SERIE # 3

CÁLCULO VECTORIAL
SEMESTRE 2009-2

1) Sea el campo vectorial $\overline{F}(x,y,z) = (3x + yz)i + (2x + y^2)j + (xz)k$. Calcular $\int_C \overline{F} \bullet d\overline{r}$ a lo largo de la curva C: $\begin{cases} x = 2 + y \\ y = z^2 \end{cases}$, del punto $A(3, 1, 1)$ al punto $B(3, 1, -1)$.

SOLUCION

$\frac{4}{5}$

2) Sea el campo de fuerzas $\overline{F}(x,y) = (3x + y^2)i + (x - z^2)j + (axz)k$. Calcular el valor de la constante a de modo que $\int_C \overline{F} \bullet d\overline{r}$ evaluada del punto $A(1, 1, 0)$ al punto $B(2, 1, 4)$ a lo largo de la recta que los une sea igual a 10.

SOLUCION

$\frac{9}{16}$

3) Sea el campo vectorial $\overline{F}(x, y, z) = x^2 i + y^2 j + z^2 k$. Calcular $\int_C \overline{F} \bullet d\overline{r}$ a lo largo de la trayectoria del plano XY dada por $y^2 = x$, del punto $A(0,0,0)$ al punto $B(2, \sqrt{2}, 0)$.

SOLUCION

$\frac{2}{3}(4 + \sqrt{2})$

4) Calcular $\int_C y\,dx - x\,dy$ donde C es la elipse $x = a\cos t,\ \ y = b\,sen\,t$, recorrida en sentido positivo.

SOLUCION

$-2\pi\, ab$

5) Calcular el trabajo que efectúa el campo de fuerzas:

$$\overline{F} = (4xy\cos z + 2)\,i + (2x^2\cos z - 6y)\,j + (5 - 2x^2 y\,\text{sen}\,z)\,k$$

al desplazar una partícula del punto $P\,(2, -1, 1)$ al punto $Q\,(3, 1, 2)$.

SOLUCION

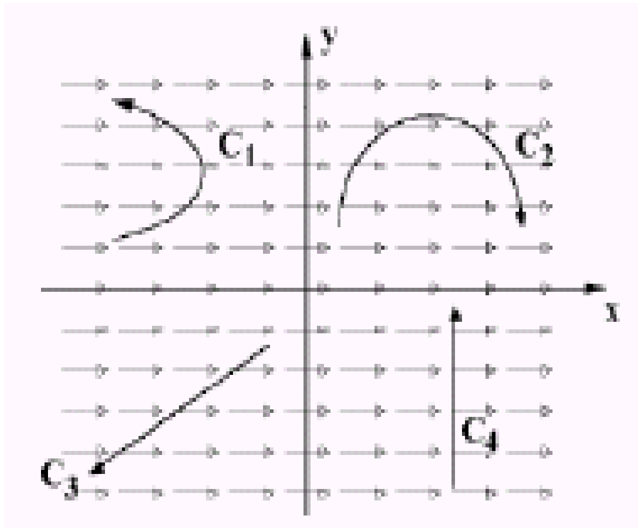
$18\cos 2 + 8\cos 1 + 7 = 3.831775339$

6) Calcular la integral de línea $I = \int_C (3x - y)dx + (x + 5y)dy$ sobre la circunferencia de ecuaciones $x = \cos t\,;\quad y = \text{sen}\,t\,;\quad 0 \le t \le 2\pi$.

SOLUCIÓN

2π

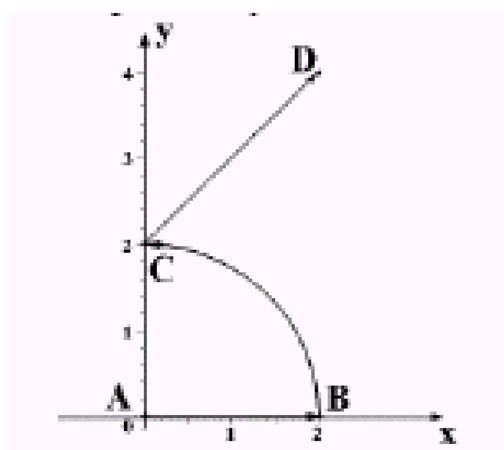
7) Para el campo vectorial $\overline{F}$ y las trayectorias C_1, C_2, C_3 y C_4 que se muestran en la figura, indicar si el valor de $\int_C \overline{F} \bullet d\,\overline{r}$ sobre cada una de las curvas es positivo o es negativo. Justificar su respuesta.



