

Centro Nacional de Investigaciones Científicas.

Centro de Neurociencias de Cuba.

**Iteraciones de Desglose para la Aproximación
Robusta de Soluciones Mínimo-Cuadráticas Lineales
en Dimensiones Finitas.**

Tesis en opción al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Aspirante: Lic. Felipe Martí López.

Ciudad de La Habana
2003.

Agradecimientos.

Esta tesis fue escrita circunstancialmente bajo las reglas de la llamada modalidad “libre” y sin tutor y las ideas y experiencias que originaron el trabajo que la sustenta se remontan a la segunda mitad de los '80. Así, quizás más que en el caso de la tesis de cualquier otro autor, los resultados que en ella presentamos son también el fruto del esfuerzo -plural y no pocas veces anónimo- de muchas otras personas. Por ende, deseo expresar explícitamente aquí mi agradecimiento más sincero al menos a:

Los profesores Dr. Alfredo N. Iusem y Dr. Carlos G. Tamm, del Instituto de Matemáticas Puras y Aplicadas (IMPA) de Río de Janeiro; a los profesores Dr. José M. Martínez, Dr. Ronaldo Días y Dr. Álvaro R. de Pierro de la Universidad Estadual de Campinas (UNICAMP) y al profesor Dr. Yuan Jin-Yun de la Universidad Estadual de Paraná, todos de Brasil; por su invaluable apoyo profesional y humano.

El profesor Dr. Thomas Koenig, de la Universidad Hospital de Siquiatría Clínica de Berna, y su esposa la Dra. Brigit, ambos de Suiza, por su ayuda generosa y sincera y su calor fraternal.

El Dr. Richard Greenblatt, Presidente de Source Signal Imaging Inc. de San Diego, California, Estados Unidos de América, por su invaluable apoyo profesional y su precioso tiempo.

Los profesores Dr. Josef Stoer, del Instituto de Matemáticas Aplicadas de la Universidad Técnica de Wuerzburg, y Dr Roland Bulirsch, de la Universidad Técnica de Munich, ambos de Alemania, por su invaluable apoyo profesional, su precioso tiempo y la oportuna donación altruísta de su excelente libro.

El profesor Dr. Vyacheslav Kalashnikov, del Instituto Tecnológico Superior de Monterrey, México; y el profesor Dr. Juan A. Gómez de la Universidad de la Frontera, Chile; por su invaluable apoyo profesional y su amistad.

Los profesores Dr. Juan C. Jiménez, Dr. Alberto Aguado, Dra. Valia Guerra, Dra. Longina Castellanos, Dr. Ángel Pérez y Dra. Victoria Hernández; y Lic. Félix Carbonell, todos del Instituto de Cibernética, Matemáticas y Física (ICIMAF); la profesora Dra. Lilliam Alvarez, del Ministerio de Ciencia, Tecnología y Medio-Ambiente (CITMA); los profesores Dr. Rolando Biscay y Dra Aymée Marrero, ambos de la Universidad de La Habana; la profesora Dra Rosina Hing, de la Universidad Central de Las Villas; así como también los profesores Dra. Alma Armisen, Dra. Lídice Galán y Dra. Vivian Martín; los investigadores Lic. Lester Melie y Lic. Eduardo Martínez y el colega Lic. Isidro Abelló del Centro de Neurociencias de Cuba (CNC), por su crucial ayuda profesional y humana.

Todos los colegas profesores que actuaron como oponentes y miembros de tribunal en la Pre-Defensa y Defensa de esta tesis.

Los profesores Dr. Manuel Lazo, director de ICIMAF, y Dr. Mitchell Valdés, director de CNC, por su valioso tiempo, comprensión y cooperación.

Yanely Acosta, sencilla y sinceramente, por la inspiración.

Mamá Oneida (Oneida Pérez), Maritza Sierra, Zoila Menéndez y Rafaela Pérez por su comprensión maternal.

Los que creyeron en mí, por hacerlo: sus sugerencias y críticas fueron, sencillamente, decisivas.

Los que no creyeron, también, por el desafío y el acicate.

