Tema 1 INTERACCIÓN GRAVITATORIA

1.- INTERACCIONES Y CAMPOS

Decía Newton en su obra *Optiks* (1704), con respecto a las interacciones:

"¿No tienen las pequeñas Partículas de los Cuerpos ciertos Poderes o Fuerzas, por medio de las cuales actúan… entre ellas para producir una gran parte de los Fenómenos de la Naturaleza? Porque es bien conocido que los Cuerpos actúan unos sobre otros por las Atracciones de la Gravedad, el Magnetismo y la Electricidad… y no es improbable que haya más "Poderes atractivos" que éstos…Las Atracciones de la Gravedad, el Magnetismo y la Electricidad alcanzan distancias muy considerables…y puede haber otras que alcancen sólo distancias tan pequeñas que escapen a la observación…

Analicemos brevemente las características de los cuatro tipos de interacciones.

Interacción gravitatoria: se manifiesta en el movimiento planetario y en el movimiento de la materia en conjunto. Es la más débil de las interacciones conocidas y la más estudiada, debido al interés del hombre en la astronomía y a que la gravitación es responsable de muchos fenómenos que afectan a nuestras vidas.

Interacción electromagnética: la mejor comprendida y la de mayor importancia desde el punto de vista de la vida cotidiana. La mayoría de procesos que observamos a nuestro alrededor, incluyendo los químicos y biológicos, son el resultado de interacciones electromagnéticas entre átomos y moléculas.

Interacción nuclear o fuerte: responsable de la unión de protones y neutrones dentro del núcleo atómico, y otros fenómenos conexos. Se conoce aún de modo incompleto.

Interacción débil: responsable de ciertos procesos entre las partículas fundamentales, tales como la desintegración beta. Interacción muy pobremente conocida.

Las intensidades relativas de estas interacciones son:

$$\textit{Fuerte (1)} > \textit{Electromagnética} \ (10^{-2}) > \textit{Débil} \ (10^{-5}) > \textit{Gravitatoria} \ (10^{-38})$$

Para describir estas interacciones se introduce el concepto de "Campo".

Campo Físico es una región del espacio en cada uno de cuyos puntos se ponen de manifiesto valores distintos o iguales de alguna magnitud física.

El campo se llama **Escalar** si la magnitud física observada es de tipo escalar, como la densidad de un sólido o la temperatura, y se llama **Vectorial** si la magnitud física es vectorial, como el peso de un cuerpo o la velocidad de un fluido.

2.- CAMPO ESCALAR. SUPERFICIES EQUIESCALARES

En un instante dado *t*, la magnitud escalar tiene un valor en cada punto del campo, que es función de las coordenadas del lugar considerado. Por ej., en un punto dado del campo escalar de la presión atmosférica, $p = f(x,y,z)$.

Superficie equiescalar, o de nivel, es el lugar geométrico de todos los puntos en los que la magnitud considerada tiene un valor constante. Son las isobaras (presión atmosférica), las isotermas (temperatura).

Las superficies equiescalares no se cortan ya que el punto común de intersección tendría dos valores distintos de la magnitud escalar.

Consideremos el campo escalar de alturas de una montaña. La forma más sencilla de ver cómo varía esa magnitud es unir todos los puntos que tienen la misma altura (Fig.a), obteniendo un conjunto de curvas situadas espacialmente, y que proyectadas sobre el plano XY, nos dan las conocidas *curvas de nivel* (Fig.b).

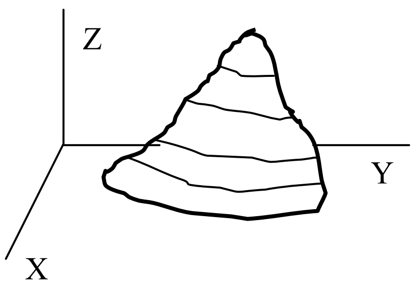


Fig.a

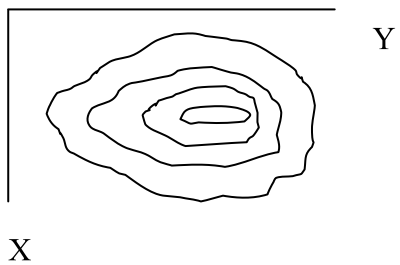


Fig.b

Las curvas de la izquierda, más espaciadas que las de la derecha, indican que la montaña está menos inclinada por ese lado izquierdo. Si las superficies de nivel están muy próximas, la variación de la magnitud considerada es grande; si están distanciadas, la variación es pequeña.

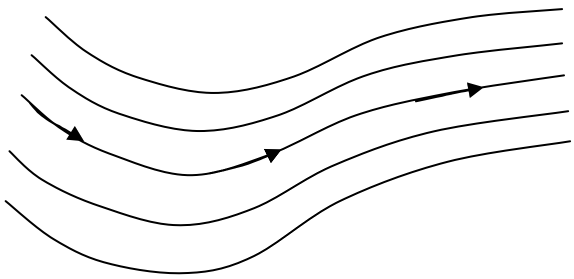
3.- CAMPO VECTORIAL. CAMPO DE FUERZAS

En este tipo de campo, el módulo y la dirección de la magnitud vectorial son funciones de las coordenadas del punto considerado.

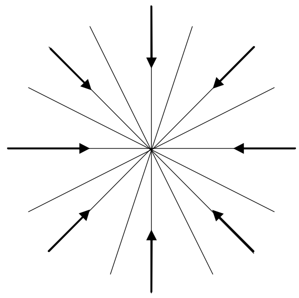
Por ejemplo, la velocidad del aire en un punto de la atmósfera, y en un instante dado, vendrá dada por un vector cuyas componentes serán función de las coordenadas de dicho punto. Un ejemplo importante de campo vectorial es el *campo de fuerzas*.

Un campo vectorial se representa mediante las *líneas de campo* que son líneas tangentes en cada punto a la magnitud vectorial que define el campo.

Si se trata de un campo de fuerzas, las líneas de campo se llaman *líneas de fuerza*; estas líneas no se cortan ya que en cada punto del campo existe una sola línea tangente, es decir sólo pasa una línea de fuerza por cada punto.



Líneas de campo de velocidades en la superficie de un río

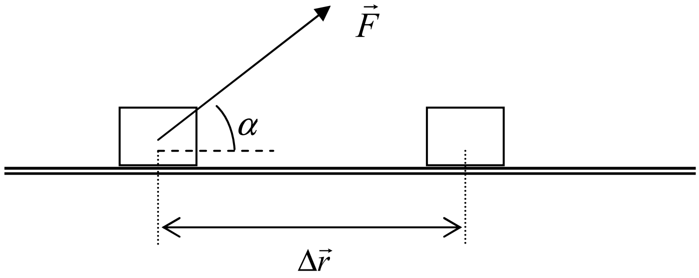


Líneas de fuerza del campo gravitatorio de una masa puntal

Ejemplos de campos de fuerzas son el *Campo gravitatorio* y el *Campo eléctrico*.