SOLUCION

A criterio del profesor.

8) Calcular el trabajo que realiza el campo de la fuerza $\overline{F}(x,y)=(x^2 y)i+(y)j$, al mover la partícula a lo largo de la trayectoria mostrada en la figura.

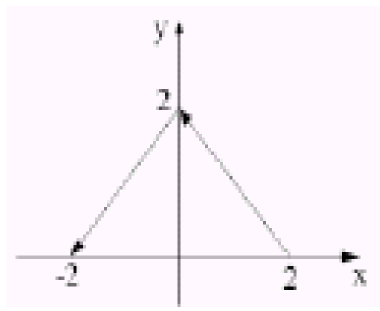


SOLUCION

$\dfrac{52-3\pi}{3}$ u.t.

---

9) Calcular el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\overline{F}(x,y)=(4xy^2)i+(y+2x^2)j$ al mover una partícula del punto $(2,0)$ al punto $(-2,0)$, a lo largo de la trayectoria mostrada en la figura. Comente el resultado.



SOLUCION

0; Comentario a criterio del profesor.

---

10) Calcular el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\overline{F}(x,y)=-e^{-y}i+e^{x}j$, cuando una partícula se mueve a lo largo de la curva C de ecuaciones; $x=3\ln t$, $y=\ln 2t$, para $1\le t\le 3$.

SOLUCION

$\dfrac{22}{3}$ u.t.

---

11) Evaluar el trabajo realizado por el campo $\overline{F}(x,y)=yi+(y+1-x^2)j$ a lo largo de la trayectoria c, que consiste en los segmentos de recta que unen los puntos $(5,-1)$ con $(5,2)$ y luego $(5,2)$ con $(0,2)$.

SOLUCION

$-\frac{161}{2}$ u.t.

---

12) Calcular el trabajo que desarrolla el campo de fuerzas $\overline{F} = z\ i + (\ x + 6z)\ k$ para mover una partícula a lo largo de la curva C: $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 2 \\ x^2 + z^2 = y \end{cases}$ del punto $A(1,1,0)$ al punto $B(0,1,1)$.

SOLUCION

3 u.t.

---

13) Calcular el trabajo que efectúa el campo de fuerzas $\overline{F}(\ x,\ y,\ z\ ) = z\,i + 3x\ j + 2xz\,k$ sobre una partícula que se desplaza del punto $P(0,0,0)$ al punto $Q(3,2,1)$ sobre la curva C: $\begin{cases} x - 4z^2 + z = 0 \\ y - 2z^2 = 0 \end{cases}$

SOLUCION

$\frac{23}{2}$ u.t.

---

14) Calcular el trabajo realizado por el campo:

$$\overline{F}(x,y,z) = (e^{-y} - ze^{-x})i + (e^{-z} - xe^{-y})j + (e^{-x} - ye^{-z})k$$

al desplazar una particular desde el punto $A(0,0,0)$ hasta el punto $B(1,1,1)$, a lo largo de la curva cuya ecuación vectorial es $\overline{r}(t) = (\ t\ )\ i + (\ t^2\ )\ j + (\ t^3\ )\ k$.

SOLUCION

$\frac{3}{e}$ u.t.

---

15) Calcular el trabajo efectuado para desplazar una partícula en el campo de fuerzas representado por $\overline{F}(x,y,z)=(x)i+(y)j+(z)k$, a lo largo de la curva C de ecuaciones $x=\sqrt{5}cost, \quad y=-2\sqrt{5}cost, \quad z=5sent$, desde el punto para el cual $t=0$ hasta el punto determinado por $t=\pi$. Explique el porqué del resultado.

