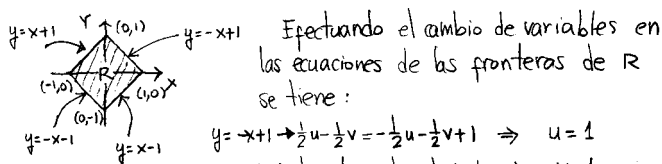
$$J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2} \neq 0$$

$$f(x(u,v), y(u,v)) = 4\left(\left(\frac{1}{2}(u+v)\right)^2 + \left(\frac{1}{2}(u-v)\right)^2\right) = 2u^2 + 2v^2$$

Para determinar R' se necesitan las ecuaciones de las fronteras de R

21

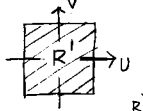
22



Efectuando el cambio de variables en las ecuaciones de las fronteras de R se tiene:

$$\begin{aligned} y=x+1 &\rightarrow \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v = -\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + 1 \Rightarrow u=1 \\ y=x-1 &\rightarrow \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v - 1 \Rightarrow v=1 \\ y=-x+1 &\rightarrow \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}v + 1 \Rightarrow v=-1 \\ y=-x-1 &\rightarrow \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v = -\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v - 1 \Rightarrow u=-1 \end{aligned}$$

La región R' es: $R' = \{(u,v) / -1 \leq u \leq 1, -1 \leq v \leq 1\}$



Entonces:

$$\begin{aligned} \iint_R 4(x^2+y^2) dx dy &= \iint_{R'} (2u^2+2v^2) \left| \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right| du dv \\ &= \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (2u^2+2v^2) du dv \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (u^2+v^2) du dv \\ &= \int_{-1}^1 \left[\frac{1}{3}u^3 + uv^2 \right]_{-1}^1 dv \\ &= \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3} + v^2 \right) - \left(-\frac{1}{3} - v^2 \right) dv = 2 \left[\frac{1}{3}v + \frac{1}{3}v^3 \right]_{-1}^1 \\ &= 2 \left[\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3} \right) - \left(-\frac{1}{3} - \frac{1}{3} \right) \right] = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\iint_R 4(x^2+y^2) dx dy = \frac{8}{3}$$

INTEGRALES DE SUPERFICIE

Una superficie S se representa por: $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}$. Un vector diferencial normal a la superficie es:

$$d\vec{\sigma} = (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv \quad \dots (1)$$

donde $\vec{r}_u = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u}$ y $\vec{r}_v = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}$. La magnitud de $d\vec{\sigma}$ es:

$$d\sigma = \|d\vec{\sigma}\| = \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv \quad \dots (2)$$

Un vector unitario normal a la superficie es:

$$\frac{d\vec{\sigma}}{d\sigma} = \frac{d\vec{\sigma}}{d\sigma} = \frac{(\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv} = \frac{\vec{r}_u \times \vec{r}_v}{\|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\|} = \vec{n} \quad \dots (3)$$

esto significa que $d\vec{\sigma} = \vec{n} d\sigma \quad \dots (4)$

Se observa también que $d\vec{\sigma} = \vec{n} \cdot \vec{n} d\sigma = \vec{n} \cdot d\vec{\sigma} \Rightarrow d\vec{\sigma} = \vec{n} \cdot d\vec{\sigma} \quad (5)$

Por otra parte, determinemos la relación entre el elemento diferencial de superficie $d\sigma$ y el elemento diferencial de área dA . Supongamos que \vec{a} es un vector paralelo al plano xz y \vec{b} un vector paralelo al plano xy (véase figura superior), dados por:

$$\vec{a} = dx\mathbf{i} + a_3\mathbf{k}, \quad \vec{b} = dy\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$$

El vector normal unitario a la superficie es:

$$\vec{n} = \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}$$

Es claro que $\|\vec{a} \times \vec{b}\|$ representa el área del paralelogramo en la superficie, es decir $\|\vec{a} \times \vec{b}\| = d\sigma$ entonces

$$d\sigma \vec{n} = \vec{a} \times \vec{b}$$

tomando la componente vertical del vector anterior

$$d\sigma \vec{n} \cdot \mathbf{k} = \vec{a} \times \vec{b} \cdot \mathbf{k} = \begin{vmatrix} dx & 0 & a_3 \\ 0 & dy & b_3 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = dx dy = dA$$

así

$$d\sigma = \frac{dA}{|\vec{n} \cdot \mathbf{k}|} \quad \dots (6) \quad \leftarrow \text{El valor absoluto se introduce para poder considerar a } \vec{n} \text{ o } -\vec{n}$$

