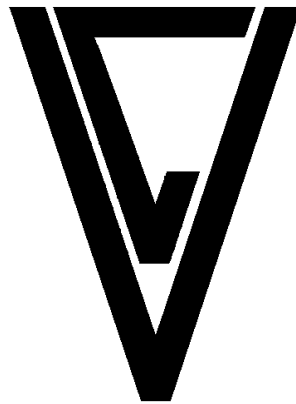




**FACULTAD DE  
INGENIERIA**



**U N A M**



**SERIE # 2**

**CÁLCULO VECTORIAL  
SEMESTRE 2009-2**

# CÁLCULO VECTORIAL

## SERIE 2

SEMESTRE: 2009-1

Página 2

1) Calcular las coordenadas del punto P de la curva:  $\vec{r}(t) = (1 - 2t)i + (t^2)j + (2e^{2(t-1)})k$  en el que el vector  $\vec{r}'(t)$  es paralelo a  $\vec{r}(t)$ .

SOLUCION

$$P(-1, 1, 2)$$

2) Una partícula se mueve a lo largo de la trayectoria cuya ecuación vectorial es  $\vec{r}(t) = e^t \cos t i + e^t \sin t j$ , donde  $t$  es el tiempo, demostrar que el ángulo entre el vector de posición y el vector velocidad es constante y determinar el valor de dicho ángulo.

SOLUCION

$$\theta = \frac{\pi}{4}$$

3) Determinar una ecuación vectorial de la curva:  $C: \begin{cases} x^2 + y^2 = 9 \\ 3 - x = y \end{cases}$ . Trazar la grafica de  $C$ .

SOLUCION

$$\vec{r} = (3)i + (z)k \quad \text{y} \quad \vec{r} = (3)j + (z)k, \quad \text{dibujo a criterio del profesor.}$$

4) Determinar si la curva de ecuación vectorial  $\vec{r}(t) = (\sin t)i + (\cos t)k$ , está contenida en un plano.

SOLUCION

La curva es plana.

5) Sea  $C$  la curva de ecuaciones paramétricas  $x = t$ ,  $y = t^2$ ,  $z = \frac{2}{3}t^3$ .

Calcular:

- la curvatura de  $C$
- la torsión de  $C$

SOLUCION

$$\kappa = \frac{2}{4t^4 + 4t^2 + 1}$$

$$\tau = \frac{2}{4t^4 + 4t^2 + 1}$$

# CÁLCULO VECTORIAL

## SERIE 2

SEMESTRE: 2009-1

Página 3

---

6) Sea la curva dada por  $\vec{r}(t) = (t^3 - t^2)i + (t^2 + 2t^3)j + (3t^2)k$ .

- Comprobar que dicha curva es plana.
- Obtener la ecuación cartesiana del plano que contiene a dicha curva.

---

**SOLUCION**

- A criterio del profesor.
- $2x - y + z = 0$

---

7) Dada la curva C cuya ecuación vectorial es obtener las coordenadas del centro de la circunferencia de curvatura de C en el punto:  $\vec{r}(t) = \left(2t - \frac{2}{3}t^3\right)i + (2t^2)j + \left(2t + \frac{2}{3}t^3\right)k$

obtener las coordenadas del centro de la circunferencia de curvatura de C en el punto  $P\left(\frac{4}{3}, 2, \frac{8}{3}\right)$ .

---

**SOLUCION**

$$C\left(-\frac{20}{3}, 2, \frac{8}{3}\right)$$

---

8) Calcular el radio de curvatura del tiro parabólico en el punto más alto. La ecuación de la posición de la partícula es:  $\vec{r} = (4 + 6t)i + (6 + 8t - 5t^2)j$ .

---

**SOLUCION**

$$\rho = \frac{36}{10} = 3.6$$

---

9) Sea la curva C de ecuación vectorial  $\vec{r}(t) = \left(\frac{1}{2}e^t \operatorname{sen} t\right)i - \left(\frac{1}{\sqrt{2}}e^t\right)j + \left(\frac{1}{2}e^t \operatorname{cos} t\right)k$ .

- Obtener la ecuación vectorial de C en términos de su longitud de arco s de modo que cuando  $s=l$  se tiene que  $t=0$ .
- Calcular el vector tangente unitario a la curva C en el punto  $t = \pi$ .