SOLUCION

0 u.t. Explicación a criterio del profesor.

16) Calcular el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\overline{F}(x,y,z)=(3y)i-(4z)j+(6x)k$ cuando una partícula se desplaza a lo largo de la elipse C de ecuaciones $\begin{cases} 4x^2+9y^2=36 \\ z=4 \end{cases}$, del punto $A(3,0,4)$ al punto $B(0,2,4)$, siguiendo un sentido de recorrido contrario al de las manecillas del reloj.

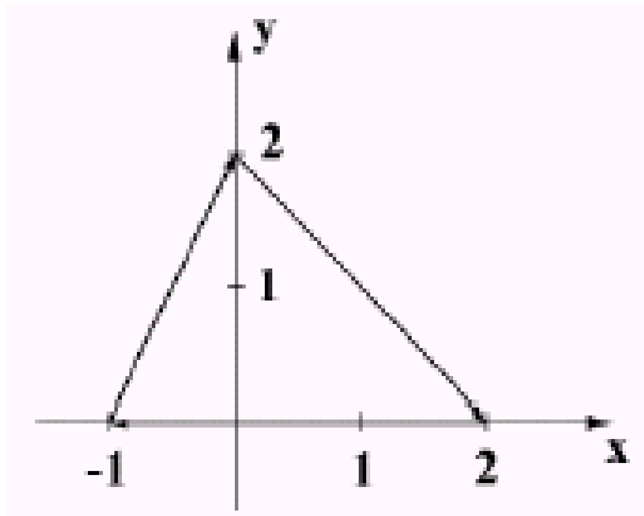
SOLUCION

$-\frac{9\pi}{2}-32$ u.t.

17) Calcular el trabajo que realiza el campo de fuerzas

$$\overline{F}(x,y)=(x^3+2y)i+(y^2+4x)j$$

al mover una partícula a lo largo de la trayectoria cerrada mostrada en la figura.



SOLUCION

-6 u.t.

18) Calcular el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\overline{F}(x,y,z) = (2y^2 z + 4ze^{xz})i + (4xyz + 2y)j + (2xy^2 + 4xe^{xz})k$ al mover una partícula del punto $A(3, \sqrt{7}, -3)$ al punto $B(-\sqrt{8}, 3, -3)$ a lo largo de la curva:

$$C: \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 25 \\ x + z = 0 \end{cases} \quad \text{con } y \geq 0.$$

SOLUCION

$\dfrac{4(e-1)}{e^9} - 16$ u.t.

19) Calcular el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\overline{F} = (xz)i + (xy)j + (zy)k$ cuando una partícula se desplaza a lo largo de la trayectoria cerrada definida por la intersección de las superficies $z = 4 - x^2$, $x = 0$, $z = 0$, $y = -3$, $y = 4$.

SOLUCION

63 u.t.

20) Sea el campo vectorial cuya ecuación es :

$$\overline{F}(x,y,z)=\frac{e^z y}{1+x^2y^2}\,i+\frac{e^z x}{1+x^2y^2}\,j+(e^z \operatorname{ang}\tan xy)k$$

Calcular $\int_C \overline{F}\bullet d\,\overline{r}$ a lo largo de una vuelta completa a la curva de ecuaciones $x^2+z^2=16,\quad x+y+z=10$.

SOLUCION

0 .

21) Calcular el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\overline{F}(x,y,z)=(cos y-y^2 sen x-z^2)\,i+(-x\,sen y+2y\,cos x-2)\,j+(1-2xz)k$

al mover una partícula a lo largo de la curva C: $\begin{cases} y=-x \\ z=sen\left(\dfrac{y}{2}\right)\end{cases}$ del punto $A(0,0,0)$ al punto $B(-\pi,\pi,1)$.

SOLUCION

$-\pi^2-2\pi+1$

22) Sea el campo irrotacional $\bar{v}=\left(\dfrac{2}{z}+2x\right)i+(4\,sen\,y-z^2 sec^2 y)\,j+\left(-2z\tan y-\dfrac{2x}{z^2}\right)k$.
Determinar su correspondiente función potencial.

