SERIE # 1

CÁLCULO VECTORIAL
SEMESTRE 2009-2

1) Sea la superficie de ecuación $z = x^2y^2 - x^2 - y^2$, obtener los puntos críticos de la función $z = f(x,y)$ y su naturaleza.

SOLUCION

$P_1(0,0)$ máximo relativo, $P_2(1,1)$ punto silla, $P_3(1,-1)$ punto silla, $P_4(-1,1)$ punto silla, $P_5(-1,-1)$ punto silla.

2) Sea $z = 2x^3 - 3x^2y + y^2 + 3x^2 - y + 1$, obtener los puntos críticos de la función $z = f(x,y)$ y la naturaleza de los mismos.

SOLUCION

$P_1\left(0,\frac{1}{2}\right)$ mínimo relativo, $P_2\left(-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$ punto silla, $P_3(1,2)$ punto silla.

3) Determinar los puntos máximos y mínimos relativos, así como los puntos silla de la función $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 - 3y^2 - 8$.

SOLUCION

$P_1(0,0)$ punto silla, $P_2(0,2)$ mínimo relativo, $P_3(-2,0)$ máximo relativo, $P_4(-2,2)$ punto silla.

4) Determinar los valores extremos de la función $z = x^2 + y^2 - x^3 + y^3$.

SOLUCION

Un mínimo relativo igual a cero en $P_1(0,0)$ y un máximo relativo en $P_4\left(\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)$ de valor $z = \frac{8}{27}$.

5) Determinar los puntos donde la función $f(x,y) = \cos hx + \operatorname{sen} hy$ tiene valores máximos, mínimos o puntos silla.

SOLUCION

La función no tiene puntos críticos.

6) Obtener los puntos críticos de la función $z=\frac{1}{3}y^3+x^2y-2x^2-2y^2+6$ y determinar la naturaleza de cada uno de los puntos obtenidos.

SOLUCION

$P_1(0,0)$ máximo relativo, $P_2(0,4)$ mínimo relativo, $P_3(2,2)$ punto silla, $P_4(-2,2)$ punto silla.

7) Calcular los valores extremos de la función $f(x,y)=x^2+y^2+2x-2y-1$ en la región $x^2+y^2\le 4$.

SOLUCION

Los valores extremos son: $f(-1,1)=-3$ mínimo y $f\left(\sqrt{2},-\sqrt{2}\right)=8.65$ máximo.

8) La ecuación cartesiana de la superficie S es $x^2+y^2+z+1=0$. Determinar el punto de S más próximo al origen. Hacer uso del método de la segunda derivada para el análisis de valores extremos.

SOLUCION

El punto $(0,0,-1)$ es el mas cercano (distancia mínima) al origen.

9) Dada la función $z=2x^3+xy^2+5x^2+y^2$, determinar sus puntos críticos y la naturaleza de cada uno de ellos.

SOLUCION

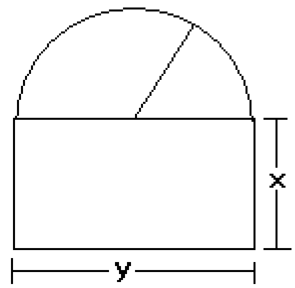
$P_1(0,0)$ mínimo relativo, $P_2\left(-\frac{5}{3},0\right)$ máximo relativo, $P_3(-1,2)$ punto silla, $P_4(-1,-2)$ punto silla.

10) Determinar, si existen valores extremos para la función $z=(x-1)^2-2y^2$.

SOLUCION

La función no tiene valores extremos.

11) Se desea construir una ventana de área máxima como la mostrada en la figura. Utilizar el método de la segunda derivada para calcular las dimensiones de dicha ventana si su perímetro debe medir 20 *m*.



SOLUCION

$x = \dfrac{20}{4+\pi}$, $\quad y = \dfrac{40}{4+\pi}$

12) Determinar los valores extremos de la función $f(x,y) = x^2 + y^2 + 5$ en la región cerrada R del plano XY limitada por las gráficas de $y = \sqrt{5}$, $y = -\sqrt{5}$ y $x^2 - y^2 = 4$.

SOLUCION

f presenta 4 máximos absolutos, en:

$f(-3,\sqrt{5}) = 19$

$f(3,\sqrt{5}) = 19$

$f(-3,-\sqrt{5}) = 19$

$f(3,-\sqrt{5}) = 19$

y un mínimo, relativo y absoluto en PC (0 , 0) = 5

13) Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para determinar las coordenadas de los vértices de la hipérbola representada por la ecuación $xy = 4$.

Nota: La hipérbola tiene su centro en el origen.

SOLUCION

$V_1(2,2)$ y $V_2(-2,-2)$.

14) Aplicar el análisis de la variación de una función para establecer las ecuaciones de las rectas sobre las cuales se localizan los ejes de la elipse de ecuación $5x^2 + 8xy + 5y^2 = 9$.

