



**FACULTAD DE
INGENIERIA**



U N A M



SERIE # 4

**CÁLCULO VECTORIAL
SEMESTRE 2009-2**

CÁLCULO VECTORIAL
SERIE 4

SEMESTRE: 2009-1

Página 2

1) Calcular $\int_0^1 \int_0^2 x y \, dy \, dx$.

SOLUCION

1

2) Evaluar la integral doble $\iint_R x^2 \sqrt{9-x^2} \, dA$, donde R es la región circular limitada por la circunferencia $x^2 + y^2 = 9$.

SOLUCION

$\frac{27}{2}$

3) Calcular el valor de $\iint_R e^{x^2+y^2} \, dA$ donde R es la región del plano XY localizada entre las circunferencias de ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 9$.

SOLUCION

$\pi (e^9 - e)$

4) Utilizar integrales doble para calcular el área de la región del plano XY localizada en el primer octante y limitada por las curvas de ecuaciones $16(x-1) = y^2$, $8x = y^2$.

SOLUCION

$\frac{16}{3}$ u.t.

5) Calcular el área de la región del plano XY , interior a las curvas de ecuaciones $x^2 + y^2 = 9$, $x^2 + y^2 - 6x = 0$.

SOLUCION

11.055 u²

6) Por medio de la integral doble, calcular el área de la región localizada entre las curvas de ecuación $2y^2 = x - 2$, $x^2 - 4y^2 = 4$, $x = 4$.

SOLUCION

$2\sqrt{3} - \ln(2 + \sqrt{3}) - \frac{4}{3}$ u²

CÁLCULO VECTORIAL
SERIE 4

SEMESTRE: 2009-1

Página 3

7) Por medio de la integral doble, calcular el área de la región del primer cuadrante, limitada por las curvas de ecuaciones:

$$x = 2, \quad x = 6, \quad y^2 = x^2 - 10x + 26, \quad y^2 = x^2 - 10x + 30.$$

SOLUCION

$$3.8795$$

8) Por medio de la integral doble, calcular el área de la región localizada entre las curvas de ecuación $x^2 - 14x - 5y + 59 = 0$, $x^2 - 14x + 5y - 11 = 0$.

SOLUCION

$$\frac{200}{3} u^2$$

9) Por medio de la integral doble, calcular el área de la región del primer cuadrante, limitada por las curvas $xy = 1$, $xy = 4$, $y = 2x$, $x = 2y$.

SOLUCION

$$\ln 8 u^2$$

10) Calcular el volumen de la región localizada por arriba del plano XY , interior al paraboloides $z = 9 - (x^2 + y^2)$, exterior al cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUCION

$$\frac{25}{2} \pi u^3.$$

11) Determinar el volumen de la región limitada por las superficies: $az = y^2$, $x^2 + y^2 = r^2$, $z = 0$, donde a y r son constantes.

SOLUCION

$$\frac{\pi r^4}{8} u^3.$$

12) Calcular el volumen de la región que es limitada por las superficies S_1 y S_2 representadas por: $S_1: x^2 + z^2 = 4 - y$, $S_2: y + 5 = 0$.

SOLUCION

$$\frac{81}{2} \pi u^3.$$

CÁLCULO VECTORIAL
SERIE 4

SEMESTRE: 2009-1

Página 4

13) Utilizar integración doble para calcular el área de la región del primer cuadrante interior a la curva cuya ecuación polar es $\rho = 3 \operatorname{sen} (4\theta)$.

SOLUCION

$$\frac{9\pi}{8} u^2.$$

14) Utilizar integración doble para calcular el área de la región interior a la curva cuya ecuación polar es $\rho = 6 \cos \theta$.

SOLUCION

$$9\pi u^2.$$

15) Calcular el área de la región exterior a la circunferencia cuya ecuación polar es $\rho = 3 e$ interior a la cardioide de ecuación polar $\rho = 3(1 + \cos \theta)$.

SOLUCION

$$18 + \frac{9\pi}{4} u^2$$

16) Calcular el área de la región limitada por la lemniscata cuya ecuación en coordenadas polares es $\rho^2 = 4 \cos 2\theta$.

SOLUCION

$$4 u^2.$$

17) Calcular el área de un pétalo de la rosa cuya ecuación polar es $\rho = \cos 4\theta$.

SOLUCION

$$\frac{\pi}{16} u^2.$$

18) Por medio de la integral doble, calcular el área de la región interior a la curva de ecuación polar $\rho = 2a(1 + \cos \theta)$ donde a es una constante.