SOLUCION

$\phi(x,y,z) = \dfrac{2x}{z} + x^2 - 4\cos y - z^2 \tan y + C$.

---

23) Determinar si el campo cuya ecuación en coordenadas polares es $\overline{F}(\rho,\theta) = \rho\ sen(2\theta)\hat{e}_\rho + \rho\cos(2\theta)\hat{e}_\theta$ tiene función potencial, en caso afirmativo, calcular la diferencia de potencial entre el polo y el punto A cuyas coordenadas cartesianas son $(1,1)$.

SOLUCION

1 u.t.

---

24) Calcular el valor de $\int_C \overline{F} \bullet d\overline{r}$ a lo largo de la circunferencia de radio 1 con centro en el origen, donde $\overline{F} = \dfrac{-y}{x^2+y^2} i + \dfrac{x}{x^2+y^2} j$.

SOLUCION

2π

---

25) Calcular $\int_C \overline{F} \bullet d\overline{r}$ siendo $\overline{F}(\rho,\theta) = 6\rho\ sen(2\theta)\hat{e}_\rho + 6\rho\cos(2\theta)\hat{e}_\theta$ y C la circunferencia de ecuación $x^2 - 4y + y^2 = 0$.

SOLUCION

0 .

---

26) Calcular el trabajo efectuado por el campo de fuerzas $\overline{F}(\rho,\theta) = \theta\ \hat{e}_\rho + \hat{e}_\theta$,dado en coordenadas polares, al desplazar una partícula a lo largo de la curva C: $x^2 + 4y^2 = 4$ desde el punto $A(2,0)$ hasta el punto $B(0,1)$, dados en coordenadas cartesianas.

SOLUCION

$\dfrac{\pi}{2}$ u.t.

27) Sea $\overline{F}$ el campo vectorial cuya ecuación en coordenadas polares es $\overline{F}(\rho,\theta) = (-\rho^2 sen\theta)\hat{e}_\rho + (\rho^2 \cos\theta)\hat{e}_\theta$. Calcular $\int_{A\,C}^{B} \overline{F} \bullet d\overline{r}$ a lo largo de la curva C de ecuación $x^2 + y^2 - 4x = 0$ del punto $A(0,0)$ al punto $B(4, 0)$ para $y \geq 0$.

SOLUCION

-16π .

28) Sea el campo vectorial $\overline{V}$ cuya ecuación en coordenadas cilíndricas es $\overline{V}(\rho,\theta,z) = 8\rho\theta^2 z^3 \hat{e}_\rho + 8\rho\theta z^3 \hat{e}_\theta + 12\rho^2\theta^2 z^2 \hat{e}_z$, calcular $\int_C \overline{V} \bullet d\overline{r}$ a lo largo de una vuelta completa a la curva C de ecuaciones $x^2 + z^2 = 25, \quad x + y + z = 10$.

SOLUCION

0 u.t.

29) El campo vectorial $\overline{F}$ en coordenadas cilíndricas está dado por:

$$\overline{F}(\rho,\theta,z) = 2\rho\,(sen\theta)\,z^3\, \hat{e}_\rho + \rho\,(\cos\theta)z^3\, \hat{e}_\theta + 3\rho^2 (sen\theta) z^2\, \hat{e}_z$$

Calcular el trabajo que desarrolla el campo $\overline{F}$ al mover una partícula del punto $A\left(1,\ \frac{\pi}{2},\ 1\right)$ al punto $B(2,\ 0,\ -1)$, a lo largo de la recta que los une. Los puntos están dados en coordenadas cilíndricas.

SOLUCION

-1 u.t.

30) Calcular el trabajo que realiza el campo de fuerzas $\overline{F}(\rho,\theta,z) = (4\rho\theta + 2\theta)\hat{e}_\rho + \left(2\rho + \frac{2\theta z^3}{\rho}\right)\hat{e}_\theta + (3\theta^2 z^2 + \rho\theta)\hat{e}_z$ al mover una partícula alrededor de la circunferencia de ecuaciones $x^2 + y^2 = 9, \quad z = 9 - x^2 - y^2$.

SOLUCION

0 u.t.