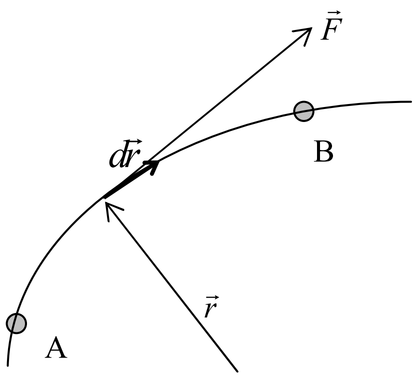
4.- TRABAJO DE UNA FUERZA VARIABLE

Trabajo es una transferencia de energía entre dos sistemas debida a fuerzas que desplazan su punto de aplicación.



Energía intercambiada = Trabajo = fuerza . desplazamiento

$$W = \vec{F} \, . \, \Delta\vec{r} = \left|\vec{F}\right| . \left|\Delta\vec{r}\right| . \cos\alpha$$

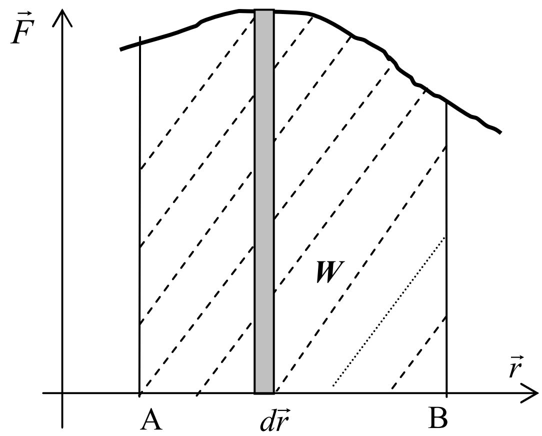


Si la fuerza es variable, el trabajo para un desplazamiento elemental $d\vec{r}$ será:
$dW = \vec{F} \, d\vec{r}$, y el trabajo total para el desplazamiento desde A hasta B será la suma de todos los trabajos elementales *dW*:

$$W = \vec{F}_1 \, d\vec{r}_1 + \vec{F}_2 \, d\vec{r}_2 + ... = \Sigma \vec{F} d\vec{r}$$

Es decir: $W = \int_A^B \vec{F} d\vec{r}$

Al representar gráficamente $\vec{F}$ en función de $\vec{r}$ se obtiene la curva de la figura, correspondiendo el área rayada al valor del trabajo $W = \int_A^B \vec{F} d\vec{r}$



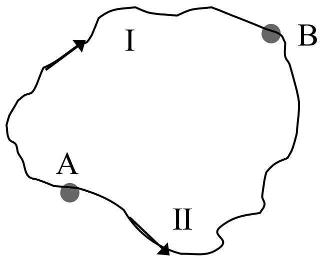
5.- CAMPOS CONSERVATIVOS. ENERGÍA POTENCIAL

Un campo de fuerzas es *conservativo* si la fuerza que en él actúa es *conservativa*.

"Una fuerza es *conservativa* si el trabajo que realiza sobre una partícula a lo largo de una trayectoria cerrada es cero". $W = \oint \vec{F} d\vec{r} = 0$ (circulación)

Eso implica que el trabajo realizado sobre la partícula al desplazarse desde un punto A hasta otro B, no depende de la trayectoria seguida, pues podemos escribir:

$$\oint \vec{F} d\vec{r} = \int_{A(I)}^{B} \vec{F} d\vec{r} + \int_{B(II)}^{A} \vec{F} d\vec{r} = 0 \Rightarrow \int_{A(I)}^{B} \vec{F} d\vec{r} = -\int_{B(II)}^{A} \vec{F} d\vec{r} = \int_{A(II)}^{B} \vec{F} d\vec{r}$$



Es decir, $\int_{A(I)}^{B} \vec{F} d\vec{r} = \int_{A(II)}^{B} \vec{F} d\vec{r}$, o lo que es igual: $W_{A(I)}^{B} = W_{A(II)}^{B}$

"El trabajo realizado por una fuerza conservativa sólo depende de la posición inicial y final, y no del camino seguido".

- Ello permite asignar a la partícula situada en cada uno de los puntos del campo, una cantidad escalar llamada *energía potencial* que es función de la posición de cada punto, de modo que el trabajo realizado sobre la partícula para llevarla desde un punto A hasta otro B puede expresarse en la forma:

$$W_A^B = \int_A^B \vec{F} d\vec{r} = Ep_A - Ep_B$$

Haciendo $Ep_A - Ep_B = -(Ep_B - Ep_A) = -\Delta Ep$, podemos escribir $W_A^B = -\Delta Ep$

O bien en la forma $\boxed{\Delta Ep = -W_A^B}$

"La diferencia de energía potencial entre dos puntos A y B es igual a menos el trabajo que realiza la fuerza sobre la partícula al desplazarla entre esos puntos".

- La expresión anterior permite calcular la diferencia de energía potencial que tiene la partícula entre dos puntos, calculando el trabajo de la fuerza para desplazarla entre ambos puntos. Pero, ¿cómo conocer la energía potencial que tiene la partícula cuando se encuentra en un punto dado?

Para ello asignamos el valor "cero" a la energía potencial de la partícula en un punto (por ejemplo, el punto A considerado en el infinito), y así podremos saber su valor en otro punto B:

Al sustituir en $\Delta Ep = -W_\infty^B \Rightarrow Ep_B - Ep_\infty = Ep_B - 0 = -W_\infty^B$.

Obtenemos $Ep_B = -W_\infty^B$. O bien $\boxed{Ep_B = -\int_\infty^B \vec{F} d\vec{r}}$

"La energía potencial de una partícula situada en un punto del campo es igual a menos el trabajo que realiza la fuerza para traerla desde el infinito hasta dicho punto"

De la anterior ecuación se obtiene $\vec{F} = -\dfrac{dEp}{d\vec{r}}$ (relación entre $\vec{F}$ y Ep)

- Son ejemplos de campos de fuerzas conservativos los *campos uniformes* y los *campos de fuerzas centrales*.

En los *campos uniformes*, en todos sus puntos $\vec{F} = cte$. Tal es el caso del campo gravitatorio próximo a la superficie terrestre y del campo eléctrico entre dos láminas metálicas cargadas y muy próximas ente sí (condensador)

En los *campos de fuerzas centrales* la dirección de la fuerza que actúa sobre la partícula pasa siempre por el mismo punto, llamado *centro de fuerzas*, como es el caso de las fuerzas gravitatorias que mantienen las órbitas de los planetas y satélites, y de las fuerzas eléctricas en los campos creados por una carga puntual.

En este tipo de campos de fuerzas centrales, el módulo de la fuerza sólo depende de la distancia desde su punto de aplicación al centro de fuerzas.