---

**SOLUCION**

$$a) \vec{r}(s) = \left(\frac{s}{2} \operatorname{sen}(\ln s)\right)i - \left(\frac{s}{\sqrt{2}}\right)j + \left(\frac{s}{2} \operatorname{cos}(\ln s)\right)k$$

$$b) \vec{T} = -\frac{\pi}{2}i + \frac{1}{\sqrt{2}}j - \frac{\pi}{2}k$$

---

# CÁLCULO VECTORIAL

## SERIE 2

SEMESTRE: 2009-1

Página 4

10) La ecuación vectorial de una curva C, que se genera por la intersección de un cilindro

parabólico y un plano, está dada por:  $\vec{r}(t) = \left(2 - \frac{t^2}{3} + \frac{t}{2}\right)i + t^2j + tk$

- Obtener las ecuaciones de las superficies citadas.
- Obtener el vector normal principal a  $\vec{r}(t)$  cuando  $\frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{1}{6}i + 2j + k$ .
- La ecuación del plano osculador para la condición anterior.

**SOLUCION**

a) Ecuación del plano:  $6x + 2y - 3z = 12$  . Ecuación del cilindro:  $y = z^2$  .

b)  $\vec{N} = \frac{1}{\sqrt{48^2 + 33^2 + 74^2}}(-48i + 33j - 74k)$

c) A criterio del profesor.

11) Sea C la curva cuya ecuación vectorial es

$$\vec{r}(t) = (2t^2 + 2)i + (at^3 - t^3)j + (t^4 + t^2 + 4)k .$$

- determinar el valor de la constante  $a$  de modo que C sea plana.
- Calcular la curvatura de C en el punto donde  $t = 1$ .

**SOLUCION**

a)  $a = 1$

b)  $\frac{\sqrt{1024}}{53^{3/2}} = 0.08534$

12) Sea C la curva cuya ecuación vectorial es:  $\vec{r}(t) = ti + t^2j + t^3k$  .

- Calcular la curvatura y torsión de la curva C en el punto  $P(2, 4, 8)$  .
- Determinar si la curva C es plana.

**SOLUCION**

a)  $\kappa = 2 \frac{\sqrt{181}}{25921} \sqrt{161}$  ;  $\tau = \frac{3}{181}$

b) A criterio del profesor.

13) Calcular la curvatura de la hélice circular  $\vec{r}(t) = a \cos t i + a \sin t j + bt k$  para  $a > 0$  .

**SOLUCION**

# CÁLCULO VECTORIAL

## SERIE 2

SEMESTRE: 2009-1

Página 5

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + b^2}$$

14) La ecuación vectorial de una curva C está dada por:  $\vec{r}(t) = t i + t^2 j + (4 - t^2 + t) k$ .

- Obtener el vector normal  $\vec{N}$ .
- Determinar si la curva es plana y en caso afirmativo obtener la ecuación del plano que la contiene.

SOLUCION

$$a) \vec{N} = \frac{(1 - 4t) i + (2 - 2t) j + (-2t - 1) k}{24t^2 - 12t + 6}$$

b) Plano osculador  $x - y - z + 4 = 0$ .

15) Demostrar que  $\frac{d\vec{T}}{ds} \cdot \frac{d\vec{B}}{ds} = -\kappa \tau$ .

SOLUCION

A criterio del profesor.

16) Calcular la curvatura de la elipse de ecuación:  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ .

SOLUCION

$$\kappa = \frac{a^4 b^4}{(a^4 y^2 + b^4 x^2)^{3/2}}$$

17) Sea la curva  $C: \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ y = x \end{cases}$ . Determinar los vectores  $\vec{T}$ ,  $\vec{B}$ , y  $\vec{N}$ , así como la curvatura y la torsión de la curva, para el punto  $P(1, 1, 2)$ .

SOLUCION

# CÁLCULO VECTORIAL

## SERIE 2

SEMESTRE: 2009-1

Página 6

---

$$\bar{T} = \left( \frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{4}{\sqrt{18}} \right); \quad \bar{N} = \left( -\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right); \quad \bar{B} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right); \quad \kappa = \frac{2}{27}; \quad \tau = 0.$$

---

18) Sea la curva C representada por:

$$C: \begin{cases} x = y \\ x^2 + y^2 = 4 - z \end{cases}$$

Determinar, para el punto  $P(0,0,4)$ :

- Los vectores  $\bar{T}$ ,  $\bar{N}$  y  $\bar{B}$ .
  - La curvatura y la torsión.
  - La ecuación cartesiana del plano oscular y la del plano rectificante.
- 

**SOLUCION**

a)  $\bar{T} = \frac{(1,1,0)}{\sqrt{2}}$ ;  $\bar{N} = (0, 0, -1)$ ;  $\bar{B} = \frac{(-1,1,0)}{\sqrt{2}}$

b)  $\kappa = 2$ ;  $\tau = 0$

c) plano oscular:  $x = y$ ; plano rectificante:  $z = 4$

---

19) La posición de una partícula en movimiento está dada por:  $\bar{r}(t) = 2t \mathbf{i} - 3t^2 \mathbf{j} + \frac{3}{2} t \mathbf{k}$

donde  $t$  es tiempo. Obtener para el instante  $t = 0.25$  segundos:

- El vector velocidad ( $\bar{v}$ ) de la partícula,
  - El vector tangente unitario ( $\bar{T}$ ) a la trayectoria de la partícula.
  - El vector aceleración tangencial ( $\bar{a}_T$ ) de la partícula.
  - El vector aceleración normal ( $\bar{a}_N$ ) de la partícula.
- 

**SOLUCION**

a)  $\bar{v} = 2\mathbf{i} - \frac{3}{2}\mathbf{j}$       b)  $\bar{T} = \frac{2}{5} \left( 2\mathbf{i} - \frac{3}{2}\mathbf{j} \right)$       c)  $\bar{a}_T = \frac{72}{25}\mathbf{i} - \frac{54}{25}\mathbf{j}$       d)  $\bar{v} = -\frac{72}{25}\mathbf{i} - \frac{96}{25}\mathbf{j}$

---

20) La trayectoria de una partícula esta dada por la expresión  $\bar{r} = t^2 \mathbf{i} - t \mathbf{j} + t^3 \mathbf{k}$  donde  $t$  es el tiempo. Calcular las componentes tangencial y normal de su aceleración en el punto donde  $t = 1$ .

---

# CÁLCULO VECTORIAL

## SERIE 2

SEMESTRE: 2009-1

Página 7

---

**SOLUCION**

$$\bar{a} = 5.88\bar{T} + 2.33\bar{N}; \quad a_T = 5.879747, \quad a_N = 2.329929.$$

---

**21)** Una partícula se desplaza a lo largo de la curva:

$$C: \bar{r}(t) = (\cos t + \operatorname{sent} t) i + (\operatorname{sent} t - \operatorname{cost} t) j; \quad t \geq 0$$

Determinar las componentes tangencial y normal de la aceleración.

---

**SOLUCION**

$$a_T = 0; \quad a_N = \sqrt{2}$$

---

**22)** Calcular el ángulo  $\alpha$  de intersección entre la superficie  $S$  y la curva  $C$ , cuyas ecuaciones vectoriales son:

$$S: \bar{r}_1(u, v) = (u + 2v) i + (5uv) j + (v - 2u) k$$

$$C: \bar{r}_2(t) = (3 - 3t) i + (5 - 5t - 10t^2) j + (-4t - 1) k$$

en el punto donde  $v = 1$ .

---

**SOLUCION**

$$\alpha = 0^\circ.$$

---

**23)** Sea:  $\bar{r}(s, t) = (2s) i + (\operatorname{sent} t + 2s \operatorname{cost} t) j + (\operatorname{cost} t - 2s \operatorname{sent} t) k$  una ecuación vectorial de la superficie  $S$ .

a) Identificar la superficie  $S$ .

b) Obtener una ecuación vectorial del plano tangente a  $S$  en el punto  $P(1, \sqrt{2}, 0)$ .

---

**SOLUCION**

a) Hiperboloide de un manto.

b)  $-2x + 2\sqrt{2}y = 2$ .

---

**24)** Dadas las superficies de ecuaciones vectoriales

$$S_1: \bar{r}(s, t) = (s \operatorname{cost} t) i + (s \operatorname{sent} t) j + (s^2) k, \quad S_2: \bar{r}(u, v) = (3 \cos u) i + (3 \operatorname{senu}) j + (v) k.$$

Obtener los vectores  $\bar{T}$ ,  $\bar{N}$  y  $\bar{B}$  de la curva de intersección de  $S_1$  y  $S_2$  en el punto  $(3, 0, 9)$ .

# CÁLCULO VECTORIAL

## SERIE 2

SEMESTRE: 2009-1

Página 8

---

**SOLUCION**

$$\overline{T} = j; \quad \overline{N} = -i; \quad \overline{B} = -k.$$

---

**25)** Obtener la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie de ecuaciones paramétricas.  $S: \begin{cases} x + y + \alpha z = \alpha \\ \alpha x - \alpha y - z = 1 \end{cases}$  en el punto  $(1, 3, -3)$ .

---

**SOLUCION**

$$\overline{r}(s, t) = 2(s + t)i + 2(s - t)j + (16t)k$$

---

**26)** Obtener la ecuación del plano tangente a la superficie  $S$  cuya ecuación vectorial es  $\overline{r}(u, v) = (\cos u \operatorname{sen} v)i + (\operatorname{sen} u \operatorname{sen} v)j + (\cos v)k$  con  $0 \leq u \leq 2\pi$  y  $0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}$  en el punto donde:  $u = \pi$ ,  $v = \frac{\pi}{4}$ .