CÁLCULO VECTORIAL

SERIE 4

SEMESTRE: 2009-1

Página 5

SOLUCION

$$4 \quad u^2$$

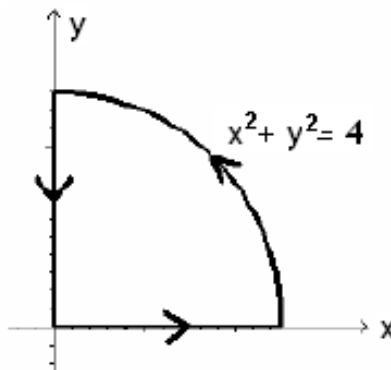
19) Calcular $\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$ siendo R la región interior del primer cuadrante limitado por las curvas $xy = 1$, $xy = 8$, $x^2 - y^2 = 3$, $x^2 - y^2 = 6$.

Sugerencia: Hacer el cambio de variable $u = xy$, $v = x^2 - y^2$

SOLUCION

$$42$$

20) Comprobar el teorema de Green, considerando el campo vectorial $\vec{v} = xy \mathbf{i} + y^2 \mathbf{j}$ y la trayectoria cerrada que se muestra en la figura.



SOLUCION

A criterio del profesor.

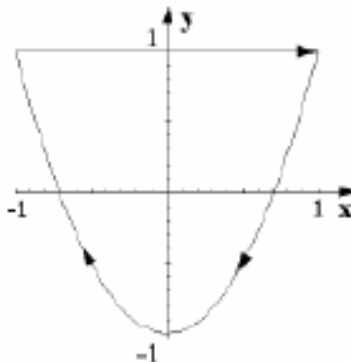
21) Utilizar el teorema de Green en el plano mediante integrales de línea, el área de la región mostrada en la figura.

CÁLCULO VECTORIAL

SERIE 4

SEMESTRE: 2009-1

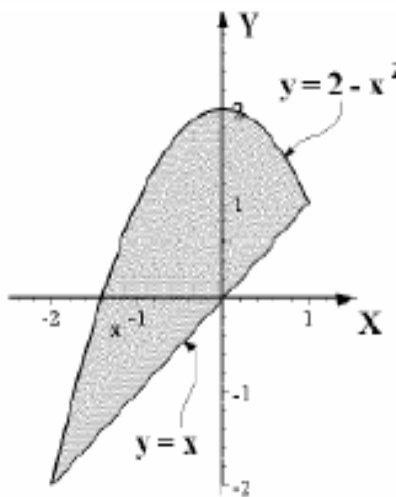
Página 6



SOLUCION

$$\frac{5}{3} u^2$$

22) Utilizar el teorema de Green para calcular el área de región mostrada en la figura.



SOLUCION

$$\frac{27}{6} u^2.$$

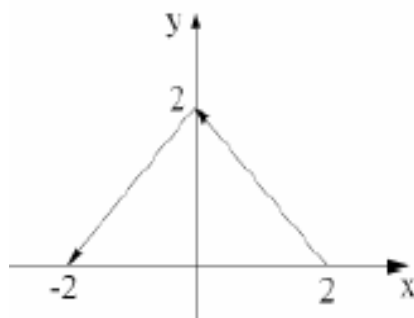
23) Utilizar el teorema de Green para calcular el valor de $\int_C 4xy^2 dx + (y + 2x^2) dy$, a lo largo de la trayectoria mostrada en la figura. Comentar el resultado.

CÁLCULO VECTORIAL

SERIE 4

SEMESTRE: 2009-1

Página 7



SOLUCION

0. Comentario a criterio del profesor.

24) Haciendo uso del teorema de Green determinar el área del cardioide $x = a(2\cos t - \cos 2t)$, $y = (2\sin t - \sin 2t)$.

SOLUCION

$$6a^2\pi u^2.$$

25) Utilizar el Teorema de Green para calcular el área de la región cerrada que es limitada por la elipse de ecuación $9x^2 + 4y^2 = 36$.

SOLUCION

$$6\pi u^2$$

26) Utilizar el teorema de Green en el plano, para calcular $\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$ siendo R la región del plano XY donde $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ siendo a y b constantes.

SOLUCION

$$\frac{\pi}{4} ab(a^2 + b^2)$$

CÁLCULO VECTORIAL
SERIE 4

SEMESTRE: 2009-1

Página 8

27) Mediante integrales de línea, calcular el área del plano XY limitada por las curvas $x^2 = 4y$, $x - 2y = 0$.

