LA INTEGRAL DE LINEA COMO MODELO MATEMATICO DEL TRABAJO

La integral de línea $\int_{C,P}^{Q} \bar{F}\cdot d\bar{r}$ permite determinar el trabajo realizado por el campo de fuerzas $\bar{F}$ sobre una partícula que se desplaza por la trayectoria C del punto P al punto Q. La trayectoria C está descrita por la función vectorial $\bar{r}(t)$.

Obsérvese que:

$$\int \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int \bar{F}(\bar{r})\cdot \frac{d\bar{r}}{dt}dt = \int \bar{F}(\bar{r})\cdot \bar{r}'dt$$

$$= \int \bar{F}(\bar{r})\cdot \frac{\bar{r}'}{\|\bar{r}'\|}\|\bar{r}'\|dt$$

$$\boxed{\int \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int (\bar{F}(\bar{r})\cdot \bar{T})ds}$$

Además si $\bar{F}=f_1 i+f_2 j+f_3 k$

$$\boxed{\int \bar{F}\cdot d\bar{r} = \int f_1dx+f_2dy+f_3dz}$$

Ejemplo: Sea $\bar{F}(x,y)=yi-xj$, donde $\|\bar{F}\|$ está en kg_f y (x,y) en metros. Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas cuando una partícula se desplaza del origen al punto R(1,1)

a) A través de la parábola $y=x^2$

b) A través de la recta $y=x$

c) A través de la línea quebrada que va de P(0,0) a Q(1,0) y de Q(1,0) a R(1,1)

Solución a) Sea $x=t \Rightarrow y=t^2 \therefore \bar{r}(t)=ti+t^2j$

luego $\bar{F}(\bar{r})=t^2i-tj$ $\quad d\bar{r}(t)=dti+2tdtj$

En P(0,0) t=0, en R(1,1), t=1

Entonces $W=\int_{C,P}^{R}\bar{F}\cdot d\bar{r}=\int_0^1(t^2i-tj)\cdot(dti+2tdtj)=\int_0^1 -t^2dt=-\frac{1}{3}\,kg_f\cdot m$

1

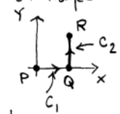
Solución b) Sea $x=t \Rightarrow y=t$ $\therefore \bar{r}(t)=ti+tj$ $\quad d\bar{r}=dti+dtj$

entonces $\bar{F}(\bar{r})=ti-tj$

En P(0,0) t=0 y en R(1,1) t=1

$\therefore W=\int_0^1(ti-tj)\cdot(dti+dtj)=0$

Solución c) La trayectoria está dividida en dos segmentos de recta



por lo tanto $W=\int_{C_1,P}^{Q}\bar{F}\cdot d\bar{r}+\int_{C_2,Q}^{R}\bar{F}\cdot d\bar{r}$

* Los datos para la primer integral son:

Trayectoria: Ec. cartesiana $\rightarrow y=0 \Rightarrow \begin{cases}x=t\\ y=0\end{cases}$ $\therefore \bar{r}(t)=ti+0j$ $\quad d\bar{r}=dti+0j$

entonces $\bar{F}(\bar{r})=0i-tj$

en P(0,0) t=0 y en Q(1,0) t=1

$\therefore W_1=\int_0^1 \underbrace{(0i-tj)\cdot(dti+0j)}_{\text{En este caso } \bar{F}\cdot d\bar{r}=0}=0 \Rightarrow \bar{F}$ es perpendicular a la trayectoria.

Entonces se puede afirmar que si $\bar{F}$ es perpendicular a la trayectoria el trabajo realizado por $\bar{F}$ es cero.

* Para la segunda integral.

Ec. cartesiana $x=1 \Rightarrow \begin{cases}x=1\\ y=t\end{cases}$ $\therefore \bar{r}(t)=i+tj$ y $d\bar{r}=0i+dtj$

entonces $\bar{F}(\bar{r})=ti-j$. En Q(1,0) t=0 y en R(1,1) t=1

$\therefore W_2=\int_0^1(ti-j)\cdot(0i+dtj)=-\int_0^1 dt=-1\,kg_f\cdot m$

2

El trabajo total es $W=W_1+W_2=0+(-1)=-1\,kg_f\cdot m$

Obsérvese que el trabajo depende en general de la trayectoria. En el primer caso (usando $y=x^2$) se obtuvo $-\frac{1}{3}kg_f\cdot m$, en el segundo ($y=x$) resultó un trabajo nulo y en el tercero (recta quebrada) se obtuvo $-1\,kg_f\cdot m$