---

**SOLUCION**

$$x - z + \sqrt{2} = 0$$

---

**27)** Calcular la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación vectorial  $\overline{r}(u, v) = (u \operatorname{sen}(u) \cos(v))i + (u \cos(u) \cos(v))j + (u \operatorname{sen}(v))k$  en el punto  $P(0, \pi, 0)$ .

---

**SOLUCION**

$$x - \pi y + \pi^2 = 0.$$

---

**28)** Sea la curva  $C$  que resulta de la intersección entre las superficies  $S_1: \overline{r}(s, t) = (s + t)i + (4st)j + (s - t)k$  y  $S_2: \overline{r}(u, v) = (u)i + (v)j + (2)k$ .

- Identificar las superficies.
  - A partir de las ecuaciones vectoriales de  $S_1$  y  $S_2$ , determinar la ecuación cartesiana del plano normal a la curva  $C$ , en el punto  $P(0, -4, 2)$ .
- 

**SOLUCION**

- $S_1$ : paraboloides hiperbólico;  $S_2$ : plano horizontal
  - $x = 0$
-

# CÁLCULO VECTORIAL

## SERIE 2

SEMESTRE: 2009-1

Página 9

---

29) Obtener la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie representada por  $\vec{r}(u,v) = (u + v + 1)\mathbf{i} + (2u + 3v)\mathbf{j} + (u + 2v - 2)\mathbf{k}$ , en el punto para el cual  $u = 2$  y  $v = 1$ .

---

SOLUCION

$$x - y + z + 1 = 0.$$

---

30) Determinar la ecuación cartesiana del plano tangente a la superficie de ecuación  $\vec{r}(s,t) = (2(s+t))\mathbf{i} + (2(s-t))\mathbf{j} + (16st)\mathbf{k}$  en el punto  $P(2,-2,0)$ .

---

SOLUCION

$$8x + 8y - z = 0.$$

---

31) Determinar la expresión en coordenadas cilíndricas del vector de posición de cualquier punto de la superficie:  $x^2 + y^2 = r^2$ .

---

SOLUCION

$$\vec{r} = r\hat{e}_\rho + z\hat{e}_z$$

---

32) Sea el sistema de coordenadas curvilíneas  $(u, v)$ , cuyas ecuaciones de transformación son:

$$u = -3x - y$$

$$v = x - 3y$$

- a) Determinar si el sistema curvilíneo  $(u, v)$  es ortogonal.  
b) Dibujar la región  $R'$  del plano  $UV$  en la que se transforma la región  $R$  del plano  $XY$  limitada por las rectas de ecuaciones:

$$y = 3x; \quad y = 3x - 6; \quad x = -3y + 18; \quad x = -3y + 6$$

c) Calcular:  $J \left| \begin{matrix} x, y \\ u, v \end{matrix} \right|$

- d) Determinar la relación entre las áreas  $R$  y  $R'$ .
- 

SOLUCION

- a) A criterio del profesor.  
b) A criterio del profesor.  
c)  $\frac{1}{10}$

# CÁLCULO VECTORIAL

## SERIE 2

SEMESTRE: 2009-1

Página 10

---

d)  $R = \frac{1}{10}R'$

---

**33)** Sea el sistema de coordenadas curvilíneas  $(u, v)$ , el cual esta referido al sistema cartesiano  $(x, y)$  por medio de las relaciones:

$$u = -4x + 3y$$

$$v = 3x + 4y$$

- Verificar que el sistema  $(u,v)$  sea ortogonal.
  - Calcular los vectores unitarios  $\hat{e}_u$  y  $\hat{e}_v$ .
  - Calcular los factores de escala  $h_u$  y  $h_v$ .
  - Calcular  $J \left| \frac{x,y}{u,v} \right|$ .
- 

**SOLUCION**

- A criterio del profesor.
  - $\hat{e}_u = -\frac{4}{5}i + \frac{3}{5}j$ ;  $\hat{e}_v = \frac{3}{5}i + \frac{4}{5}j$
  - $h_u = \frac{1}{5}$ ,  $h_v = \frac{1}{5}$
  - $J \left( \frac{x,y}{u,v} \right) = \frac{1}{25}$
- 

**34)** Considere el sistema de coordenadas curvilíneas definido por las ecuaciones

$$u = 3x + y$$

$$v = x - 3y$$

- determinar si el sistema es ortogonal.
  - Calcular los vectores unitarios  $\bar{e}_u$  y  $\bar{e}_v$ .
  - Calcular los factores de escala.
  - Determinar los jacobianos de la transformación  $J \left( \frac{x,y}{u,v} \right)$  y  $J \left( \frac{u,v}{x,y} \right)$
- 