6.- CAMPOS DE FUERZAS NO CONSERVATIVOS

Se dice que una fuerza es NO conservativa si el trabajo realizado sobre una partícula (o sistema) que se mueve de un punto a otro, depende del camino seguido entre esos puntos, y no puede, por tanto, escribirse en función de la posición de dichos puntos.

Por tanto, en los campos de fuerzas NO conservativos no puede definirse la función *energía potencial*.

"El trabajo de una fuerza NO conservativa en una trayectoria cerrada no es nulo".

Ejemplos de fuerzas NO conservativas son las fuerzas *disipativas*, presentes en casi todos los movimientos, y que al actuar sobre un sistema disipan cierta cantidad de energía mecánica. La más significativa de ellas es la *fuerza de rozamiento*, que presenta las siguientes peculiaridades:

a) Depende del recorrido efectuado; por eso es NO conservativa.
b) Realiza un trabajo negativo, por tener la fuerza sentido opuesto al movimiento.
c) El trabajo realizado no es recuperable, puesto que si el sistema cambia el sentido del movimiento, también lo hace el sentido de la fuerza, y en lugar de recuperar la energía perdida, pierde de nuevo más energía.

- Sea una partícula sobre la que actúan fuerzas conservativas y NO conservativas:

$$\Sigma\vec{F} = \vec{F} + \vec{F}_{NC}$$

Según el teorema del trabajo-energía: $W = \Delta Ec$

Y por tanto: $W = \int \Sigma\vec{F}d\vec{r} = \int \vec{F}d\vec{r} + \int \vec{F}_{NC}.d\vec{r} = \Delta Ec$

Como por otra parte: $\int \vec{F}d\vec{r} = -\Delta Ep$, escribiremos: $\boxed{\int \vec{F}_{NC}.\,d\vec{r} = \Delta Ec + \Delta Ep}$

"El trabajo realizado por fuerzas NO conservativas es igual a la variación de la energía mecánica total de la partícula"

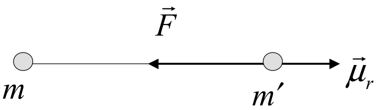
7.- CAMPOS GRAVITATORIOS

Los campos gravitatorios son campos vectoriales, y en particular campos de fuerzas conservativos a los que se llaman campos "Newtonianos", siendo en ellos la fuerza en cada punto inversamente proporcional al cuadrado de la distancia

Un campo gravitatorio aparece por la presencia de una masa y se manifiesta en un punto del mismo cuando se coloca otra masa.

7.1.- Ley de Gravitación Universal

"Dos cuerpos cualesquiera se atraen con una fuerza directamente proporcional al producto de sus masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que los separa"



$$\boxed{\vec{F} = -G\frac{m.m'}{r^2}\vec{\mu}_r}$$

F (-): atracción

$G = 6{,}67.10^{-11}$ N m^2 kg^{-2}

- Usando el *principio de superposición* se calcula la fuerza total que sobre una masa m' ejerce un conjunto de varias masas: se calcula la fuerza que cada masa ejerce sobre m', sin tener en cuenta a las demás, sumando después todas las fuerzas calculadas:

$$\vec{F}_T = \sum_{i=1}^{n}(-G\frac{m_i.m'}{r_i^2}\vec{\mu}_r)$$

7.2.- Intensidad del campo gravitatorio

Si en un punto del campo gravitatorio creado por un cuerpo de masa m, colocamos otro cuerpo de masa m', sobre éste actuará una fuerza $\vec{F} = m'\vec{g}$.

Se define la *intensidad del campo gravitatorio* en un punto $\boxed{\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m'}}$, como "la fuerza que actúa sobre la unidad de masa colocada en dicho punto". Se mide en N/kg ó m/s^2

¿De qué depende $\vec{g}$?

Al sustituir en $\vec{g} = \frac{\vec{F}}{m'}$ la expresión de la fuerza dada por la ley de Newton, obtenemos:

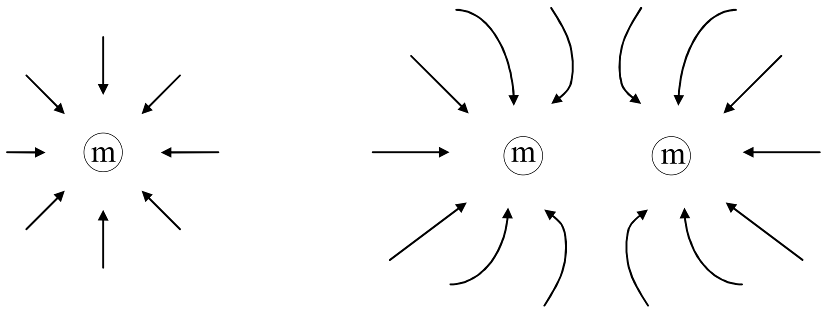
$$\vec{g} = \frac{-G\frac{m.m'}{r^2}\vec{\mu}_r}{m'} \Rightarrow \boxed{\vec{g} = -G\frac{m}{r^2}\vec{\mu}_r}$$

$\vec{g}$ depende de la masa creadora del campo y de la posición del punto considerado.

- Si el campo gravitatorio está creado por la presencia de varias masas, la intensidad del campo en un punto se obtiene aplicando el *principio de superposición*: se calcula la intensidad de campo debida a cada una de las masas sin tener en cuenta a las demás, sumando después todas las intensidades calculadas: $\vec{g} = \sum_{i=1}^{n}(-G.\frac{m_i}{r_i^2}.\vec{\mu}_r)$

Líneas de fuerza: El número de líneas de fuerza por unidad de superficie es proporcional a la intensidad del campo.

En un campo gravitatorio las líneas de fuerza indican la trayectoria que seguiría una partícula de masa cualquiera abandonada a la sola acción del campo, y por tanto su sentido será desde el infinito hasta la masa creadora.



7.3.- Energía potencial gravitatoria

"La energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa *m'* situado en un punto del campo a una distancia *r* de un cuerpo de masa *m*, coincide con el trabajo realizado, con signo menos, por la fuerza gravitatoria cuando *m'* se mueve desde el infinito hasta dicho punto". (Véase apartado 5) $Ep_r = -\int_{\infty}^{r} \vec{F} d\vec{r}$

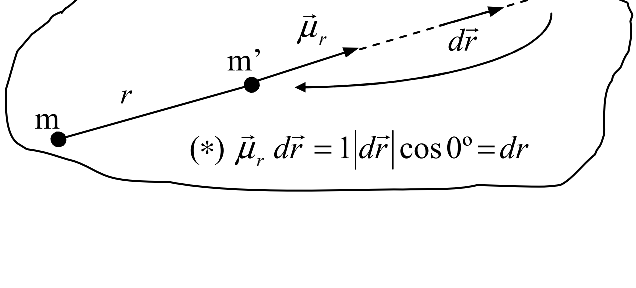
$$Ep_r = -\int_{\infty}^{r} \vec{F}\, d\vec{r} = -\int_{\infty}^{r} -G\frac{m\,m'}{r^2}\vec{\mu}_r\, d\vec{r} = G\,m\,m'\int_{\infty}^{r}\frac{1}{r^2}\vec{\mu}_r\, d\vec{r}\,(*) = G\,m\,m'\int_{\infty}^{r}\frac{dr}{r^2} =$$

$$= G\,m\,m'\left[-\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} = -\frac{G\,m\,m'}{r} \quad \text{Es decir, } \boxed{Ep_r = -G\frac{m\,m'}{r}}$$