Sugerencia : Tomar en cuenta que la elipse tiene su centro en el origen.

SOLUCION

$y = x, \quad y = -x$.

15) Calcular la distancia mínima entre el punto $A(\ 3,-3,\ 1\ )$ y la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$.

SOLUCION

Distancia mínima de 3 unidades.

16) Sea la función $f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2$ con la restricción $g(x,y) = 3x - 2y = 5$ obtener los máximos y mínimos.

SOLUCION

$$y = -\frac{25}{52}$$

17) Determinar las coordenadas del punto de la superficie $z = xy + 1$ que esta mas cerca del origen.

SOLUCION

$P(\ 0, 0, 1\ )$

18) Determinar los máximos y mínimos, tanto absolutos como relativos, de la función $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ en la región $R = \left\{ (x,y) \middle| x^2 + y^2 \leq 5 \right\}$.

SOLUCION

f presenta mínimos absolutos sobre todos los puntos de la frontera.

$m_{abs} = -1$

$f(0,0) =$ *máximos realativo y absoluto.*

19) Una partícula se mueve en el espacio a lo largo de la curva: $C:\begin{cases} x^2 + y^2 = 8 \\ x + y + 2z = 10 \end{cases}$

Determinar las cotas máxima y mínima que alcanzara dicha partícula.

SOLUCION

Cota máxima en $(-2,-2,7)$, cota mínima en $(2,2,3)$.

20) El paraboloide $z = x^2 + y^2$ es cortado por el plano $z = 4 + x + y$. Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para calcular el punto de la curva de intersección entre el paraboloide y el plano que esté mas alejado del origen.

SOLUCION

$P(2, 2, 8)$

21) Utilizar el método de los multiplicadores de Lagrange para obtener los valores extremos de la función $z = x^2 + y^2$, sujeta a la restricción $\cos x - y - 5 = 0$.

SOLUCION

$f(0,-4) = 16$

22) Se desea construir un envase de lámina en forma de cilindro recto con tapa, que tenga un volumen de 2 litros. Si el m^2 de lámina cuesta *$100.00*. ¿Cuáles deben ser las dimensiones del envase para que su costo sea mínimo?.

SOLUCION

$r = \dfrac{1}{\sqrt[3]{\pi}}, \quad h = \dfrac{2}{\sqrt[3]{\pi}}$

23) Determinar las dimensiones del radio r y de la altura h del cilindro que puede ser inscrito en una esfera de radio R, de tal modo que su superficie total sea máxima.

SOLUCION

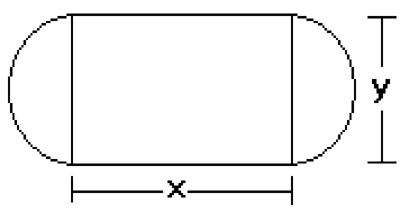
$r = \dfrac{R}{\sqrt{2}}, \quad h = \sqrt{2}\,R$

24) Calcular el área de la región del plano *XY* limitada por la elipse de ecuación $25x^2 - 14xy + 25y^2 - 288 = 0$. (**Sugerencia**: el área de una elipse con semiejes, a y b es igual a $\pi\, a b$; determinar el valor de las constantes a y b con el método de los multiplicadores de Lagrange).

SOLUCION

$A = 12\pi \quad u^2$

25) Se tiene que diseñar un campo deportivo que esté formado por un rectángulo con dos semicírculos en sus extremos. La parte rectangular debe tener un área de $5000\ m^2$, y el campo debe estar rodeado por una barda . ¿Cuáles deberán ser las dimensiones del patio de modo que la longitud de la barda que se necesita sea mínima? .



SOLUCION

$x = 50\sqrt{\pi}\,, \quad y = \dfrac{100}{\sqrt{\pi}}$

26) Si la suma de tres números positivos a , b , c es S , ¿cuáles son sus valores si la raíz cúbica de su producto debe ser máxima?

SOLUCION

$a = \dfrac{S}{3}, \quad b = \dfrac{S}{3}, \quad c = \dfrac{S}{3}.$

27) En un aeropuerto se desea tender un cable eléctrico desde un contacto en el piso, localizado en el punto $A(1,1,0)$, hasta un anuncio luminoso montado sobre una superficie plana inclinada de ecuación $x = 3y - z + 2$.
Calcular:

a) La longitud mínima de cable que se puede unir al plano con el contacto.
b) Las coordenadas del punto sobre el plano mas cercano al contacto.

SOLUCION

a) 1.206 unidades de longitud
b) $P\left(\frac{15}{11},\ -\frac{1}{11},\ \frac{4}{11}\right)$

28) Un arco metálico cuya configuración geométrica esta representada por las ecuaciones

$$\begin{cases} y - x = 0 \\ x^2 + y^2 + 4z^2 - 27 = 0 \end{cases}$$

esta en un medio con temperatura $T(x,y,z) = xyz + 10$. Determinar los puntos donde el arco tiene mayor temperatura.