Esto es cierto para cualquier tipo de campos de fuerza excepto para aquellos que son CONSERVATIVOS. El trabajo que efectua un campo de fuerzas conservativo sobre una partícula resulta ser independiente de la trayectoria. Es función únicamente de los puntos extremo de dicha trayectoria, es decir:

Si $\bar{F}$ es conservativo $\Longrightarrow W=\int_{C_i,P}^{Q}\bar{F}\cdot d\bar{r}$ donde C_i es cualquier trayectoria que une los puntos extremo P y Q

Además, si la trayectoria es cerrada el trabajo es NULO

Conviene entonces definir las condiciones que debe satisfacer un campo vectorial para que este sea conservativo. Un campo $\bar{F}$ es conservativo si cumple con las sig. condiciones

a) $\bar{F}$ esta definido en un conjunto simplemente conexo

b) $\nabla\times\bar{F}=\bar{0} \Rightarrow \bar{F}$ es irrotacional.

Los campos conservativos se llaman así porque la energía total de una partícula, sujeta a este tipo de campos, es la misma en cualquier punto de su trayectoria (la partícula no pierde ni gana energía sino la conserva).

3

Según b anterior, el trabajo de CAMPOS CONSERVATIVOS puede calcularse de cualquiera de las siguientes formas.

a) Usando la trayectoria que nos resulte más simple

b) Mediante la "caída" de energía potencial entre los puntos extremo.

$$W=\phi(Q)-\phi(P)$$

donde P y Q son los puntos inicial y final de la trayectoria y ϕ es la función potencial del campo tal que:

$$\bar{F}=\nabla\phi$$

Se recomienda entonces que antes de proceder a calcular la integral $\int\bar{F}\cdot d\bar{r}$, se determine si $\nabla\times\bar{F}=\bar{0}$

Ejemplo: Resolver el ejemplo anterior pero usando el campo $\bar{F}=yi+xj$

Solución a)

$W=\int_0^1(t^2i+tj)\cdot(dti+2tdtj)=\int_0^1 3t^2dt=1\,kg_f\cdot m$

Solución b)

$W=\int_0^1(ti+tj)\cdot(dti+dtj)=\int_0^1 2tdt=1\,kg_f\cdot m$

Solución c)

$W_1=\int_0^1(0i+tj)\cdot(dti+0j)=0$

$W_2=\int_0^1(ti+j)\cdot(0i+dtj)=\int_0^1 dtj=1\,kg_f\cdot m$

$\therefore W=W_1+W_2=0+1=1\,kg_f\cdot m$

4

El trabajo es independiente de la trayectoria ya que:

$$\nabla\times\bar F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x & 0 \end{vmatrix} = 0i + 0j + (1-1)k = \bar 0$$

Entonces $\bar F$ es conservativo y el trabajo puede calcularse con $W = \phi(R) - Q(P) = \phi(1,1) - \phi(0,0)$

Calculemos ϕ. (Usando $P = \frac{\partial \phi}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial \phi}{\partial y}$)

$\phi = \int P dx = \int y dx = yx + \alpha(y)$

Luego $Q = \frac{\partial \phi}{\partial y} \Rightarrow x = \frac{\partial}{\partial y}(yx + \alpha(y)) = x + \frac{d\alpha}{dy}$

$$\Downarrow$$

$$\frac{d\alpha}{dy} = 0 \Rightarrow \alpha = C \in \mathbb{R}$$

$$\therefore \boxed{\phi(x,y) = xy + c}$$

así el trabajo realizado por $\bar F$ sobre la partícula que se desplaza de P a R es:

$$W = \phi(1,1) - \phi(0,0) = \{(1)(1) + c\} - \{(0)(0) + c\} = 1\ kg_f \cdot m$$

igual al que se obtuvo integrando sobre $y = x^2$, $y = x$ y la línea quebrada.

CALCULO DE LA INTEGRAL DE LINEA EN COORDENADAS POLARES, CILINDRICAS Y ESFERICAS.

Para calcular la integral $\int \bar F \cdot d\bar r$ de un campo de fuerzas $\bar F$ dado en coordenadas polares (ρ,θ), cilíndricas (ρ,θ,z) o esféricas (ρ,θ,ϕ) es necesario determinar el elemento $d\bar r$ en función de estas coordenadas.