- La energía potencial gravitatoria total de un conjunto de masas puede obtenerse aplicando la expresión anterior a cada par de masas y haciendo luego la suma total:

$$Ep = Ep_{12} + Ep_{13} + Ep_{23} + ... = -G(\frac{m_1 m_2}{r_{12}} + \frac{m_1 m_3}{r_{13}} + \frac{m_2 m_3}{r_{23}} + ...) = -G\Sigma(\frac{m_i m_j}{r_{ij}})$$

(*)



7.4.- Potencial gravitatorio. Superficies equipotenciales

"Potencial en un punto de un campo gravitatorio es la energía potencial por unidad de masa colocada en ese punto". $\boxed{V = \frac{Ep}{m'}}$. Se mide en J/kg ó m^2/s^2.

¿De qué depende V?

Al sustituir en $V = \frac{Ep}{m'}$ la energía potencial por su expresión $Ep_r = -G\frac{m\,m'}{r}$

obtenemos $V = \frac{-G\frac{m\,m'}{r}}{m'} \Rightarrow$ $\boxed{V = -G\frac{m}{r}}$

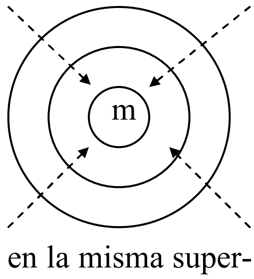
V depende de la masa creadora del campo y de la posición del punto considerado.

- Si el campo gravitatorio está creado por la presencia de varias masas, el potencial del campo en un punto se obtiene aplicando el *principio de superposición*: se calcula el potencial debido a cada una de las masas sin tener en cuenta a las demás, sumando después todos los potenciales calculados: $V = \sum_{i=1}^{n}(-G\frac{m_i}{r_i})$

- Según vimos (apartado 5), en un campo conservativo (como el gravitatorio) el trabajo para trasladar una partícula entre dos puntos A y B, se expresa como: $W_A^B = -\Delta Ep$
Teniendo en cuenta la definición de potencial gravitatorio, escribiremos:

$$W_A^B = -(Ep_B - Ep_A) = -(m'V_B - m'V_A) = -m'(V_B - V_A) = -m'\,\Delta V \qquad \boxed{W_A^B = -m'\Delta V}$$

"El trabajo realizado para trasladar una partícula de masa m' desde el punto A hasta el punto B es igual a menos el producto de dicha masa por la diferencia de potencial entre ambos puntos".



- Elegido un punto de referencia en el que $V = 0$, se calcula el potencial de los puntos del campo, y al unir puntos de igual potencial se obtienen las denominadas *superficies equipotenciales*, "lugares geométricos de los puntos del campo con igual potencial".

- Cuando una partícula se desplaza entre dos puntos A y B situados en la misma superficie equipotencial, tendremos $\Delta V = 0$, y el trabajo $W_A^B = -m'\,\Delta V = -m'.0 = 0$.

Al ser $W_A^B = \int_A^B \vec{F}d\vec{r} = 0$, se deduce que $\vec{F}$ y $d\vec{r}$ serán perpendiculares, es decir, "las superficies equipotenciales y las líneas de fuerza son perpendiculares entre sí".

- A partir de $\vec{F} = -\frac{dEp}{d\vec{r}}$ (apartado 5) podemos deducir:

$$\vec{F} = -\frac{dEp}{d\vec{r}} \Rightarrow m'\,\vec{g} = -\frac{d(m'V)}{d\vec{r}} = -\frac{m'\,dV}{d\vec{r}} \Rightarrow \vec{g} = -\frac{dV}{d\vec{r}}$$ (relación entre $\vec{g}$ y V)

8.- EL CAMPO GRAVITATORIO TERRESTRE

8.1.- Niveles de referencia para la energía potencial

- La energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa *m* situado a una distancia *r* del centro de la Tierra viene dada por: $Ep_r = -G\dfrac{Mm}{r}$, al asignar el valor cero de energía potencial en el infinito (apartado 4).

- Para cuerpos cercanos a la superficie terrestre ($r \cong R_T$), el valor cero de energía potencial se asigna a la posición del cuerpo en dicha superficie, de modo que la energía potencial de un cuerpo de masa *m* situado a una altura *h* sobre la superficie terrestre, se identifica con el trabajo para llevar dicha masa desde la superficie a esa altura *h*:

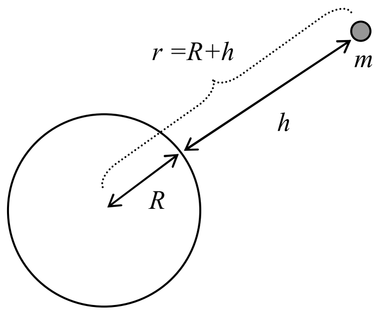
$$Ep_h = -\int_0^h \vec{F}d\vec{r} = -\int_0^h m\vec{g}d\vec{h} = -m\int_0^h |\vec{g}||d\vec{h}|\cos 180^{\circ} = m\int_0^h g dh = mg\int_0^h dh = mgh$$

El módulo de $\vec{g}$ se toma constante (9,8 m/s^2), en puntos cercanos a la superficie terrestre.

8.2.- Variación del módulo de $\vec{g}$ con la altura

A1 colocar un cuerpo de masa *m* a una distancia *r* del centro de la Tierra, estará sometido a la fuerza gravitatoria $\vec{F} = -G\dfrac{m.m'}{r^2}\vec{\mu}_r$

Considerando el módulo de esa fuerza:



$$mg = G\frac{Mm}{r^2} \Rightarrow \quad g = G\frac{M}{r^2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{A una distancia} \quad r = R \;..... \Rightarrow g_0 = G\frac{M}{R^2} \\ &\text{y a una distancia} \;\; r = R + h \Rightarrow g_h = G\frac{M}{(R+h)^2} \end{aligned}\right\}$$

dividiendo ambas ecuaciones resulta: $g_h = g_0\dfrac{R^2}{(R+h)^2}$

9.- MOVIMIENTO DE PLANETAS Y SATÉLITES

La teoría *geocéntrica* suponía que la Tierra era el centro del Universo, y todos los astros giraban alrededor de ella. Para explicar esta teoría, Ptolomeo de Alejandría, astrónomo del s. II, elaboró la teoría de los *epicicloides*, que consideraba a cada astro girando periódicamente en una órbita circular cuyo centro describe a su vez un círculo mayor alrededor de la Tierra, originando una trayectoria epicicloide. Esta teoría se desechó por la dificultad de su aplicación.