SOLUCION

$$\frac{1}{3} u^2.$$

28) Calcular el área de la porción del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 8y$ interior a una esfera con centro en el origen de radio 8 .

SOLUCION

$$256 u^2$$

29) Calcular el área de la superficie $z = 2x + 2y$, comprendida en el primer octante e interior al cilindro de ecuación $(x^2 + y^2)^2 = 4(x^2 - y^2)$.

SOLUCION

$$3 u^2.$$

30) Calcular el área de la porción de plano de ecuaciones $x + z = 4$ interior a la elipse $x^2 + 2y^2 + z^2 = 16$.

SOLUCION

$$4\sqrt{2}\pi u^2.$$

31) Calcular el área de la porción de superficie $x^2 + y^2 = R^2$ localizada por arriba del plano XY comprendida entre los planos $z = mx$, $z = nx$ donde $m > n > 0$.

SOLUCION

$$2(n - m)R^2 u^2$$

32) Calcular el área de la porción del plano de ecuación $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$, comprendida entre los planos coordenados.

SOLUCION

$$\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2} u^2$$

CÁLCULO VECTORIAL
SERIE 4

SEMESTRE: 2009-1

Página 9

33) Obtener el área de la superficie $z = x^2 + y^2$ delimitada superiormente por $z = y$ en el primer octante.

SOLUCION

$$\frac{\pi}{24} \left(17^{\frac{3}{2}} - 1 \right)$$

34) Calcular el área de la porción de cono de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, interior al cilindro de ecuación $x^2 - 6x + y^2 = 0$.

SOLUCION

$$9\sqrt{2} \pi \quad u^2$$

35) Calcular el área de la porción de paraboloides de ecuación $z = 9 - x^2 - y^2$ localizado por arriba del plano XY .

SOLUCION

$$\frac{1}{2} \sqrt{a^2 b^2 + b^2 c^2 + c^2 a^2} \quad u^2$$

36) Calcular el área de la porción de esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ localizada entre los planos de ecuación $z = 2$ y $z = 4$.

SOLUCION

$$20\pi \quad u^2$$

37) Calcular el área de la porción de superficie de ecuación $4 - z = x^2 + y^2$ localizada por arriba del plano XY .

SOLUCION

CÁLCULO VECTORIAL
SERIE 4

SEMESTRE: 2009-1

Página 10

$$\frac{\pi}{6} \left(17^{\frac{3}{2}} - 1 \right) u^2$$

38) Calcular el área de la porción del hemisferio de la esfera $z = x^2 - y^2$ localizada en el primer octante dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 4$.

SOLUCION

$$\frac{\pi}{48} \left(17^{\frac{3}{2}} - 1 \right) u^2$$

39) Calcular el área de la porción del hemisferio de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $y \geq 0$ interior al cilindro $x^2 + z^2 = 1$.

SOLUCION

$$(4 - 2\sqrt{2})\pi u^2$$

40) Calcular el área de las porciones del cilindro $y^2 + z^2 = a^2$ que están dentro del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$.

SOLUCION

$$8a^2$$

41) Calcular el área de las porciones de cono $x^2 = y^2 + z^2$, que se encuentra dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

SOLUCION

$$9\sqrt{2}\pi u^2$$

42) Sea S la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y f es la función $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. Calcular $\iint_S \bar{v} f \mathbf{g} \hat{n} dS$.

SOLUCION

$$8\pi u^3.$$

CÁLCULO VECTORIAL

SERIE 4

SEMESTRE: 2009-1

Página 11

43) Calcular la integral de superficie $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$ del campo $\vec{F} = (x^3)\mathbf{i} + (x^2y)\mathbf{j} + (x^2z)\mathbf{k}$, donde S es la superficie lateral del cilindro $x^2 + y^2 = a^2$, limitado por los planos $z = 0$, $z = 5$.

SOLUCION

$$5\pi a^4$$

44) Utilizar integración doble para calcular el área de la porción del cono $z^2 = x^2 + y^2$ comprendida entre los planos $z = 1$, $z = 4$.

SOLUCION

$$15\sqrt{2}\pi \quad u^2$$

45) Para el cono $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, obtener una ecuación vectorial de la superficie en coordenadas cilíndricas así como su correspondiente diferencial de área.