SOLUCION

Puntos mas calientes $\left(-3,-3,\frac{3}{2}\right)$ y $\left(3,\ 3,\ \frac{3}{2}\right)$.
Puntos mas fríos $\left(-3,-3,-\frac{3}{2}\right)$ y $\left(3,\ 3,-\frac{3}{2}\right)$.

29) Calcular el valor de los extremos absolutos de la función $f(x,y) = -y^2 + 2y - x^2$ definida sobre la región $R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4;\ y \ge 0\}$.
.

SOLUCION

Mínimo absoluto igual a *– 4* en $(-2,0)$ y en $(2,0)$.
Máximo absoluto igual a *1* en $(0,1)$.

30) Determinar los valores máximos y mínimos de la función $f(x,y) = y^2 + x^2 - 4x - 2y + 4$ en una región del dominio de f limitado por las líneas $x = 4, \quad y = -1, \quad x - y = 3$.

SOLUCION

Mínimo absoluto igual a 1 en $(3,0)$.

Máximo absoluto igual a 7 en $(4,-1)$.

31) Determinar los valores extremos de la función $f(x,y) = y^2x^2$ sobre la región R definida por $R = \{(x,y) \mid x^2 + 4y^2 \le 24\}$.

SOLUCION

El valor extremo de la función $f(x,y) = y^2x^2$ es 36 y se obtiene en cuatro puntos diferentes los cuales se concluye son máximos absolutos. Mínimos absolutos sobre los ejes coordenados: m=0

32) Calcular el valor máximo de la función $z = xy$ en el círculo $x^2 + y^2 \le 1$.

SOLUCION

La función z tiene un valor máximo absoluto igual $\frac{1}{2}$ en los puntos $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ y $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

33) Una placa semicircular esta definida por la región

$$R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 1; \quad y \ge 0; \quad x, y \in \mathbb{R}\}$$

La temperatura *T,* en grados centígrados, en cualquier punto $P(x,y)$ de la placa, está dada por $T(x,y) = 2x^2 + y^2 - y$. Calcular las coordenadas de los puntos mas fríos y mas calientes de dicha placa.

SOLUCION

El punto mas frío es $\left(0, \frac{1}{2}\right)$ con $-0.25°C$ y los puntos $(-1,0)$ y $(1,0)$ son los más calientes con $2°C$.

34) Determinar el máximo absoluto y el mínimo absoluto de la función $f(x,y) = x^2 - x + 2y^2$ cuyo dominio se restringe a $D_f = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1; \quad x, y \in \mathbb{R}^2\}$.

SOLUCION

El máximo absoluto es $\frac{9}{4}$ y se presenta en los puntos $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y $\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ y el mínimo absoluto es $-\frac{1}{4}$ y se presenta en el punto $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$.

---

35) Para la función $f(x,y) = x \, ang \tan(y)$, obtener sus puntos críticos y determinar la naturaleza de cada uno de ellos.

SOLUCION

En $A(0, 0)$ f presenta un punto silla .

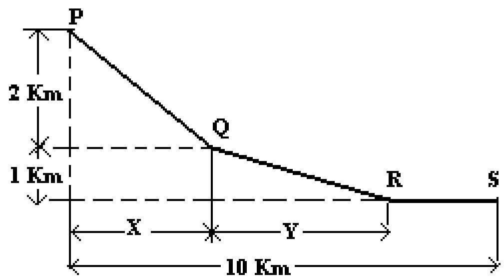
---

36) Determinar los valores extremos de la función $f(x,y) = xy$ en la región $R = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, \quad \text{para } f(x,y) > 0\}$.

SOLUCION

Máximos absolutos en $A\left(\frac{a}{\sqrt{2}}, \frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ y $B\left(-\frac{a}{\sqrt{2}}, -\frac{a}{\sqrt{2}}\right)$ y su valor es $\frac{a^2}{2}$.

37) Se desea construir un ducto desde el punto P, hasta el punto S, los costos por cada Km de ducto son: de $3k$ en el tramo $\overline{PQ}$, $2k$ en el tramo $\overline{QR}$, y de k en el tramo $\overline{RS}$. Determinar las dimensiones de X y Y para que el costo del ducto sea mínimo.



SOLUCION

$X = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ y $Y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

38) Calcular los valores extremos de la función $z = x^2 + y^2 + 1$ cuyo dominio esta dado por $D = \left\{ (x, y) \middle| x^2 + y^2 + y - 2 \leq 0 \right\}$.

SOLUCION

$f(o,o) = 1$: *mínimo relativo y abs.*

$f(0,-2) = 5$: *máximo absoluto.*