Ahora, una superficie puede estar definida por una ecuación cartesiana: $F(x,y,z) = 0$. En este caso

$$\vec{n} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \frac{\frac{\partial F}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial z}\mathbf{k}}{\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right)^{1/2}} \quad \dots (7)$$

y por lo tanto

$$|\vec{n} \cdot \mathbf{k}| = \frac{\left| \frac{\partial F}{\partial z} \right|}{\left(\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right)^{1/2}} = \frac{\left| \frac{\partial F}{\partial z} \right|}{\|\nabla F\|}$$

sustituyendo en (6)

$$d\sigma = \frac{\|\nabla F\|}{\left| \frac{\partial F}{\partial z} \right|} dx dy \quad \dots (8)$$

Obsérvese que si la superficie tiene como ecuación a $z = f(x,y)$

$$d\sigma = \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + 1 \right]^{1/2} dx dy \quad \dots (9) \quad \text{ya que } F = z - f(x,y)$$

Las integrales que incluyen elementos diferenciales $d\vec{\sigma}$ se llaman integrales de superficie. Se estudiará la siguiente integral:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$$

Si S es una superficie cerrada, la integral se expresa por:

$$\oint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$$

Para superficies cerradas es común suponer que la dirección positiva del vector normal unitario \vec{n} está dirigida hacia afuera de la superficie.

El área de una superficie alabeada S puede obtenerse por

$$A_S = \iint_S \vec{n} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_S d\sigma \quad \{\text{véase expresión (5)}\}$$

- Si S está representada por $\vec{r}(u,v)$ se usa (2) y:

$$A_S = \iint_S \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$$

- Si S está representada por $F(x,y,z) = 0$ se usa (8) y:

$$A_S = \iint_R \frac{\|\nabla F\|}{\left| \frac{\partial F}{\partial z} \right|} dx dy$$

→ Nota: Hay que despejar z de $F(x,y,z) = 0$ y sustituirla en el integrando.

3) La integral de una función escalar $\phi(x,y,z)$ sobre una superficie es $\iint_S \phi d\sigma$. Si S se representa por la ec. vectorial $\vec{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}$ entonces:

$$\iint_S \phi d\sigma = \iint_R \phi(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \|\vec{r}_u \times \vec{r}_v\| du dv$$

- Si S se representa por la ec. cartesiana $F(x,y,z)=0$ entonces:

$$\iint_S \phi d\sigma = \iint_R \phi(x,y,z) \frac{\|\nabla F\|}{|\frac{\partial F}{\partial z}|} dx dy \rightarrow \text{Nota: Antes de resolver la integral debe despejarse } z \text{ de } F(x,y,z)=0 \text{ y sustituirse en el integrando}$$

Si ϕ es la densidad de masa (por unidad de área) de una superficie alabeada S , entonces la integral $\iint_S \phi d\sigma$ proporciona la masa de dicha superficie

4) La integral $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$ proporciona el flujo del campo vectorial \vec{F} a través de la superficie S . Por ejemplo la divergencia del campo \vec{F} se define por:

$$\nabla \cdot \vec{F} = \lim_{V \rightarrow 0} \frac{1}{V} \iint_{\partial V} \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$$

donde V es el volumen de la región limitada por la superficie cerrada ∂V

Por otra parte

$$\nabla \cdot \vec{F} = \lim_{S \rightarrow 0} \frac{1}{S} \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

donde S es la superficie limitada por la curva cerrada C

27

La integral $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} d\sigma$ se resuelve de la sig. forma:

- Si S está representada por $\vec{r}(u,v)$ y $\vec{F}(x,y,z) = f_1\mathbf{i} + f_2\mathbf{j} + f_3\mathbf{k}$ entonces:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_R \vec{F}(x(u,v), y(u,v), z(u,v)) \cdot (\vec{r}_u \times \vec{r}_v) du dv \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{usando} \\ (2) \text{ y } (3) \end{array} \right\}$$

- Si S está representada por $F(x,y,z)=0$ entonces:

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{\sigma} = \iint_R \vec{F}(x,y,z) \cdot \frac{\|\nabla F\|}{|\frac{\partial F}{\partial z}|} dx dy \rightarrow \text{Nota: Debe despejarse } z \text{ de } F(x,y,z)=0 \text{ y sustituirse en el integrando.}$$