Iteraciones de Desglose para la Aproximación Robusta de Soluciones Mínimo -Cuadráticas Lineales en II
Dimensiones Finitas. Felipe Martí López.

En fin, todos los que me ayudaron y apoyaron sin regateos ni escatimaciones; sobretodo aquellos, los de los momentos más difíciles.

Dedicatoria.

A la memoria del Dr. Ernesto Guevara de la Serna, por su verdadera búsqueda de la Verdad; a la del Profesor Dr. Celiar Silva Rehermann, uno de aquellos fundadores de la gran quimera de la Investigación Matemática cubana, por el legado de su magisterio y sus excelentes libros; a la del Lic. Luis Sastre Vidal, colega y antiguo condiscípulo de Preuniversitario, y a la de mi padre, el Ingeniero Luis Martí Munilla, por iniciarme en los secretos de la poesía de las Matemáticas.

A Lea y Anja Koenig y a mis sobrinos, Luis, Tamara, Hevelín, Gabriella y Michelle, por la certeza de un futuro mejor.

A mis hermanos Luis y Hevelín, por estar siempre ahí, con la palabra y el hecho; y al Dr. Tupac Pinilla y al ex-boxeador –pero incansable luchador- Alexis García, por su amistad y su ejemplo.

Finalmente, deseo patentizar modestamente, a través de mi tesis, un merecidísimo homenaje póstumo al Profesor Dr. Jacques Hadamard, por toda su obra genial y su valentía inaquilatable.

“...Pero vale la canción buena tormenta
y la compañía vale soledad,
siempre vale la agonía de la prisa,
aunque se llene de sillas la Verdad.”

Silvio Rodríguez, “Historia de las Sillas”.

Síntesis de la tesis.

En esta tesis fundamentamos un enfoque de optimización jerárquica en la aproximación numericamente robusta de soluciones de problemas de Mínimos Cuadrados lineales en dimensiones finitas sin restricciones con datos arbitrarios –el Problema General-, basado en las propiedades de convergencia global, aproximantes y de continuidad respecto a los datos en cada paso finito de las iteraciones estacionarias lineales de desglose para la solución de los sistemas normales de ecuaciones asociados a esos problemas.

Todos los resultados posibilitan una aproximación suficientemente precisa y robusta de las soluciones del Problema General sin necesidad alguna de evaluación heurística de la condicionalidad de cada problema original.

La eficacia de los resultados teóricos obtenidos es primeramente validada experimentalmente mediante simulación digital con ruido en la rehabilitación de un conocido método general de descomposición digital de señales, atractivamente sencillo, pero con serias limitaciones técnicas vinculadas con la hipersensitividad de las soluciones, y, después, demostrada mediante la aplicación de una variante multilineal de ese método a la descomposición tiempo-frecuencia topográfica de electroencefalogramas multicanales humanos de la vida real.

INDICE.