**SOLUCION**

- A criterio del profesor.
- $\bar{e}_u = \frac{1}{\sqrt{10}}(3i + j)$ ;  $\bar{e}_v = \frac{1}{\sqrt{10}}(i - 3j)$

# CÁLCULO VECTORIAL

## SERIE 2

SEMESTRE: 2009-1

Página 11

c)  $h_u = \frac{1}{\sqrt{10}}, h_v = \frac{1}{\sqrt{10}}$

d)  $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{10}; J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = 10$

**35)** Sea la transformación:

$$T : \begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = 2uv \end{cases}$$

y sea R la región del plano UV, imagen (2,0), (2,1) y (1,1).

a) Dibujar las regiones R y R'.

b) Calcular los jacobianos de la transformación:  $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$  y  $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)$ .

**SOLUCION**

a) A criterio del profesor

b)  $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = \frac{1}{4(u^2 + v^2)}$  para todo  $(u,v) \neq (0,0)$ .

**36)** Sea la transformación dada por

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - y), v = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$$

a) Obtener el jacobiano de la transformación  $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$

b) Determinar las ecuaciones de la transformación inversa.

c) Dibujar en un plano UV la imagen de la región del plano XY limitada por las rectas  $x = 0, x = 1, y = 0, y = 1$ .

**SOLUCION**

a)  $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = 1$

b)  $x = \frac{u+v}{\sqrt{2}}; y = \frac{v-u}{\sqrt{2}}$

c) A criterio del profesor.

# CÁLCULO VECTORIAL

## SERIE 2

SEMESTRE: 2009-1

Página 12

37) Dadas las ecuaciones de transformación 
$$\begin{aligned}x + y &= u + v \\x - y &= 2u + v\end{aligned}$$

a) Calcular los jacobianos  $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$  y  $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right)$

b) Sea la región R del plano XY limitada por las rectas  $x = 0$ ,  $y = x - 2$ ,  $y = 1$ . Determinar la región R' del plano UV en que se transforma R y representar gráficamente a R y R'.

### SOLUCION

a)  $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{2}$ ;  $J\left(\frac{u,v}{x,y}\right) = 2$

b) A criterio del profesor.

38) Sea la transformación  $T: \begin{cases} u = 2x \\ v = 2y - x^2 \end{cases}$  y sea la región R del plano XY limitada por las curvas  $x = 1$ ,  $2y = 1 + x^2$  y  $2y = x^2 - 2x$ .

a) Determinar si el sistema de coordenadas  $(u, v)$  es ortogonal.

b) Graficar la región R del plano XY.

c) Graficar la región R' del plano UV, que es la región en la cual se transforma la región R bajo la transformación T.

d) Calcular el jacobiano:  $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right)$ .

e) Calcular el área de la región R.

### SOLUCION

a) A criterio del profesor.

b) A criterio del profesor.

c) A criterio del profesor.

d)  $J\left(\frac{x,y}{u,v}\right) = \frac{1}{4}$ .

e) El área de la región R es  $\frac{9}{8}$  unidades.

39) Dadas las ecuaciones de transformación  $x = uv \cos \phi$ ;  $y = uv \sin \phi$ ;  $z = \frac{u^2 - v^2}{2}$

a) Obtener los factores de escala  $h_u$ ,  $h_v$ ,  $h_\phi$ .

b) Obtener los vectores unitarios  $\hat{e}_u$ ,  $\hat{e}_v$ ,  $\hat{e}_\phi$ .

c) Determinar si el sistema curvilíneo es ortogonal.

# CÁLCULO VECTORIAL

## SERIE 2

SEMESTRE: 2009-1

Página 13

d) Obtener el jacobiano de la transformación  $J\left(\frac{x, y, z}{u, v, \phi}\right)$ .

**SOLUCION**

a)  $h_u = h_v = \sqrt{u^2 + v^2}; h_\phi = uv$

$$\hat{e}_u = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}(v \cos \phi \ i + v \sin \phi \ j + u \ k);$$

b)  $\hat{e}_v = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}}(u \cos \phi \ i + u \sin \phi \ j - v \ k);$

$$\hat{e}_\phi = -\sin \phi \ i + \cos \phi \ j$$

c) A criterio del profesor.

d)  $J\left(\frac{x, y, z}{u, v, \phi}\right) = u^3 v + u v^3$

**40)** Sea la transformación ortogonal

$$u = ax - 2y + z$$

$$v = 3x + by - 2z$$

$$w = x - y + cz$$

a) Determinar los valores de las constantes  $a$ ,  $b$  y  $c$ .

b) Determinar los factores de escala  $h_u$ ,  $h_v$ , y  $h_w$ .

c) Expresar a los vectores  $i$ ,  $j$  y  $k$  referidos a la base  $\{\hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w\}$ .