* COORDENADAS POLARES.

Las ecs de transformación son: $x = \rho\cos\theta$, $y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta$ ... (1)

Los vectores unitarios son: $\bar e_\rho = \cos\theta\, i + \mathrm{sen}\,\theta\, j$, $\bar e_\theta = -\mathrm{sen}\,\theta\, i + \cos\theta\, j$ ... (2)

del último par de ecuaciones pueden despejarse i y j para obtener: $i = \cos\theta\, \bar e_\rho - \mathrm{sen}\,\theta\, \bar e_\theta$, $j = \mathrm{sen}\,\theta\, \bar e_\rho + \cos\theta\, \bar e_\theta$ ... (3)

Se sabe que: $d\bar r = dx\, i + dy\, j$, considerando las ecs. (1)

$$d\bar r = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial x}{\partial \theta} d\theta\right) i + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho} d\rho + \frac{\partial y}{\partial \theta} d\theta\right) j \quad \dots (4)$$

sustituyendo (3) en (4) y calculando las derivadas parciales

$$d\bar r = (\cos\theta d\rho - \rho\,\mathrm{sen}\,\theta d\theta)(\cos\theta\, \bar e_\rho - \mathrm{sen}\,\theta\, \bar e_\theta) + (\mathrm{sen}\,\theta d\rho + \rho\cos\theta d\theta)(\mathrm{sen}\,\theta\, \bar e_\rho + \cos\theta\, \bar e_\theta)$$

simplificando;

$$\boxed{d\bar r = d\rho\, \bar e_\rho + \rho d\theta\, \bar e_\theta}$$

Por desarrollos similares, considerando las ecs. de transformación y vectores unitarios de los sistemas de coordenadas cilíndrico y esférico, se obtiene:

* COORDENADAS CILINDRICAS $\{\rho,\theta,z\}$

$$\boxed{d\bar r = d\rho\, \bar e_\rho + \rho d\theta\, \bar e_\theta + dz\, \bar e_z}$$

* COORDENADAS ESFERICAS. $\{\rho,\theta,\phi\}$

$$\boxed{d\bar r = d\rho\, \bar e_\rho + \rho\,\mathrm{sen}\,\phi\, d\theta\, \bar e_\theta + \rho d\phi\, \bar e_\phi}$$

Ejemplo. Determinar el trabajo efectuado por el campo de fuerzas (en coordenadas polares)

$$\bar F(\rho,\theta) = 2\rho\theta\, \bar e_\rho + \left(\rho + \frac{2}{\rho}\right)\bar e_\theta$$

sobre una partícula que se desplaza del punto $P_1(\rho=0, \theta=0)$ al punto $P_2(\rho = 2\sqrt{2}, \theta = \frac{\pi}{4})$

a) A través de la caída de potencial entre los puntos P_1 y P_2

b) Integrando sobre la trayectoria de ecuación $\rho = 4\,\mathrm{sen}\,\theta$.

Solución a

Probemos primero que $\bar F$ admite función potencial

$$\nabla\times\bar F = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \bar e_\rho & \rho\bar e_\theta & \bar e_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2\rho\theta & \rho(\rho + \frac{2}{\rho}) & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho^2 + 2) - \frac{\partial}{\partial \theta}(2\rho\theta)\right]\bar e_z$$

$\nabla\times\bar F = \frac{1}{\rho}[2\rho - 2\rho]\bar e_z = \bar 0 \Rightarrow \bar F$ es conservativo (irrotacional)

$\therefore$ existe función potencial.

entonces $\bar F = \nabla\phi$

en coordenadas polares.

$$\nabla\phi = \frac{\partial \phi}{\partial \rho}\bar e_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\bar e_\theta \quad \text{, entonces.}$$

$$\overbrace{2\rho\theta\, \bar e_\rho + \left(\rho + \frac{2}{\rho}\right)\bar e_\theta}^{\bar F} = \overbrace{\frac{\partial \phi}{\partial \rho}\bar e_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\bar e_\theta}^{\nabla\phi}$$

$$\therefore \frac{\partial \phi}{\partial \rho} = 2\rho\theta \quad \dots (1) \quad , \quad \frac{1}{\rho}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = \rho + \frac{2}{\rho} \quad \dots (2)$$

de (1) $\phi = \int 2\rho\theta d\rho = \rho^2\theta + \alpha(\theta)$

sustituyendo en (2)