	Pag.
INTRODUCCIÓN.....	1
1. ITERACIONES ESTACIONARIAS LINEALES PARA LA APROXIMACIÓN DE SOLUCIONES DEL PROBLEMA GENERAL DE MÍNIMOS CUADRADOS LINEALES EN DIMENSIONES FINITAS SIN RESTRICCIONES.....	9
1.1. Sumario del capítulo.....	9
1.2. Generalidades.....	9
1.3. Iteraciones estacionarias lineales para la solución de problemas de Mínimos Cuadrados lineales en dimensiones finitas sin restricciones.....	16
1.4. Iteraciones estacionarias lineales de desglose para la solución de problemas de Mínimos Cuadrados lineales en dimensiones finitas sin restricciones.....	19
2. ITERACIONES DE DESGLOSE APROXIMANTE PARA LA APROXIMACIÓN DE SOLUCIONES DEL PROBLEMA GENERAL DE MÍNIMOS CUADRADOS LINEALES EN DIMENSIONES FINITAS SIN RESTRICCIONES.....	22
2.1. Sumario del capítulo.....	22
2.2. Las iteraciones de desglose aproximante como clase especial de iteraciones de desglose globalmente convergentes.....	22
2.3. Propiedades aproximantes de las iteraciones de desglose aproximante. La pseudoiteratividad.....	25
2.4. Criterios de parada de las iteraciones de desglose aproximante. Selección de la matriz de desglose aproximante y del iterado inicial.....	26
2.5. Casos especiales notables de iteraciones de desglose aproximante.....	29
2.6. Teoremario del capítulo.....	30
3. SEUDOITERACIONES DE DESGLOSE APROXIMANTE EN LA APROXIMACIÓN ROBUSTA DE SOLUCIONES DEL PROBLEMA GENERAL DE MÍNIMOS CUADRADOS LINEALES EN DIMENSIONES FINITAS SIN RESTRICCIONES.....	53
3.1. Sumario del capítulo.....	53
3.2. Las pseudoiteraciones de desglose aproximante como aplicaciones paramétricas continuas de $\mathbf{R}^{m \times n} \times \mathbf{R}^m$ en \mathbf{R}^n	53
3.3. Las pseudoiteraciones de desglose aproximante y la pseudoiteratividad de las iteraciones de desglose aproximante.....	55
3.4. Casos especiales notables de pseudoiteraciones de desglose aproximante.....	59
3.5. Proposición heurística para la determinación del número de pseudoiterados de desglose aproximante.....	60
3.6. Comentario complementario final.....	63
3.7. Teoremario del capítulo.....	65
4. VALIDACIÓN EXPERIMENTAL DE LAS SEUDOITERACIONES DE DESGLOSE APROXIMANTE.....	80
4.1. Sumario del capítulo.....	80
4.2. El Método Aproximante de las Componentes (MADC).....	80
4.2.1. Discusión.....	80
4.2.2. Un esquema básico del algoritmo de MADC.....	85
4.2.3. Comparación de robustez MADC vs MDC.....	86
4.3. Descomposición tiempo-frecuencia topográfica de electroencefalogramas (EEG) multicanales espontáneos.....	92
4.3.1. Discusión.....	92
4.3.2. Distribución espacial suavizada en combinaciones lineales de componentes de mejor ajuste al EEG multicanal vía MADC.....	93
CONCLUSIONES.....	98
RECOMENDACIONES.....	100
REFERENCIAS.....	101
ANEXO 1. CONVENIO DE SÍMBOLOS Y NOTACIÓN.....	i

Iteraciones de Desglose para la Aproximación Robusta de Soluciones Mínimo -Cuadráticas Lineales en VII
Dimensiones Finitas. Felipe Martí López.

ANEXO 2. PAQUETE DE PROGRAMAS “APPROXKIT”iv

INTRODUCCIÓN.

Actualidad de la tesis.

Es verdaderamente difícil concebir algún área importante de la Ciencia y de la Tecnología contemporáneas en cuyas bases matemáticas no tengan su parte fundamental los Mínimos Cuadrados¹ lineales en dimensiones finitas sin restricciones [6], o imaginar algún momento de procesamiento de datos experimentales o de la realidad en la cotidianidad investigativa de la Ciencia y de la Tecnología de avanzada, donde no jueguen un papel utilitario imprescindible sus aplicaciones.

Pero el desarrollo en este antiguo y trabajado tema no parece estancarse -ni mucho menos- en los últimos años: se constata un creciente interés en el planteamiento y solución numérica de problemas de ecuaciones lineales en operadores funcionales mal-planteados y rígidos discretizados [15, 21, 23, 24, 37, 38, 40, 41, 50, 55] como problemas de Mínimos Cuadrados lineales en dimensiones finitas sin restricciones, donde la solución pseudoinversa no es recomendable por la excesiva sensibilidad a perturbaciones de los datos del problema², causada por la no continuidad [47] de su dependencia de esos datos; es decir, por su no robustez numérica; [6, 15, 18, 21, 24, 48].

Así, han adquirido una actualidad especial los problemas vinculados a las investigaciones de geo- y helio-sismología inversas, a las de procesamiento digital de señales o de imágenes y a las de la descomposición digital de señales bio-eléctricas; particularmente, de aquellas que surgen en investigaciones no-invasivas del cerebro, tales como el problema inverso de la tomografía eléctrica, magnética, óptica, etc. y la diversidad de estudios de descomposición tiempo-frecuencia topográfica de electroencefalogramas espontáneos [7, 11-13, 15, 21, 24, 26, 27, 40-43, 48, 49, 51, 56].