Por ejemplo, si la superficie está dada por $z = f(x,y)$, donde $\vec{F} = F(x,y,z)$

$$= \iint_R \left\{ f_1(x,y, f(x,y)) \frac{\partial F}{\partial x} - f_2(x,y, f(x,y)) \frac{\partial F}{\partial y} + f_3(x,y, f(x,y)) \right\} dx dy$$

quitando argumentos:

$$= \iint_R \left\{ -f_1 \frac{\partial F}{\partial x} - f_2 \frac{\partial F}{\partial y} + f_3 \right\} dx dy$$

TEOREMA DE STOKES

Si S es una superficie limitada por una curva cerrada C y \vec{F} es un campo vectorial con primeras derivadas parciales continuas sobre S y C , entonces:

$$\iint_S (\nabla \times \vec{F}) \cdot d\vec{\sigma} = \oint_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

28

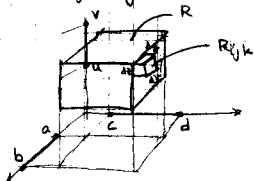
INTEGRALES TRIPLES.

REGIONES DE FORMA DE PARALELEPIPEDO RECTANGULAR.

Dada una función continua $f: R^n \rightarrow R$ definida en una región R en forma de paralelepípedo rectangular, podemos definir la integral de f sobre R como el límite de la suma:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{ijk}) \Delta V$$

El paralelepípedo se ha particionado en n^3 subparalelepípedos R_{ijk} . $C_{ijk} \in R_{ijk}$ y ΔV es el volumen de R_{ijk}



Si existe $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$, le llamamos integral triple de f sobre R y se denota como

$$\int_R f dV = \int_R f(x,y,z) dx dy dz = \iiint_R f(x,y,z) dx dy dz$$

Si f es continua entonces las seis posibles integrales iteradas siguientes son iguales:

$$\iiint_R f dx dy dz, \iiint_R f dy dx dz, \iiint_R f dz dx dy, \iiint_R f dz dy dx, \iiint_R f dy dz dx, \iiint_R f dx dz dy$$

29

Para un paralelepípedo rectangular, la región R , será

$$R = \{(x,y,z) / a \leq x \leq b, c \leq y \leq d, u \leq z \leq v\}$$

$$\therefore \int_R f dV = \int_a^b \left[\int_c^d \left(\int_u^v f(x,y,z) dz \right) dy \right] dx$$

REGIONES TRIDIMENSIONALES EN GENERAL.

Pueden existir 3 tipos de regiones:

$$R_1 = \{(x,y,z) / a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x), \gamma_1(x,y) \leq z \leq \gamma_2(x,y)\}$$



$$R_2 = \{(x,y,z) / u \leq z \leq v, \phi_1(z) \leq y \leq \phi_2(z), \gamma_1(z,y) \leq x \leq \gamma_2(z,y)\}$$



$$R_3 = \{(x,y,z) / a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq z \leq \phi_2(x), \gamma_1(x,z) \leq y \leq \gamma_2(x,z)\}$$

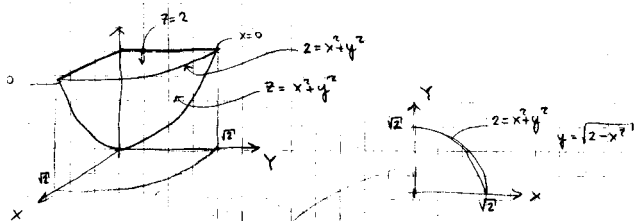


Si $f(x,y,z)=1$ para todo $(x,y,z) \in V$ entonces obtenemos

$$\int_R f(x,y,z) dV = \int_R 1 dV = \text{volumen de } R$$

30

Ejemplo. Sea R la región acotada por los planos $x=0, y=0, z=2$ y la superficie $z=x^2+y^2$, $x \geq 0, y \geq 0$.
Calcular $\int_R x \, dx \, dy \, dz$