SOLUCION

$$\vec{r}(\rho, \theta) = \rho \hat{e}_\rho + \rho \hat{e}_z$$

$$dS = \rho \sqrt{2} \, d\rho \, d\theta$$

46) Calcular el área de la parte de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ que esta comprendida entre los conos $x^2 + y^2 = z^2$ y $3x^2 + 3y^2 = z^2$.

SOLUCION

$$2\pi(\sqrt{3} - \sqrt{2}) \quad u^2.$$

47) Se sabe que el metro cuadrado de mosaico ya colocado cuesta \$150.00. Calcular el costo del recubrimiento de la cúpula de la I. de S. A., que tiene por ecuación $z = 50 - \frac{(x^2 + y^2)}{9}$, para $z \geq 14$ donde x , y , z están en metros.

SOLUCION

$$2\pi a^2 \quad u^2$$

CÁLCULO VECTORIAL
SERIE 4

SEMESTRE: 2009-1

Página 12

48) Determinar el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = (x^2y)i + (y^2)j + (xz)k$ a través de la superficie S formada por los planos coordenados y los planos de ecuaciones $x = 2$, $y = 2$ y $z = 2$.

SOLUCION

Flujo = 40

49) Calcular volumen del sólido limitado por las superficies de ecuaciones $x^2 + z^2 = 9$, $y + z = 4$, $x - 2y - 3z = 12$.

SOLUCION

$90\pi \quad u^2$

50) Calcular el volumen de la región localizada por arriba del plano XY , interior al cilindro $x^2 + y^2 = 2x$ y limitada por el paraboloido $z = x^2 + y^2$.

SOLUCION

$\frac{3\pi}{2} \quad u^3.$

51) Utilizar integración triple para determinar el volumen del tetraedro acotado por los planos coordenados y el plano $3x + 6y + 4z - 12 = 0$.

SOLUCION

$4 \quad u^3$

52) Utilizar integrales triples para calcular el volumen del sólido limitado por la superficie $x^2 + y^2 = 4 - z$ y el plano $2y + z = 4$.

SOLUCION

$\frac{\pi}{2} \quad u^3.$

CÁLCULO VECTORIAL
SERIE 4

SEMESTRE: 2009-1

Página 13

53) Calcular el volumen de la región limitada por las superficies S_1 y S_2 , donde $S_1: x^2 + y^2 = 4$ y $S_2: y^2 + z^2 = 4$.

SOLUCION

$$\frac{128}{3} u^3.$$

54) Determinar el volumen de la región localizada entre los conos $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $z = \sqrt{3(x^2 + y^2)}$ interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ y donde $z \geq 0$.

SOLUCION

$$\frac{64}{3}(\sqrt{2} - 1)\pi u^3.$$

55) Calcular el volumen de la región interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ como al cono $z^2 = x^2 + y^2$; con $z \geq 0$.

SOLUCION

$$\frac{16\pi}{3\sqrt{2}}(\sqrt{2} - 1) u^3$$

56) Determinar el volumen dentro del cono que está sobre el plano XY entre las esferas $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y $x^2 + y^2 + z^2 = 4$.

SOLUCION

$$\frac{14}{3}\pi u^3$$

57) Mediante la integración triple, calcular el volumen del sólido localizado en el primer octante, limitado por las superficies de ecuaciones: $z^2 = 3x^2 + 3y^2$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 2$.

CÁLCULO VECTORIAL
SERIE 4

SEMESTRE: 2009-1

Página 14

SOLUCION

$$\frac{2\pi}{9} u^3$$

58) Mediante integración triple en coordenadas esféricas, calcular el volumen del sólido limitado superiormente por el cono $z^2 = x^2 + y^2$, e inferiormente por la esfera $x^2 + y^2 + z^2 - 4z = 0$.

SOLUCION

$$\frac{8\pi}{3} u^3 .$$

59) Utilizar el teorema de Stokes para calcular el valor de $\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r}$ a lo largo de la curva $C: \begin{cases} x^2 + y^2 + (z+2)^2 = 10 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases}$ donde $\bar{F}(x, y, z) = (y)i - (3x)j + (y^2z)k$.

SOLUCION

$$- 4\pi .$$

60) Sea el campo de fuerzas $\bar{F}(x, y, z) = (x)i - (z)j + (y)k$. Emplear el teorema de Stokes para determinar el trabajo que realiza el campo \bar{F} para mover una partícula una vuelta completa a lo largo de la curva C de ecuaciones $\begin{cases} z = 2x + 3y \\ x^2 + y^2 = 16 \end{cases}$.