**SOLUCION**

a)  $a = -16, b = -25, c = 14$

b)  $h_u = \frac{1}{\sqrt{261}}; h_v = \frac{1}{\sqrt{638}}; h_w = \frac{1}{\sqrt{198}}$

# CÁLCULO VECTORIAL

## SERIE 2

SEMESTRE: 2009-1

Página 14

$$\begin{aligned}c) \quad i &= \frac{14}{\sqrt{261}} \hat{e}_u + \frac{3}{\sqrt{638}} \hat{e}_v + \frac{1}{\sqrt{198}} \hat{e}_w \\j &= -\frac{2}{\sqrt{261}} \hat{e}_u - \frac{25}{\sqrt{638}} \hat{e}_v - \frac{1}{\sqrt{198}} \hat{e}_w \\k &= \frac{1}{\sqrt{261}} \hat{e}_u - \frac{2}{\sqrt{638}} \hat{e}_v + \frac{14}{\sqrt{198}} \hat{e}_w\end{aligned}$$

41) Dada la transformación

$$x = u + 2v - w$$

$$y = 2u - v + 3w$$

$$z = u + v + 2w$$

Obtener los valores de la base  $\{ i, j, k \}$  referido a la base  $\{ \hat{e}_u, \hat{e}_v, \hat{e}_w \}$ .

SOLUCION

$$\begin{aligned}i &= \frac{30}{4\sqrt{6}} \hat{e}_u + \frac{6}{4\sqrt{6}} \hat{e}_v - \frac{42}{4\sqrt{14}} \hat{e}_w; \quad j = \frac{18}{4\sqrt{6}} \hat{e}_u - \frac{6}{4\sqrt{6}} \hat{e}_v - \frac{14}{4\sqrt{14}} \hat{e}_w; \\k &= -\frac{7}{4\sqrt{6}} \hat{e}_u + \frac{6}{4\sqrt{6}} \hat{e}_v + \frac{70}{4\sqrt{14}} \hat{e}_w\end{aligned}$$

42) Expresar el campo vectorial  $\bar{F}(x, y) = (x^3 + xy^2 + 2y)i + (x^2y + y^3 - 2x)j$  en coordenadas polares.

SOLUCION

$$\bar{F}(\rho, \theta) = \rho^3 \hat{e}_\rho - 2\rho \hat{e}_\theta.$$

43) Para el cono  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  obtener una ecuación vectorial de la superficie en coordenadas cilíndricas así como su correspondiente diferencial de área.

SOLUCION

$$dS = \rho \sqrt{5} d\rho d\theta$$

44) Para las superficies cuyas ecuaciones en coordenadas esféricas son:

# CÁLCULO VECTORIAL

## SERIE 2

SEMESTRE: 2009-1

Página 15

$$S_1 : \phi = \frac{\pi}{4}$$

$$S_2 : \rho = 3$$

Determinar :

- El ángulo que forman  $S_1$  y  $S_2$ .
- Unas ecuaciones de la curva de intersección entre  $S_1$  y  $S_2$ .

**SOLUCION**

a)  $90^\circ$

b)  $\phi = \frac{\pi}{4}; \rho = 3$

otras son

$$x^2 + y^2 = z^2; \quad x^2 + y^2 + z^2 = 9$$

otras son

$$z = \pm \frac{3}{\sqrt{2}}; \quad x^2 + y^2 = \frac{9}{2}$$

**45)** Sea el sistema de coordenadas cilíndricas elípticas  $(u, v, z)$ , definido por  $x = a \cosh u \cos v$ ,  $y = a \sinh u \sin v$ ,  $z = z$ . Determinar si dicho sistema es ortogonal.

**SOLUCION**

A criterio del profesor.

**46)** Sean los campos vectoriales:

$$\overline{F}(x, y, z) = (x^2 - 2yz) \mathbf{i} + (xy^2) \mathbf{j} + (x - z) \mathbf{k} \quad \text{y} \quad \overline{G}(x, y, z) = (2y) \mathbf{i} + (z^2) \mathbf{j} + (2x) \mathbf{k}$$

Obtener  $(\overline{G} \cdot \nabla) \overline{F}$ .

**SOLUCION**

$$(\overline{G} \cdot \nabla) \overline{F} = (-2z^3) \mathbf{i} + (2y^3 + 2xy z^2) \mathbf{j} + (2y - 2x) \mathbf{k}.$$

**47)** Sea el campo vectorial

$$\overline{F}(x, y, z) = (\sinh xy + x - z) \mathbf{i} + (\cosh yz + 3) \mathbf{j} + (\tanh xz + x) \mathbf{k}$$

Obtener la dirección en la cual la derivada direccional de  $\overline{F}$  en el punto  $P(1, 0, 0)$  es nula.

