GRADIENTE, DIVERGENCIA Y ROTACIONAL EN COORDENADAS CURVILÍNEAS

Sean (u,v,w) coordenadas curvilíneas definidas por las ecuaciones de transformación:

$$x=x(u,v,w)\ ,\ y=y(u,v,w),\ z=z(u,v,w) \qquad ; \qquad \text{donde } J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right)\neq 0$$

Sea $\phi(u,v,w)$ una función escalar y $\overline{F}(u,v,w)=P(u,v,w)\overline{e}_u+Q(u,v,w)\overline{e}_v+R(u,v,w)\overline{e}_w$ una función vectorial definidas ambas en las coordenadas curvilíneas (u,v,w). Entonces:

$$\nabla\phi=\frac{\partial\phi}{\partial u}\nabla u+\frac{\partial\phi}{\partial v}\nabla v+\frac{\partial\phi}{\partial w}\nabla w$$

$$\nabla\overline{F}=\left[\frac{\partial\overline{F}}{\partial u}\right]\left[\nabla u\right]+\left[\frac{\partial\overline{F}}{\partial v}\right]\left[\nabla v\right]+\left[\frac{\partial\overline{F}}{\partial w}\right]\left[\nabla w\right]$$

$$\nabla\circ\overline{F}=\frac{\partial\overline{F}}{\partial u}\circ\nabla u+\frac{\partial\overline{F}}{\partial v}\circ\nabla v+\frac{\partial\overline{F}}{\partial w}\circ\nabla w$$

$$\nabla\times\overline{F}=\frac{\partial\overline{F}}{\partial u}\times\nabla u+\frac{\partial\overline{F}}{\partial v}\times\nabla v+\frac{\partial\overline{F}}{\partial w}\times\nabla w$$

GRADIENTE, DIVERGENCIA, ROTACIONAL Y LAPLACIANO EN COORDENADAS CURVILÍNEAS ORTOGONALES

Se puede demostrar que en coordenadas curvilíneas ortogonales:

$$\nabla u=\frac{\overline{e}_u}{h_u}\quad ,\quad \nabla v=\frac{\overline{e}_v}{h_v}\quad ,\quad \nabla w=\frac{\overline{e}_w}{h_w}$$

Al usar estas relaciones en las expresiones anteriores se obtiene:

$$\nabla\phi=\frac{1}{h_u}\frac{\partial\phi}{\partial u}\overline{e}_u+\frac{1}{h_v}\frac{\partial\phi}{\partial v}\overline{e}_v+\frac{1}{h_w}\frac{\partial\phi}{\partial w}\overline{e}_w$$

$$\nabla\overline{F}=\frac{1}{h_u}\left[\frac{\partial\overline{F}}{\partial u}\right]\left[\overline{e}_u\right]+\frac{1}{h_v}\left[\frac{\partial\overline{F}}{\partial v}\right]\left[\overline{e}_v\right]+\frac{1}{h_w}\left[\frac{\partial\overline{F}}{\partial w}\right]\left[\overline{e}_w\right]$$

$$\nabla\circ\overline{F}=\frac{1}{h_uh_vh_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(h_vh_wP)+\frac{\partial}{\partial v}(h_uh_wQ)+\frac{\partial}{\partial w}(h_uh_vR)\right]$$

$$\nabla\times\overline{F}=\frac{1}{h_uh_vh_w}\begin{vmatrix} h_u\overline{e}_u & h_v\overline{e}_v & h_w\overline{e}_w \\ \dfrac{\partial}{\partial u} & \dfrac{\partial}{\partial v} & \dfrac{\partial}{\partial w} \\ h_uP & h_vQ & h_wR \end{vmatrix}$$

$$\nabla^2\phi=\frac{1}{h_uh_vh_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{h_vh_w}{h_u}\frac{\partial\phi}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{h_uh_w}{h_v}\frac{\partial\phi}{\partial v}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{h_uh_v}{h_w}\frac{\partial\phi}{\partial w}\right)\right]$$