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho^2\theta + \alpha(\theta)) = \rho + \frac{2}{\rho}$$

$$\rho^2 + \frac{d\alpha}{d\theta} = \rho^2 + 2 \Rightarrow \frac{d\alpha}{d\theta} = 2 \Rightarrow \alpha = 2\theta + C$$

así $\boxed{\phi(\rho,\theta) = \rho^2\theta + 2\theta + C}$

Puesto que $\bar F$ es conservativo el trabajo realizado por el campo de fuerzas es independiente de la trayectoria y puede determinarse con la caída de potencial.

$$W = \phi(P_2) - \phi(P_1) = \phi(2\sqrt{2}, \tfrac{\pi}{4}) - \phi(0,0)$$

$$= \left((2\sqrt{2})^2\frac{\pi}{4} + 2\left(\frac{\pi}{4}\right) + C\right) - \left(0^2(0) + 2(0) + C\right)$$

$$\boxed{W = \frac{5}{2}\pi \ \text{u.t.}}$$ unidades de trabajo.

Solución b) Al integrar sobre cualquier trayectoria que una los puntos P_1 y P_2 debe obtenerse el mismo resultado anterior $(W = \frac{5}{2}\pi)$, como se verá enseguida

En este ejemplo, el calculo de la integral de línea se efectuara realizando primero el producto escalar $\bar{F}\cdot d\bar{r}$ para luego sustituir en él la ecuación de la trayectoria. Obsérvese que no se parametrizará la ecuación de la trayectoria (aunque podría hacerse) debido a que es un problema bidimensional (en tres dimensiones sí es necesario parametrizar la ec. de la trayectoria). Se ha visto que en coordenadas polares $d\bar{r} = d\rho\,\bar{e}_\rho + \rho\, d\theta\, \bar{e}_\theta$ entonces:

$$\bar{F}\cdot d\bar{r} = \left\{2\rho\theta\bar{e}_\rho + \left(\rho+\frac{2}{\rho}\right)\bar{e}_\theta\right\}\cdot\left\{d\rho\,\bar{e}_\rho + \rho\, d\theta\,\bar{e}_\theta\right\}$$

$$= 2\rho\theta d\rho + \rho\left(\rho+\frac{2}{\rho}\right)d\theta = 2\rho\theta d\rho + (\rho^2+2)d\theta \quad \ldots(1)$$

La trayectoria está definida por $\rho = 4\operatorname{sen}\theta$ por lo que $d\rho = 4\cos\theta d\theta$. Sustituyendo en (1) se obtiene:

$$\bar{F}(\bar{r})\cdot d\bar{r} = 2(4\operatorname{sen}\theta)\theta(4\cos\theta d\theta) + ((4\operatorname{sen}\theta)^2+2)\,d\theta$$

$$\bar{F}(\bar{r})\cdot d\bar{r} = (32\theta\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 16\operatorname{sen}^2\theta + 2)\,d\theta$$

Obsérvese que ya se ha valuado $\bar{F}$ sobre la trayectoria al remplazar $\rho = 4\operatorname{sen}\theta$ y $d\rho = 4\cos\theta d\theta$, en (1). De esta forma la integral debe calcularse respecto a la variable θ por lo que los límites de integración deberán ser los valores de θ en P_1 y P_2.

En $P_1 \longrightarrow \theta = 0$

En $P_2 \rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$

por lo cual

$$W = \int_0^{\pi/4}(32\theta\operatorname{sen}\theta\cos\theta + 16\operatorname{sen}^2\theta + 2)\,d\theta$$

Al resolver esta integral se obtiene:

$$W = \left\{\frac{32}{8}(-2\theta\cos\theta + \operatorname{sen}2\theta) + \frac{16}{4}(2\theta - \operatorname{sen}(2\theta)) + 2\theta\right\}\Big|_0^{\pi/4}$$

$$W = 2\{5\theta - 4\theta\cos2\theta\}\Big|_0^{\pi/4} = 2\left\{5\left(\frac{\pi}{4}\right) - 4\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\frac{\pi}{2}\right\} - 2\{5(0) - 4(0)\cos 0\}$$

Finalmente:

$$\boxed{W = \frac{5\pi}{2}\ \text{u.t.}}$$

que es el mismo resultado del inciso a)