En el s. XVI, Nicolás Copérnico propuso la teoría *heliocéntrica* que colocaba el Sol en el centro del sistema planetario, con todos los planetas, incluida la Tierra, girando en torno a él. Esta teoría había sido propuesta por Aristarco en el s.III a.C.

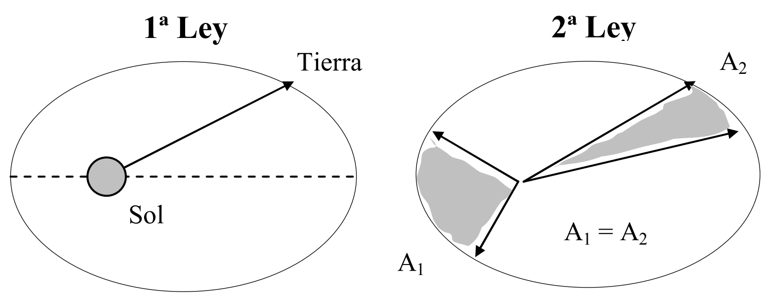
9.1.- Leyes de Kepler

A partir de las observaciones astronómicas hechas por Tycho Brahe, con datos muy precisos teniendo en cuenta que no disponía de telescopio alguno, Johannes Kepler encontró una serie de regularidades que plasmó en tres leyes:

1. Los planetas giran alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas, estando el Sol en uno de los focos.

2. El vector de posición de cualquier planeta respecto al Sol barre áreas iguales en tiempo iguales.

3. El cuadrado del período de rotación de un planeta en torno al Sol es proporcional al cubo de la distancia media del planeta al sol (semieje mayor de la elipse).



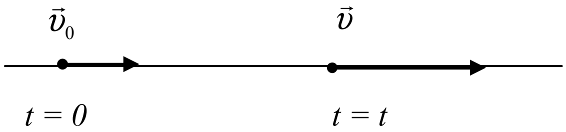
3ª Ley

$$T^2 = k \cdot r^3$$

9.2.- Momento lineal y momento angular

Sea una partícula de masa *m* que se desplaza con velocidad $\vec{v}$.

- Se llama ***momento lineal*** o *cantidad de movimiento de la partícula, al producto de su masa por su velocidad*: $\boxed{\vec{p} = m\,\vec{v}}$. Se mide en kg m/s



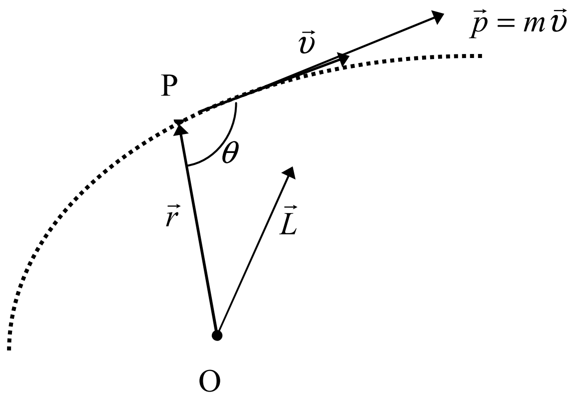
Si la partícula cambia de velocidad y sustituimos la aceleración $\vec{a} = \dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = \dfrac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t}$ en la 2ª ley de Newton, $\vec{F} = m\,\vec{a}$, se obtiene

$\vec{F} = m\,\dfrac{\vec{v} - \vec{v}_0}{\Delta t} \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{F}\Delta t = m\,(\vec{v} - \vec{v}_0)}$ "El impulso mecánico de una fuerza $\vec{F}\Delta t$, es igual a la variación del momento lineal $m(\vec{v} - \vec{v}_0)$"

- El *teorema de conservación del momento lineal* expresa que "en un sistema aislado (libre de fuerzas externas, $\vec{F} = 0$), el momento lineal permanece constante"

$$\vec{F}\Delta t = m(\vec{v} - \vec{v}_0)\;;\;\; 0 = m(\vec{v} - \vec{v}_0) \Rightarrow\; m\vec{v} = m\vec{v}_0 = cte$$

- Sea una partícula de masa *m* que se desplaza a largo de una trayectoria cualquiera. Si en un punto P tiene una velocidad $\vec{v}$, se llama ***momento angular*** *o momento cinético de la partícula con respecto a un punto O, al momento de su momento lineal*: $\boxed{\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p}}$, siendo $\vec{r}$ el vector de posición de la partícula respecto al punto O, y $\vec{p}$ su momento lineal. Se expresa en kg m^2 s^{-1}.



Veamos cómo varía el momento angular $\vec{L}$ con el tiempo:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} + \vec{r} \wedge \frac{d\vec{p}}{dt} \quad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{p} = \vec{v} \wedge m\vec{v} = 0 \\[2ex] \vec{r} \wedge \dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{r} \wedge m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \vec{r} \wedge m\vec{a} = \vec{r} \wedge \vec{F} = \vec{M} \end{array} \right\} \;\Rightarrow\; \boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}}$$

"La variación del momento angular de una partícula con el tiempo es igual al momento de la fuerza que actúa sobre la partícula".

- El *teorema de conservación del momento angular* expresa: "cuando el momento $\vec{M}$ que actúa sobre la partícula es nulo, el momento angular $\vec{L}$ permanece constante":

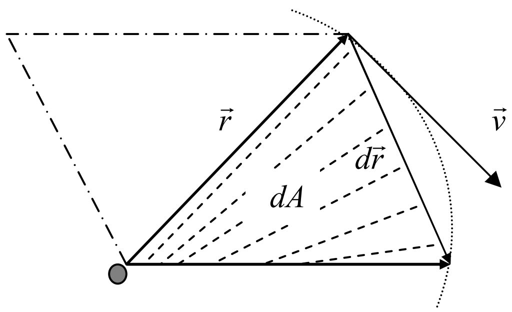
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = 0 \Rightarrow \vec{L} = cte$$

El momento $\vec{M}$ será nulo cuando lo sea la fuerza aplicada $\vec{F}$, o bien cuando $\vec{r}$ y $\vec{F}$ sean paralelos o de igual dirección. En el primer caso, la partícula tendrá un movimiento rectilíneo uniforme, y el segundo caso corresponde al movimiento de partículas sometidas a *fuerzas centrales*, como ocurre con el giro del electrón alrededor del núcleo atómico y en el movimiento de planetas y satélites.

En el caso de planetas y satélites girando en sus órbitas, al tratarse de cuerpos sometidos a *fuerzas centrales,* $\vec{r}$ y $\vec{F}$ tienen siempre igual dirección y por tanto $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = 0$, por lo que $\vec{L} = cte$.