Toda vez que los cálculos para la solución numérica de tales problemas son realizados usualmente en precisión finita y esos problemas son, como regla, de gran escala, con datos

¹ La paternidad sobre Mínimos Cuadrados corresponde al eminente matemático alemán Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855), cuyos elementos aparecen por primera vez en "Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae" (1823) y su suplemento (1828), publicados en Copenhagen, Dinamarca.

² En esta tesis, consideraremos como datos del problema no solamente el vector de términos libres, sino también la matriz del problema.

arbitrarios y con matrices no necesariamente bien-condicionadas, la causa del interés y actualidad reside, no solamente ya en la búsqueda de velocidad y eficiencia mayores en esos cálculos, sino también en la búsqueda de precisión, robustez y comportamiento numéricos mejores en las fórmulas de los métodos matemáticos mediante las cuales son ejecutados esos cálculos [5, 6, 10, 13, 15, 17, 18, 21, 23, 24, 38, 39, 40, 48, 49, 56].

En ese sentido, son de particular actualidad los resultados en la aproximación numérica robusta de soluciones de problemas mal-condicionados a partir de datos “ruidosos” [15, 21, 23, 24, 40], mediante las iteraciones de Landweber y las múltiples variantes y versiones de la fórmula de la Regularización de Tikhonov, reportadas en la bibliografía [13, 15, 21, 24, 38-41, 49].

Dentro de esa teoría, deben ser destacados los resultados obtenidos hasta hoy, relacionados con las iteraciones estacionarias lineales de desglose [5, 10, 22, 48] para la solución de sistemas de ecuaciones lineales con matriz semidefinida positiva, aplicables a la solución de los sistemas de ecuaciones normales asociados al Problema General de Mínimos Cuadrados lineales en dimensiones finitas sin restricciones [6, 10, 22, 48]; en particular, por su connotación aproximante entre otros, aquellos resultados recientes [10], concernientes a la demostración de condiciones suficientes para:

- la convergencia global³ de tales iteraciones a alguna solución del Problema General.
- la convergencia local⁴ de cada una de tales iteraciones a la solución existente y única de un cierto problema de Mínimos Cuadrados lineales del tipo “goal-attainment” definido positivo a dos niveles, asociado al Problema General.

No obstante, a pesar del progreso alcanzado, aún restan por esclarecer aspectos teóricos esenciales y por responder no pocas preguntas prácticas cruciales, tales como:

- ¿Es posible construir fórmulas para la aproximación numérica de soluciones del Problema General tales que las soluciones aproximadas sean, a la vez, suficientemente precisas y robustas numericamente sin necesidad alguna de evaluación heurística de la siempre ambigua condicionalidad de cada problema original⁵?

³ Convergencia desde cualquier iterado inicial en el espacio de definición de las iteraciones [5, 18, 48].

⁴ Convergencia desde cualquier iterado inicial en un subconjunto estricto del espacio de definición de las iteraciones [5, 18, 48].

⁵ Más allá del hecho de la inestabilidad numérica del cálculo de números de condición de matrices según su definición, nos referimos aquí al de la no existencia de valor numérico alguno

- ¿Cuál de las infinitas soluciones del Problema General es el límite de cada iteración de desglose globalmente convergente obtenida del sistema de ecuaciones normales asociado?.
- ¿Cuál es el orden de convergencia de esas iteraciones en tal caso?.
- ¿Cuáles son las condiciones para que todo iterado de paso finito dependa continuamente [47] de los datos en tal caso?.

Objetivos de la tesis.