**SOLUCION**

# CÁLCULO VECTORIAL

## SERIE 2

SEMESTRE: 2009-1

Página 16

---

$$\bar{e} = (1, -2, -1)$$

---

**48)** Calcular la derivada direccional de la función vectorial  $\bar{v} = (3^x yz) i + (2^y xz) j + (4^z yx) k$  en  $P_1(0,0,1)$  y en la dirección de  $P_1(0,0,1)$  a  $P_2(2,1,0)$ .

**SOLUCION**

$$\frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{6}} i + \frac{2}{\sqrt{6}} j$$

---

**49)** Sean los campos vectoriales

$$\bar{F}(x, y, z) = z i + x j + y k$$

$$\bar{G}(x, y, z) = (yz) i + (xz) j + (xy) k$$

Verificar la validez de la expresión  $\text{div}(\bar{F} \times \bar{G}) = \bar{G} \text{rot} \bar{F} - \bar{F} \text{rot} \bar{G}$ .

---

**SOLUCION**

A criterio del profesor

---

**50)** Sea el campo vectorial:  $\bar{u}(x, y, z) = (x^2 yz) i + (xy^2 z) j + (xyz^2) k$ . Determinar la divergencia y el rotacional de  $\bar{u}$  en el punto  $P(1, -1, 3)$ .

---

**SOLUCION**

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{u} = -18 ; \bar{\nabla} \times \bar{u} = 8i + 8j$$

---

**51)** Si  $\bar{v} = \bar{w} \times \bar{r}$ , verificar que:  $\bar{w} = \frac{1}{2} \text{rot} \bar{v}$  siendo  $\bar{w}$  un vector constante.

---

**SOLUCION**

A criterio del profesor.

---

**52)** Dada la función vectorial

# CÁLCULO VECTORIAL

## SERIE 2

SEMESTRE: 2009-1

Página 17

$$\bar{u} = (6xy - y^2 \operatorname{sen} xy^2 + z^2) i + (3x^2 - 2xy \operatorname{sen} xy^2) j + (xz^2) k$$

Determinar la divergencia y el rotacional de la función.

**SOLUCION**

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 6y - y^4 \cos(xy^2) - 2x \operatorname{sen}(xy^2) - 4x^2 y^2 \cos(xy^2) + 2xz$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{u} = (2z - z^2) j$$

**53)** Obtener la divergencia del rotacional del campo vectorial:

$$\bar{u} = (xz e^{-y}) i + \left( \frac{yz}{x} \right) j + (x y^2 z^3) k$$

**SOLUCION**

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{\nabla} \times \bar{u}) = 0$$

**54)** Dada la función vectorial  $\bar{u} = (6xy - y^2 \operatorname{sen} xy^2 + z^2) i + (3x^2 - 2xy \operatorname{sen} xy^2) j + (2xz) k$   
Determinar la divergencia y el rotacional de la función.

**SOLUCION**

$$\bar{\nabla} \cdot \bar{u} = 6y - y^4 \cos(xy^2) - 2x \operatorname{sen}(xy^2) - 4x^2 y^2 \cos(xy^2) + 2x$$

$$\bar{\nabla} \times \bar{u} = \bar{0}$$

**55)** Calcular todos los valores de las constantes  $\alpha$  y  $\beta$  de modo que el campo:

$$\bar{F}(x, y, z) = (-\alpha^2 x + z + 2) i + (\beta z - \alpha \beta y) j + (\alpha^2 x + \alpha y - 2\alpha z)$$

sea solenoidal e irrotacional.

**SOLUCION**

$$\alpha = -1; \quad \beta = -1$$

# CÁLCULO VECTORIAL

## SERIE 2

SEMESTRE: 2009-1

Página 18

**56)** Para el campo vectorial  $\vec{R}(x, y, z) = (y^3 - 3z^2y)i + (z^3 - 3zx^2)j + (3x^2y - y^3)k$  calcular:

- a) La divergencia de  $\vec{F}$ .
- b) El rotacional de  $\vec{F}$ .
- c) El laplaciano de  $\vec{F}$ .
- d) El gradiente de  $\vec{F}$ .