- Veamos las consecuencias que para el movimiento de planetas y satélites tiene la constancia del momento angular y su relación con las leyes de Kepler.

a) La conservación de la *dirección* del vector $\vec{L}$ que es perpendicular al plano donde se sitúan $\vec{r}$ y $\vec{F}$, implica que la trayectoria del planeta o satélite debe permanecer siempre en un mismo plano.
b) La conservación del *sentido* del vector $\vec{L}$ implica que el planeta o satélite recorre la trayectoria siempre en el mismo sentido por lo que dicha trayectoria será una curva plana.
c) La conservación del *módulo* del vector $\vec{L}$ justifica la 2ª ley de Kepler



Sea dA el área barrida por el planeta en su órbita en un tiempo dt: $dA = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \wedge d\vec{r}\right|$

La velocidad areolar es: $\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}\right|$

Al multiplicar por la masa m: $\frac{dA}{dt} \cdot m = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \wedge \frac{d\vec{r}}{dt}\right| \cdot m = \frac{1}{2}\left|\vec{r} \wedge m\vec{v}\right| = \frac{1}{2}\left|\vec{L}\right| \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{\left|\vec{L}\right|}{2m}$,

y al ser constantes m y $\left|\vec{L}\right|$, también será constante la velocidad areolar $\frac{dA}{dt}$

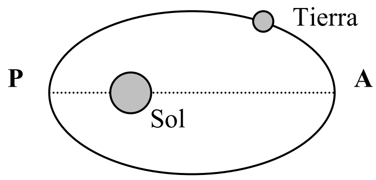
según expone la 2ª ley de Kepler: "El vector de posición de cualquier planeta respecto al Sol barre áreas iguales en tiempo iguales".

9.3.- Velocidad orbital. Período de rotación

Si aproximamos la órbita elíptica a una órbita circular, y tenemos en cuenta que la fuerza centrípeta se debe a la fuerza de atracción gravitatoria:

$$G\frac{Mm}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{GM}{r}}}$$ *Velocidad orbital* (1ª velocidad cósmica)

Como se deduce de su expresión, la velocidad orbital es mayor en el perihelio **P** (cerca del sol), que en el afelio **A** (lejos del sol).



El período de rotación lo podemos calcular a partir de la velocidad orbital teniendo en cuenta que $v = \omega r = \frac{2\pi}{T} r$. Por tanto: $\frac{2\pi}{T} r = \sqrt{\frac{GM}{r}} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} r^3$

Haciendo $\frac{4\pi^2}{GM} = k$, obtenemos $T^2 = k\,r^3$, que concuerda con la 3ª ley de Kepler.

9.4.- Energía total. Órbitas cerradas y abiertas

La energía total del planeta o satélite en la órbita será la suma de su energía cinética y potencial: $E_{Total} = Ec + Ep = \frac{1}{2} m v^2 + \left(-\frac{GMm}{r} \right)$

Si $E_{Total} \langle\ 0 \Rightarrow$ órbitas cerradas (circulares o elípticas)

- Trayectoria circular $\rightarrow E_{Total} = -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r}$
- Trayectoria elíptica $\rightarrow -\frac{1}{2}\frac{GMm}{r} \ \langle\ E_{Total} \ \langle\ 0$

Si $E_{Total} \geq 0 \Rightarrow$ órbitas abiertas (parabólicas o hiperbólicas)

- Trayectoria parabólica $\rightarrow E_{Total} = 0$

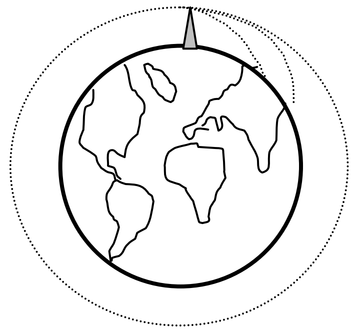
  El cuerpo escapa de la atracción gravitatoria, para lo que necesita una *velocidad de escape* (2ª velocidad cósmica):

  $$E_c + E_p = 0 \ ; \ \frac{1}{2} m v^2 = \frac{GMm}{r} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{2GM}{r}}}$$

- Trayectoria hiperbólica $\rightarrow E_{Total} \ \rangle\ 0$

  El cuerpo tendrá, en valor absoluto, mayor energía cinética que energía potencial, alejándose infinitamente.

9.5.- Satélites artificiales



Si desde una cierta altura se lanza horizontalmente un proyectil (satélite) con diferentes velocidades, tendremos diferentes trayectorias (Newton). A partir de cierta velocidad, conseguimos *poner el satélite en órbita*, lo cual significa que la atracción terrestre hace curvar la trayectoria inicial del satélite, de modo que éste cae continuamente sobre la Tierra sin chocar sobre ella. Igual puede decirse de la Luna que en su órbita *cae* de modo constante sobre la Tierra.

Los satélites artificiales se lanzan desde un cohete que los lleva a la altura requerida, recibiendo allí el impulso necesario para su puesta en órbita. Estas órbitas suelen ser elípticas, pero las suponemos circulares para facilitar su estudio.

La energía necesaria para poner en órbita un satélite es la que ha de recibir el cohete que lo lleva a cierta altura, más la energía comunicada al satélite para que describa la órbita.

Esa energía será igual a la diferencia entre la energía que tiene el satélite colocado en órbita, $-\frac{1}{2}\frac{G\,M\,m}{r}$, y la que tenía en la superficie de la Tierra, $-\frac{G\,M\,m}{R}$

$$\Delta E = -\frac{1}{2}\frac{G\,M\,m}{r} + \frac{G\,M\,m}{R} \quad \Rightarrow \Delta E = G\,M\,m\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{2r}\right)$$

9.6.- Datos del sistema planetario

- *Masa y densidad de la Tierra.-*

Un cuerpo de masa *m* sobre la superficie terrestre está sometido a una fuerza:

$$G\frac{M\,m}{R^2} = m\,g_0 \;\Rightarrow\; M = g_0\frac{R^2}{G} \;\cong 6.10^{24}\ kg$$ para la masa de la Tierra.

Y la densidad será: $\rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{{}^4\!/_3\,\pi.R^3} = 5{,}57.10^3\ kg/m^3 = 5{,}57\ g/cm^3$

La densidad media de las rocas superficiales es 2,7 g/cm^3, por lo que en las capas profundas de la Tierra deben estar acumulados los materiales más pesados (NiFe).

- *Masa del Sol.-*

A partir de la Ley de Gravitación Universal aplicada a la Tierra y el Sol:

$$G\frac{M_S\,M_T}{r^2} = M_T\,a_c = M_T\frac{v^2}{r} = M_T\,\omega^2\,r = M_T\frac{4\pi^2}{T^2}r \Rightarrow M_S = \frac{4\pi^2\,r^3}{G\,T^2}$$

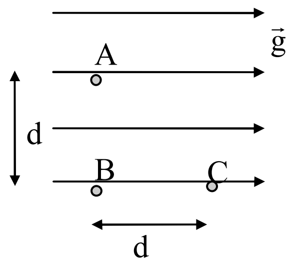
lo que da una masa de $1{,}96.10^{30}$ *kg*.

Cuestiones

C1.- a) Comparar las características más importantes de las interacciones gravitatoria, electromagnética y nuclear fuerte.
b) Explicar cuál o cuáles de dichas interacciones serían importantes en una reacción nuclear. ¿Por qué?

