COORDENADAS CURVILÍNEAS

Un sistema de coordenadas curvilíneas es un sistema de referencia en el que las *líneas* (*superficies*) *coordenadas* son por lo general *líneas* (*superficies*) *curvas*. Puede crearse cualquier sistema de coordenadas curvilíneas definiendo siempre las ecuaciones que lo relacionan con el cartesiano. Un cambio de coordenadas es una transformación.

Considérese un sistema de coordenadas curvilíneas $\{u,v,w\}$ definido por las siguientes ecuaciones de transformación (directa)

$$\begin{aligned} x &= x(u,v,w) \\ y &= y(u,v,w) \\ z &= z(u,v,w) \end{aligned} \qquad (1)$$

que en forma vectorial se escriben como:

$$\bar{r}(u,v,w) = x(u,v,w)\bar{i} + y(u,v,w)\bar{j} + z(u,v,w)\bar{k} \qquad (2)$$

Si $J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right) \neq 0$ entonces existe la transformación inversa y pueden establecerse sus ecuaciones de transformación:

$$\begin{aligned} u &= u(x,y,z) \\ v &= v(x,y,z) \\ w &= w(x,y,z) \end{aligned} \qquad (3)$$

Para la cual se tendrá que: $J\left(\frac{u,v,w}{x,y,z}\right) = \dfrac{1}{J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right)}$

Los vectores unitarios $\{\bar{e}_u, \bar{e}_v, \bar{e}_w\}$ del sistema curvilíneo están dados por:

$$\bar{e}_u = \frac{1}{h_u}\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \quad ; \quad \bar{e}_v = \frac{1}{h_v}\frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \quad ; \quad \bar{e}_w = \frac{1}{h_w}\frac{\partial \bar{r}}{\partial w} \qquad (4)$$

donde h_u, h_v y h_w son cantidades escalares definidas por:

$$h_u = \left\|\frac{\partial \bar{r}}{\partial u}\right\| \quad ; \quad h_v = \left\|\frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right\| \quad ; \quad h_w = \left\|\frac{\partial \bar{r}}{\partial w}\right\| \qquad (5)$$

Las cantidades escalares anteriores reciben el nombre de FACTORES DE ESCALA o COEFICIENTES MÉTRICOS ya que los coeficientes diferenciales *du*, *dv* y *dw* deben multiplicarse por ellos para obtener *longitudes de arco* ds_u, ds_v y ds_w medidas sobre las líneas coordenadas; es decir:

$$ds_u = h_u d_u \quad ; \quad ds_v = h_v d_v \quad ; \quad ds_w = h_w d_w \qquad (6)$$

La diferencial del vector de posición en coordenadas curvilíneas es:

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}du + \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}dv + \frac{\partial \bar{r}}{\partial w}dw \qquad (7)$$

utilizando (4) en (7) se obtiene:

$$d\bar{r} = h_u du\, \bar{e}_u + h_v dv\, \bar{e}_v + h_w dw\, \bar{e}_w \qquad (8)$$

El sistema de coordenadas curvilíneas definido por las ecuaciones (1) es ORTOGONAL si:

$$\frac{\partial r}{\partial u}\bullet\frac{\partial r}{\partial v}=0 \quad ; \quad \frac{\partial r}{\partial u}\bullet\frac{\partial r}{\partial w}=0 \quad ; \quad \frac{\partial r}{\partial v}\bullet\frac{\partial r}{\partial w}=0 \tag{9}$$

lo cual implica que: $e_u \bullet e_v = 0 \quad ; \quad e_u \bullet e_w = 0 \quad ; \quad e_v \bullet e_w = 0$

En tal caso los vectores unitarios también pueden calcularse como:

$$\bar{e}_u = \frac{1}{H_u}\nabla u \quad ; \quad \bar{e}_v = \frac{1}{H_v}\nabla v \quad ; \quad \bar{e}_w = \frac{1}{H_w}\nabla w \tag{10}$$

donde $\nabla u, \nabla v$ y ∇w son los gradientes de las funciones (3) y:

$$H_u = \|\nabla u\| = \frac{1}{h_u} \quad ; \quad H_v = \|\nabla v\| = \frac{1}{h_v} \quad ; \quad H_w = \|\nabla w\| = \frac{1}{h_w} \tag{11}$$

En el caso de coordenadas curvilíneas ortogonales se cumple también:

$$\left| J\left(\frac{x,y,z}{u,v,w}\right) \right| = h_u h_v h_w$$

Finalmente, un sistema de coordenadas curvilíneas (sea ortogonal o no) es DERECHO si:

$$\bar{e}_u \bullet \bar{e}_v \times \bar{e}_w = 1$$

	CILINDRICAS CIRCULARES	ESFERICAS
Ecuaciones de la transformación directa	$x=\rho\cos\theta$ $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta$ $z=z$ $\rho>0, 0\le\theta\le 2\pi,\ z\in\Re$	$x=\rho\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi$ $y=\rho\,\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi$ $z=\rho\cos\phi$ $\rho>0, 0\le\theta\le 2\pi,\ 0\le\phi\le\pi$
Ecuaciones de la transformación inversa	$\rho^2=x^2+y^2$ $\theta=angtan(y/x)$ $z=z$ $x,y,z\in\Re$	$\rho^2=x^2+y^2+z^2$ $\theta=angtan(y/x)$ $\phi=ang\cos\left(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$ $x,y,z\in\Re$
Jacobiano de la transformación directa	$\left\lvert J\left(\frac{x,y,z}{\rho,\theta,z}\right)\right\rvert=\rho$	$\left\lvert J\left(\frac{x,y,z}{\rho,\theta,\phi}\right)\right\rvert=\rho^2\,\mathrm{sen}\,\phi$
Factores de escala	$h_\rho=1, h_\theta=\rho, h_z=1$	$h_\rho=1,\quad h_\theta=\rho\,\mathrm{sen}\,\phi,\quad h_\phi=\rho$
Vectores unitarios del sistema de coordenadas curvilíneo	$\bar{e}_\rho=\cos\theta i+\mathrm{sen}\,\theta j+0k$ $\bar{e}_\theta=-\mathrm{sen}\,\theta i+\cos\theta j+0k$ $\bar{e}_z=0i+0j+k$	$\bar{e}_\rho=\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi i+\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi j+\cos\phi k$ $\bar{e}_\theta=-\mathrm{sen}\,\theta i+\cos\theta j+0k$ $\bar{e}_\phi=\cos\theta\cos\phi i+\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi j-\mathrm{sen}\,\phi k$
Vectores unitarios del sistema de coordenadas cartesiano	$i=\cos\theta\bar{e}_\rho-\mathrm{sen}\,\theta\bar{e}_\theta+0\bar{e}_z$ $j=\mathrm{sen}\,\theta\bar{e}_\rho+\cos\theta\bar{e}_\theta+0\bar{e}_z$ $k=0\bar{e}_\rho+0\bar{e}_\theta+0\bar{e}_z$	$i=\cos\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\bar{e}_\rho-\mathrm{sen}\,\theta\bar{e}_\theta+\cos\theta\cos\phi\bar{e}_\phi$ $j=\mathrm{sen}\,\theta\,\mathrm{sen}\,\phi\bar{e}_\rho+\cos\theta\bar{e}_\theta+\mathrm{sen}\,\theta\cos\phi\bar{e}_\phi$ $k=\cos\phi\bar{e}_\rho+0\bar{e}_\theta-\mathrm{sen}\,\phi\bar{e}_\phi$