

DEFINICIONES

Los campos vectoriales con divergencia nula se llaman SOLENOIDALES.

Los campos vectoriales cuyo rotacional es el vector cero se llaman IRROTACIONALES

Sea $\bar{v}(x, y, z)$ el campo de velocidades de un fluido. Si:

$\text{div } \bar{v} = 0$	el fluido es INCOMPRESIBLE
$\text{div } \bar{v} < 0$	el fluido se COMPRIME
$\text{div } \bar{v} > 0$	el fluido se EXPANDE
$\text{rot } \bar{v} \neq \bar{0}$	el fluido es TURBULENTO
$\text{rot } \bar{v} = \bar{0}$	el fluido es NO TURBULENTO

EL OPERADOR NABLA ∇

El operador nabla tiene carácter vectorial e implica obtener ordenadamente todas las derivadas parciales indicadas. En coordenadas cartesianas, se representa como:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Cuando se aplica a una función escalar $\phi(x,y,z)$, funciona como el producto de un escalar por un vector.

$$\nabla \phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j + \frac{\partial \phi}{\partial z} k$$

Cuando se aplica a una función vectorial $\bar{F} = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$, funciona como el producto de una matriz columna y una matriz renglón.

$$[\bar{F}][\nabla] = \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix}$$

Para la divergencia se puede observar que:

$$\text{div } \bar{F} = \nabla \cdot \bar{F} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (P, Q, R) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

Y para el rotacional:

$$\text{rot } \bar{F} = \nabla \times \bar{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k$$

PROPIEDADES DEL OPERADOR NABLA

Sea c una constante, $\phi(x,y,z)$ y $\psi(x,y,z)$ dos funciones escalares y $\vec{u}(x,y,z)$ y $\vec{v}(x,y,z)$ dos funciones vectoriales.

$$\nabla(\phi \psi) = \phi \nabla \psi + \psi \nabla \phi$$

$$\nabla \times (\phi \vec{u}) = \phi \nabla \times \vec{u} + \nabla \phi \times \vec{u}$$

$$\nabla(c \phi) = c \nabla \phi$$

$$\nabla(\phi + \psi) = \nabla \phi + \nabla \psi$$

$$\nabla \bullet (\vec{u} + \vec{v}) = \nabla \bullet \vec{u} + \nabla \bullet \vec{v}$$

$$\nabla \bullet (c \vec{u}) = c \nabla \bullet \vec{u}$$

$$\nabla \bullet (\phi \vec{u}) = \phi \nabla \bullet \vec{u} + \vec{u} \nabla \phi$$

$$\nabla \bullet (\vec{u} \times \vec{v}) = \vec{v} \bullet (\nabla \times \vec{u}) - \vec{u} \bullet (\nabla \times \vec{v})$$

$$\nabla \times (\vec{u} + \vec{v}) = \nabla \times \vec{u} + \nabla \times \vec{v}$$

$$\nabla \times (c \vec{u}) = c \nabla \times \vec{u}$$

INVARIANTES DE SEGUNDO ORDEN

Sea $\phi(x,y,z)$ una función escalar cuyo gradiente es:

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j + \frac{\partial \phi}{\partial z} k$$

la **divergencia del gradiente** de ϕ es:

$$\nabla \bullet (\nabla \phi) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \bullet \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \nabla^2 \phi$$

A esta función escalar se le conoce como LAPLACIANO de $\phi(x,y,z)$. Cuando se ϕ cumple con la ecuación de LAPLACE $\nabla^2 \phi = 0$, se dice que ϕ es una FUNCIÓN ARMÓNICA.

El **rotacional del gradiente** de ϕ es:

$$\nabla \times (\nabla \phi) = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial x} & \frac{\partial \phi}{\partial y} & \frac{\partial \phi}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial y} \right) i - \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z \partial x} \right) j + \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y \partial x} \right) k = \vec{0}$$

Cuando se cumple el teorema de Schwarz, podemos afirmar que el rotacional de un gradiente siempre es el vector nulo. Esto significa que:

$$\text{si } \nabla \times \vec{F} = \vec{0} \text{ entonces } \vec{F} = \nabla \phi$$

es decir, si el campo vectorial \vec{F} es irrotacional se puede afirmar que existe una función escalar ϕ de la cual el campo \vec{F} es su gradiente. La función escalar ϕ recibe el nombre de función POTENCIAL del campo vectorial \vec{F} . La forma de calcular la función potencial de un campo irrotacional se estudiará en el tema 3.