C2.- a) Escribir la ley de Gravitación Universal y explicar su significado físico.
b) Según la ley de Gravitación, la fuerza que ejerce la Tierra sobre un cuerpo es proporcional a la masa de éste. ¿Por qué no caen más deprisa los cuerpos con mayor masa?

C3.- En una región del espacio existe un campo gravitatorio uniforme de intensidad $\vec{g}$, representado en la figura por sus líneas de campo.
a) Razonar el valor del trabajo que se realiza al trasladar la unidad de masa desde el punto A al B y desde el B al C.
b) Analizar las analogías y diferencias entre el campo descrito y el campo gravitatorio terrestre



C4.- Demostrar, razonadamente, las siguientes afirmaciones:
a) A una órbita de radio *R* de un satélite le corresponde una velocidad orbital *v* característica.
b) La masa *M* de un planeta puede calcularse a partir de la masa *m* y del radio *R* de uno de sus satélites.

C5.- Suponiendo que la Tierra redujese su radio a la mitad manteniendo su masa.
a) ¿Aumentaría la intensidad del campo gravitatorio en su nueva superficie?
b) ¿Se modificaría sustancialmente su órbita alrededor del Sol?

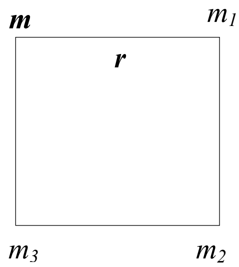
C6.- a) Explicar el concepto de velocidad de escape y deduzca razonadamente su expresión.
b) ¿Qué ocurriría en la realidad si lanzamos un cohete desde la superficie de la Tierra con una velocidad igual a la velocidad de escape?

Problemas

1.- En un punto de un campo de fuerzas se encuentra una partícula de 5 kg de masa sometida a una fuerza de 20 N.
a) ¿Cuánto vale la intensidad del campo en ese punto?
b) Si la energía potencial de la partícula en ese punto es de 50 J, ¿cuánto vale el potencial en dicho punto?

2.- Un cuerpo de masa $m = 10^{20}$ kg, fijo en un punto, está separado 2.000 km de otro cuerpo libre de masa $m' = 10^5$ kg.
a) ¿Qué fuerza actúa sobre m'?
b) ¿Cuál es el valor de la intensidad de campo en el lugar ocupado por m'?
c) ¿Qué trabajo se realizará para separar m' una distancia de 10 m respecto a m?
d) ¿Y para acercarla esa distancia?
e) ¿Quién realiza esos trabajos?

3.- Sean dos objetos de masas $m_1 = 800$ kg y $m_2 = 600$ kg, alineados en horizontal y separados 0,25 m entre sí.
a) ¿Cuál es la intensidad del campo gravitatorio creado por dichos objetos en un punto situado por debajo de la horizontal, a 0,2 m de m_1 y 0,15 m de m_2?
b) ¿Cuál es el potencial gravitatorio en ese punto?



4.- En el cuadrado de la figura, hallar la aceleración de la partícula de masa m por la acción de las otras tres ($m_1 = m_2 = m_3$).

5.- En el ejemplo anterior, hallar el potencial gravitatorio en el vértice ocupado por la partícula de masa m, y su energía potencial.

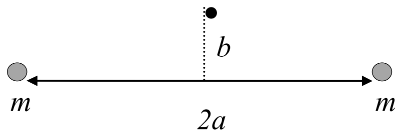
6.- Un objeto de 100 kg está en el origen de coordenadas; otro de 1.000 kg en el punto (2,2) m, y un tercer objeto de 500 kg en el punto (-3,2) m. Hallar la energía potencial gravitatoria del sistema.

7.- Tres cuerpos iguales de 1 kg cada uno, se encuentran situados en los vértices de un triángulo equilátero de 10 cm de lado. Calcular:
a) La fuerza total sobre cada cuerpo a causa de las interacciones con los otros dos.
b) El valor del campo y del potencial gravitatorio en el centro del triángulo.

8.- Dos cuerpos de masas iguales de 6,4 kg están fijos en los puntos (-8,0) cm y (8,0) cm. Un tercer cuerpo de 100 g de masa se suelta desde el punto (0,6) cm.
a) ¿Qué aceleración tendrá la masa móvil en los puntos A(0,6) cm y B(0,0) cm?
b) ¿Cuál será la velocidad de dicha masa al pasar por el punto B?

9.- En cada uno de los vértices de un cuadrado de 1 m de lado, se sitúa un cuerpo de 2 kg de masa. Calcular:
a) La fuerza total sobre cada cuerpo.
b) La intensidad del campo gravitatorio en la mitad de cada uno de los lados.
c) El potencial gravitatorio en el centro del cuadrado.

10.- Calcular el campo gravitatorio en un punto situado a una distancia *b* sobre la vertical del punto medio entre las dos partículas de igual masa de la figura.



11.- En sendos campos de fuerzas conservativos, la energía potencial de una partícula en función de su abscisa *x* viene dada en el S.I. por: 1) Ep = -10x + 5; 2) Ep = 2x - x^2.

a) Calcular la fuerza que actúa en cada caso. ¿Cómo se denomina el campo 1)?
b) Representar gráficamente el valor de la energía potencial y de la fuerza que actúa en función de *x*.
c) Determinar el punto o puntos de equilibrio.

12.- Encontrar la expresión de la energía potencial en los casos siguientes:

a) En un campo de fuerzas conservativo, la fuerza que actúa sobre una partícula que se mueve a lo largo del eje OX viene dada por: F(x) = - 2x + $3x^2$ (S.I.).
b) Un muelle está sometido a una fuerza F = -k.x

13.- El potencial de un campo conservativo viene dado por $V = \frac{K}{2}\left(x^2 + y^2\right)$, (K = cte)

a) Deducir la expresión del campo $\vec{E}$.
b) Representar las líneas equipotenciales y las líneas de fuerza.
c) Calcular el trabajo necesario para trasladar una partícula de masa *m* de un punto A del campo a otro punto B.

14.- ¿A qué altura sobre la Tierra "g" valdrá la mitad que en su superficie?

15.- Las masas de la Tierra y la Luna son entre sí como 81 a 1. Calcular a qué distancia de la Tierra debe colocarse un cuerpo para que sea atraído por igual por los dos astros. La distancia de la Tierra a la Luna es 60 veces el radio de la Tierra.

16.- ¿Con qué fuerza se atraen dos bolas de cobre que están en contacto mutuo, si sus respectivos radios son 4 y 6 cm? (Densidad del cobre = 8,6 g/cm^3).

17.- Si la Luna tiene un diámetro 3,66 veces menor que la Tierra, y la masa lunar es 81 veces menor que la terrestre, calcular la aceleración gravitatoria en la superficie lunar.

18.- Una partícula de 2 kg de masa se mueve con velocidad $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j}$ m/s cuando pasa por el punto (1,-2,1). Calcular:

a) El momento lineal.
b) El momento angular respecto al origen de coordenadas.