**SOLUCION**

a)  $\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = 0$

b)  $\vec{\nabla} \times \vec{F} = (6x^2 - 3y^2 - 3z^2)i + (-6yz - 6xy)j + (-6xz - 3y^2 + 3z^2)k$

c)  $\vec{\nabla}^2 \vec{F} = \vec{0}$

d)  $\vec{\nabla} \vec{F} = \begin{bmatrix} 0 & 3y^2 - 3z^2 & -6yz \\ -6xz & 0 & 3z^2 - 3x^2 \\ 6xy & 3x^2 - 3y^2 & 0 \end{bmatrix}$

**57)** Sea la función:  $f(x, y, z) = \frac{z}{x^2 + y^2} + \ln(y^2) + e^z$

- a) Obtener  $f$  en función de las coordenadas cilíndricas  $(\rho, \theta, z)$ .
- b) Obtener  $\vec{\nabla} f$  en coordenadas cilíndricas.

**SOLUCION**

a)  $f(\rho, \theta, z) = \frac{z}{\rho^2} + 2 \ln \rho + 2 \ln(\sin \theta) + e^z$

b)  $\vec{\nabla} f = \left( \frac{-2z}{\rho^3} + \frac{2}{\rho} \right) \hat{e}_\rho + \left( \frac{2}{\rho} \cot \theta \right) \hat{e}_\theta + \left( \frac{1}{\rho^2} + e^z \right) \hat{e}_z$

**58)** Utilizar coordenadas esféricas para calcular:  $\vec{\nabla}^2 \ln |\vec{r} \cdot \vec{g}\vec{r}|$  donde  $\vec{r} = xi + yj + zk$ .

**SOLUCION**

$\frac{2}{r \cdot \vec{g}\vec{r}}$

# CÁLCULO VECTORIAL

## SERIE 2

SEMESTRE: 2009-1

Página 19

---

**59)** Determinar si la función en coordenadas esféricas  $f(\rho, \theta, \phi) = \frac{2}{\rho} + 4\theta$  es armónica.

---

**SOLUCION**

A criterio del profesor.

---

**60)** Determinar si la función  $f(\rho, \theta) = 4\rho^2 \sin 2\theta + \rho \cos \theta$  es armónica .

---

**SOLUCION**

A criterio del profesor.

---

**61)** Sea la función:  $f(x, y, z) = \frac{y}{x} z$  utilizar coordenadas esféricas para calcular  $\bar{\nabla} f$  .

---

**SOLUCION**

$$\bar{\nabla} f(r, \theta, \phi) = (\tan \theta \cos \phi) \hat{e}_r + (\sec^2 \theta \cot \phi) \hat{e}_\theta - (\tan \theta \sin \phi) \hat{e}_\phi$$

---

**62)** Determinar si la expresión en coordenadas polares  $df = 2\rho^3 d\rho + \rho^2 3^\theta \ln 3 d\theta$  , es una diferencial exacta. En caso de serlo, obtenga la función de la cual se obtiene.

---

**SOLUCION**

$$f = \rho^2 3^\theta + C$$

---

**63)** Sea el campo  $\bar{u} = \frac{2 \cos \theta}{\rho^3} \hat{e}_\rho + \frac{\sin \theta}{\rho^3} \hat{e}_\theta + 0 \hat{e}_\phi$  . Determinar si el campo  $\bar{u}$  es solenoidal.

---

**SOLUCION**

El campo  $\bar{u}$  no es solenoidal

---

**64)** Sea el campo conservativo  $\bar{F} = \frac{\bar{r}}{|\bar{r}|^2} \in R^2$  . Determinar la función potencial de  $\bar{F}$  .

---

**SOLUCION**

$$f = \ln(r) + C$$

---

**65)** Calcular, en coordenadas polares, el gradiente de la función:  $f(\rho, \theta) = 4r \cos \theta$  .

---

**SOLUCION**

# CÁLCULO VECTORIAL

## SERIE 2

SEMESTRE: 2009-1

Página 20

---

$$\bar{\nabla} f = (4 \cos \theta) \hat{e}_\rho - (4 \operatorname{sen} \theta) \hat{e}_\theta$$

---

**66)** Determinar si el campo vectorial representado por

$$\bar{F}(\rho, \theta, z) = (z \operatorname{sen}^2 \theta) \hat{e}_\rho + (2z \operatorname{sen} \theta \cos \theta) \hat{e}_\theta + (\rho \operatorname{sen}^2 \theta) \hat{e}_z$$

es irrotacional, donde  $\bar{F}$  está expresado en coordenadas cilíndricas circulares.

---

**SOLUCION**

El campo  $\bar{F}$  si es irrotacional.

---

**67)** Utilizar coordenadas esféricas para determinar si el campo vectorial representado por

$$\bar{F}(x, y, z) = \frac{x i + y j + z k}{x^2 + y^2 + z^2} \quad \text{es conservativo. Si lo es, obtener su función potencial.}$$

---

**SOLUCION**

El campo vectorial  $\bar{F}(x, y, z)$  es conservativo y su función potencial en coordenadas cartesianas es  $f = \ln \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} + C$ .

---