SOLUCION

$$- 32\pi \quad u.t.$$

61) Calcular el flujo de campo $\bar{F}(x, y, z) = (z^2 - y^2 - x)i + (x^2z^2 - xz)j + (z^2 - xy)k$ que atraviesa la superficie cerrada S determinada por las superficies cuyas ecuaciones en coordenadas cilíndricas son $\rho = 4(1 + \cos\theta)$, $z = -2$, $z = 2$.

SOLUCION

$$- 96\pi \quad u.f.$$

CÁLCULO VECTORIAL

SERIE 4

SEMESTRE: 2009-1

Página 15

62) Utilizar el teorema de la divergencia para calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$, donde $\vec{F} = (2x)i + (3y)j + (4z)k$ y S es la superficie cerrada que envuelve a la región interior a la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ localizada por encima del plano XY .

SOLUCION

750 π

63) Sea el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (2x + y^2)i + (x^2z - 4y)j + (xy + z)k$. Calcular el valor de $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$ sobre la superficie cerrada que envuelve a la región en el primer octante limitada por el plano $2x + y + 6z = 12$.

SOLUCION

-24

64) Calcular el flujo Ψ del campo vectorial

$$\vec{F}(\rho, \phi, \theta) = (\rho \operatorname{sen} \phi) \hat{e}_\rho + (\rho^2 \operatorname{sen} \theta) \hat{e}_\phi + (\rho^2 \operatorname{sen} \theta) \hat{e}_\theta$$

que atraviesa la superficie de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 25$.

NOTA: El campo \vec{F} está referido al sistema esférico.

SOLUCION

125 π^2 u.f.

65) Utilizar el teorema de la divergencia de Gauss para calcular $\iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} \, dS$, donde $\vec{F} = (x^3)i + (y^3)j + (z^3)k$ y S es la superficie cerrada que rodea el sólido limitado por el paraboloides $x^2 + y^2 = 4 - z$, $0 \leq z \leq 4$ y el disco $x^2 + y^2 \leq 4$, $z = 0$.

SOLUCION

96 π u.f.

66) Utilizar el teorema de Gauss, para calcular el flujo del campo $\vec{F}(x, y, z) = \left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)(xi + yj + zk)$ que atraviesa la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2$.

CÁLCULO VECTORIAL

SERIE 4

SEMESTRE: 2009-1

Página 16

SOLUCION

16π u.f.

67) Por medio del teorema de Gauss, calcular $\iint_S \bar{F} \hat{g} dS$ para el campo vectorial $\bar{F}(x, y, z) = (x^2)i + (y^2)j + (z^2)k$ y la esfera S con centro en el origen y radio igual a 1.

SOLUCION

0.

68) Utilizar el teorema de Gauss para calcular el flujo del campo $\bar{F}(x, y, z) = (x^3)i + (y^3)j + (z^3)k$ a través de la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

SOLUCION

$\frac{2916}{5} \pi$ u.f.

69) Calcular el flujo del campo $\bar{V}(x, y, z) = (xy)i - (z)j + (x^2)k$ a través de la superficie cerrada que envuelve al sólido limitado por las superficies de ecuaciones $y^2 = 8x$, $x = 0$, $y = 4$, $z = 0$, $z = 6$.

SOLUCION

48 u.f.

70) Utilizar el teorema de la divergencia de Gauss para calcular $\iint_S \bar{F} \hat{g} dS$, donde $\bar{F}(x, y, z) = (x^2 - 2xz)i + (2yz)j + (x - y)k$ y S la superficie cerrada que envuelve a la región del primer octante limitada por los planos de ecuaciones $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $2x + y + z = 2$.

SOLUCION

$\frac{1}{3}$

CÁLCULO VECTORIAL

SERIE 4

SEMESTRE: 2009-1

Página 17

71) Determinar el flujo \bar{F} , donde $\bar{F}(x, y, z) = (x^2 + z^2) i + (y^2 - 2xy) j + (4z - 2yz) k$ a través de la superficie S definida por la frontera de la región acotada por el semicono $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ y el plano $x = 9$.

SOLUCION

Flujo = 243π

72) Calcular $\iint_S \bar{A} \cdot \hat{n} \, dS$, sobre la superficie cerrada S que encierra al sólido limitado por el cilindro $x^2 + y^2 = 9$ y los planos $y = 8$, $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, siendo $\bar{A} = (6z) i + (2x + y) j - (x) k$ y \hat{n} el vector unitario normal a S .

SOLUCION

18π