19.- Una partícula de masa *m* gira con velocidad *v* en una circunferencia de radio *r*. Deducir una expresión para calcular el momento angular de la partícula con respecto al centro de la circunferencia.

20.- Cuando la Tierra en su órbita alrededor del Sol pasa por el afelio tiene una velocidad de 30 km/s y está separada del Sol $1,52.10^8$ km. Calcular la velocidad de la Tierra cuando pasa por el perihelio, punto situado a $1,47.10^8$ km del Sol.

21.- La Luna gira a 384.400 km de la Tierra dando una vuelta en 27,32 días.
a) Calcular la masa de la Tierra a partir de esos datos.
b) ¿A qué velocidad gira la Luna alrededor de la Tierra?

22.- La distancia media de la Tierra al Sol es de 149,6 millones de kilómetros, y del Sol a Marte 223,9 millones de kilómetros.
a) ¿Cuántos días tarda Marte en describir su órbita alrededor del Sol?
b) ¿Cuál es la masa del Sol?

23.- ¿A qué altura sobre el plano del ecuador terrestre, ha de colocarse un satélite artificial de masa m para que permanezca fijo sobre un punto determinado de la Tierra (satélite geoestacionario). ¿Cuál será su velocidad orbital?

24.- Un proyectil de 1.000 kg se dispara perpendicularmente hacia arriba desde la superficie terrestre con velocidad inicial de 5.000 m/s. ¿Qué altura alcanzará?

25.- Calcular el trabajo mínimo necesario pare elevar un cohete de masa m desde la superficie de un planeta de radio R y masa M hasta un punto situado a una distancia r del centro del planeta.

26.- Desde una altura igual al radio terrestre se lanza hacia la Tierra un cuerpo a la velocidad de 40 m/s. Se desprecian las fuerzas de rozamiento en la atmósfera.
a) ¿Con qué velocidad llega a la superficie?
b) ¿Y si se deja caer a partir del reposo desde la altura indicada?

27.- La masa de Júpiter es 318 veces la de la Tierra, y su diámetro es 11 veces el de la Tierra. Calcular:
a) El peso en Júpiter de un astronauta que en la Tierra pesa 700 N.
b) La masa del astronauta en Júpiter.
c) La relación entre las energías potenciales del astronauta en la superficie de Júpiter y en la de la Tierra.

28.- Si la Luna tiene $7{,}35.10^{22}$ kg de masa, y 1.741 km de radio, calcular:
a) La distancia que recorrerá un cuerpo en 5 s en caída libre hacia la Luna, si se abandona en un punto próximo a la superficie lunar.
b) El peso de un hombre en la Luna, si en la Tierra pesa 80 kp.

29.- Un astronauta que aterriza en un planeta de radio doble que el de la Tierra, experimenta con un péndulo de 1 m de longitud y obtiene un período de 2,5 s.
a) ¿Cuál es la masa del planeta?
b) ¿Cuál es la velocidad de escape en ese planeta?

30.- Un satélite de 250 kg está en órbita a una altura de 500 km sobre la Tierra.
a) ¿Cuál es su velocidad orbital?
b) ¿Cuánto tiempo invierte en dar una vuelta alrededor de la Tierra?
c) ¿Cuál es la energía cinética y la energía potencial de ese satélite?
d) ¿Qué energía fue necesaria para poner al satélite en órbita?

Soluciones

1. a) 4 N/kg b) 10 J/kg
2. a) 166,75 N b) $1,6675.10^{-3}$ N/kg c) -1.667,5 J (agente externo) d) 1.667,5 J (campo)
3. a) $2,223.10^{-6}\ \vec{j}$ N/kg b) $-5,336.10^{-7}$ J/kg
4. $1,35Gm/r^2.(\vec{i}-\vec{j})$ m/s^2
5. a) $-2,707Gm_1/r$ J/kg b) $-2,707Gm_1m/r$ J
6. -10^{-5} J
7. a) $\vec{F}_1 = -1,155.10^{-8}\ \vec{j}$ N; $\vec{F}_2 = 10^{-8}(\vec{i} + 0,58\ \vec{j})$N; $\vec{F}_3 = 10^{-8}(-\vec{i} + 0,58\ \vec{j})$N
   b) 0 c) $-3,466.10^{-9}$ J/kg
8. a) $\vec{g}_A = -5,122.10^{-8}\ \vec{j}$ m/s^2; $\vec{g}_B = 0$ b) $6,533.10^{-5}$ m/s
9. a) $\vec{F}_1 = 3,611.10^{-10}(\vec{i}-\vec{j})$N; $\vec{F}_2 = 3,611.10^{-10}(-\vec{i}-\vec{j})$N
   $\vec{F}_3 = 3,611.10^{-10}(-\vec{i}+\vec{j})$N; $\vec{F}_4 = 3,611.10^{-10}(\vec{i}+\vec{j})$N
   b) $\vec{g}_a = -1,908.10^{-10}\ \vec{j}$ N/kg; $\vec{g}_b = -1,908.10^{-10}\ \vec{i}$ N/kg
   $\vec{g}_c = 1,908.10^{-10}\ \vec{j}$ N/kg; $\vec{g}_d = 1,908.10^{-10}\ \vec{i}$ N/kg
   c) $-7,546.10^{-10}$ J/kg
10. $-2Gm\dfrac{b}{(a^2+b^2)^{3/2}}\ \vec{j}$ N/kg
11. a) F_1=10 N (campo uniforme); F_2=(2x-2) N c) x =1 m
12. a) Ep = $(x^2 - x^3)$ J b) Ep = $1/2k\ x^2$ J
13. a) $\vec{E} = -k(x\vec{i} + y\vec{j})$ c) $W_A^B = m\dfrac{k}{2}\left[\left(x_A^2 - x_B^2\right) + \left(y_A^2 - y_B^2\right)\right]$
14. 2.639 km
15. 54 R_T (344.034 km)
16. 7,48 nN
17. 1,62 m/s^2
18. a) $4\vec{i} + 2\vec{j}$ kg m/s b) $-2\vec{i} + 4\vec{j} + 10\vec{k}$ kg m^2 s^{-1}
19. *m.v.r*
20. 31,02 km/s
21. $6,03.10^{24}$ kg b) 1023,2 m/s
22. a) 668 días b) $1,99.10^{30}$ kg
23. 35.879 km; 3.072,5 m/s
24. 1.589,4 km
25. $W = GMm\left(\dfrac{1}{R} - \dfrac{1}{r}\right)$
26. a) 7912 m/s b) igual
27. a) 1.840 N b) 71,4 kg c) 29
28. a) 20,25 m b) 13,22 kp
29. a) $1,53.10^{25}$ kg b) 12,7 km/s
30. a) 7619 m/s b) 1 h 34 min 26 s c) $7,26.10^9$ J; $-1,45.10^{10}$ J d) $8,41.10^9$ J