La región como región tipo 1 es:

$$R_1 = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq \sqrt{2}, 0 \leq y \leq \sqrt{2-x^2}, x^2+y^2 \leq z \leq 2\}$$

$$\begin{aligned} \int_R x \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} \int_{x^2+y^2}^2 x \, dz \, dy \, dx = \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\sqrt{2-x^2}} x(2-x^2-y^2) \, dy \, dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} x \left(2y - xy^2 - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^{\sqrt{2-x^2}} dx = \int_0^{\sqrt{2}} x \left(2\sqrt{2-x^2} - x^2\sqrt{2-x^2} - \frac{(2-x^2)^{3/2}}{3} \right) dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} x \left[\sqrt{2-x^2}(2-x^2) - \frac{(2-x^2)^{3/2}}{3} \right] dx = \int_0^{\sqrt{2}} x \left[\frac{2}{3}(2-x^2)^{3/2} \right] dx \\ &= -\frac{1}{3} \int_0^{\sqrt{2}} (2-x^2)^{5/2} (-2x) dx = -\frac{1}{3} \left[\frac{2}{5}(2-x^2)^{5/2} \right]_0^{\sqrt{2}} = -\frac{2}{15} (2-x^2)^{5/2} \Big|_0^{\sqrt{2}} \\ &= -\frac{2}{15} \left[(2-2)^{5/2} - (2-0)^{5/2} \right] = \frac{2 \cdot 2^{5/2}}{15} = \frac{8\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$

31

Ejemplo. Determinar el volumen de una esfera unitaria.

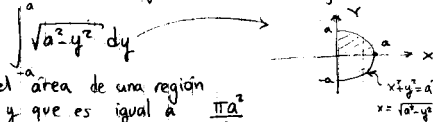
El volumen está dado por $\iiint_R dv$

$$R \text{ es } x^2+y^2+z^2 \leq 1$$

$$R_1 = \{(x, y, z) \mid -1 \leq x \leq 1, -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}, -\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}\}$$

$$\text{Así } V = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dz \, dy \, dx = 2 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2-y^2} \, dy \, dx$$

como $x=cte$ entonces la integral interior es semejante a:



representa el área de una región semicircular y que es igual a $\frac{\pi a^2}{2}$

entonces

$$V = 2 \int_{-1}^1 \frac{\pi(1-x^2)}{2} dx = \pi \int_{-1}^1 (1-x^2) dx = \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \pi \left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) - \left(-1 + \frac{1}{3}\right) \right]$$

$$V = \pi \left[\frac{2}{3} + \frac{2}{3} \right] = \frac{4}{3} \pi$$

$$\text{Coord. esféricas: } \sqrt{\left(\frac{x}{\rho}\right)^2 + \left(\frac{y}{\rho}\right)^2} = \rho \sin \phi$$

32

TEOREMA DE GAUSS. (Teo. de la divergencia) (Teo. de Green en el espacio)

El teorema de Gauss asegura que el flujo de un campo vectorial hacia afuera de una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia de ese campo vectorial sobre el volumen encerrado por la superficie.

Teo. Sea R una región en el espacio S la superficie cerrada que acota a R . Sea \vec{F} un campo vectorial suave definido en R . Entonces:

$$\iiint_R (\nabla \cdot \vec{F}) \, dv = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

o bien

$$\iiint_R (\text{div } \vec{F}) \, dv = \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) \, d\sigma$$

Ejemplo. Considerar $\vec{F} = 2xi + y^2j + z^2k$. Sea S la esfera unitaria definida por $x^2+y^2+z^2=1$. Evaluar $\iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$

Por el teo. de Gauss.

$$\iiint_R (\text{div } \vec{F}) \, dv = \iint_S \vec{F} \cdot \vec{n} \, ds$$

La integral de la izquierda es:
 $\text{div } \vec{F} = 2 + 2y + 2z$

$$\begin{aligned} \iiint_R (2+2y+2z) \, dv &= 2 \iiint_R dv + 2 \iiint_R y \, dv + 2 \iiint_R z \, dv \\ \iiint_R z \, dz \, dy \, dx &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} z \, dz \, dy \, dx = \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \left[\frac{z^2}{2} \right]_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy \, dx \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{2} (1-x^2-y^2) dy \, dx = 0 \end{aligned}$$

de igual forma $2 \iiint_R y \, dv = 0$

33

así

$$\iiint_R (2+2y+2z) \, dv = 2 \iiint_R dv = 2 \left(\frac{4}{3} \pi \right) = \frac{8}{3} \pi$$

Sea una región R acotada por gráficos de funciones continuas. Si R es simétrica respecto al plano $xy \Rightarrow (x, y, z) \in R$ y $(x, y, -z) \in R$. Si una función f continua acotada en R cumple con $f(x, y, z) = -f(x, y, -z)$ se puede probar que

$$\iiint_R f(x, y, z) \, dv = 0$$

34