1. Definir una nueva clase de iteraciones estacionarias lineales de desglose globalmente convergentes para la solución del Problema General tales que, con sus iterados, aporten soluciones aproximadas suficientemente precisas, robustas y estables numéricamente, sin necesidad alguna de evaluación heurística de la condicionalidad de cada problema original.
2. Determinar la solución del Problema General, que es el límite de cada iteración de la nueva clase; así como demostrar sus demás propiedades de convergencia, aproximantes y otras asintóticas de interés.
3. Definir una nueva clase de fórmulas de cálculo directo para la aproximación robusta de soluciones del Problema General, basadas, a su vez, en la de la clase de iteraciones a definir en el objetivo 1.
4. Validar -mediante simulación digital con ruido- la eficacia de las fórmulas para aproximación de la clase a definir en el objetivo 3 en la solución de algún problema clásico de procesamiento digital de señales, afín al Problema General, donde la solución pseudoinversa resulte demasiado sensitiva a las perturbaciones de los datos.
5. Demostrar la eficacia de las fórmulas para aproximación de la clase a definir en el objetivo 3 mediante su aplicación experimental a la solución de algún problema de actualidad en procesamiento digital de señales de electroencefalogramas (EEG) humanos reales, afín al Problema General.

Sinopsis de la tesis.

o intervalo de ellos para discernir objetiva y claramente si una matriz es bien- o mal-condicionada [5, 18, 48].

Con una extensión de 105 páginas, la tesis está organizada en 8 partes: la Introducción, los Capítulos del 1 al 4, las Conclusiones, las Recomendaciones y, finalmente, dos anexos; uno con el convenio de notación y símbolos y el otro con una breve descripción de un paquete de programas, relacionado con el contenido de la tesis.

En el Capítulo 1 “Iteraciones estacionarias lineales para la aproximación robusta de soluciones del Problema General de Mínimos Cuadrados lineales en dimensiones finitas sin restricciones”, resumizamos los resultados de la revisión bibliográfica sobre esas iteraciones con el propósito de conocer el “Estado del Arte” de las iteraciones de desglose para la aproximación robusta de soluciones del Problema General.

En el Capítulo 2 “Iteraciones de desglose aproximante para la solución del Problema General de Mínimos Cuadrados lineales en dimensiones finitas sin restricciones”, definimos una nueva clase especial de iteraciones estacionarias lineales de desglose para la solución de los sistemas de ecuaciones normales, asociados al Problema General, que denominamos “Iteraciones de Desglose Aproximante”; e investigamos las propiedades de convergencia local y global, aproximantes y otras asintóticas de interés.

En el Capítulo 3 “Seudoiteraciones de desglose aproximante en la aproximación robusta de soluciones del Problema General de Mínimos Cuadrados lineales en dimensiones finitas sin restricciones”, sobre la base de los resultados del capítulo anterior, son introducidas las pseudoiteraciones de desglose aproximante como aplicaciones continuas [47] entre ciertas estructuras espaciales; que sirven de fundamento para la definición de una nueva clase de fórmulas de cálculo directo para la aproximación robusta de soluciones del Problema General del mismo nombre. Adicionalmente, es argumentada una proposición heurística orientada a un compromiso entre precisión y estabilidad numéricas de los aproximados calculados por las fórmulas de la nueva clase.

Finalmente, en el Capítulo 4 “Validación experimental de las Seudoiteraciones de Desglose Aproximante”, la eficacia de las pseudoiteraciones de desglose aproximante es validada en la solución de un problema clásico de procesamiento digital de señales, donde la solución pseudoinversa del Problema General resulta demasiado sensitiva a las perturbaciones de los datos. La validación es realizada en dos etapas. La primera etapa consiste en el desarrollo del “Método Aproximante de las Componentes” (MADC), como variante robusta del conocido Método de las Componentes (MDC) [9, 11, 32] y la evaluación comparativa simultánea de ambos métodos mediante simulaciones digitales con ruido. La segunda etapa consiste en la utilización

de una versión multilineal de MADC en la descomposición tiempo-frecuencia topográfica de electroencefalogramas (EEG) multicanales humanos reales [12].

El contenido de la tesis está fundamentado en 8 definiciones y las demostraciones de 2 lemas, 9 teoremas y 4 corolarios; y es expuesto en una redacción concisa, aunque ilustrada mediante 13 figuras y una tabla de resultados experimentales. El contenido de la tesis ha sido publicado en los últimos 4 años en 4 artículos de revistas internacionales con arbitraje anónimo y ha sido presentado publicamente en 6 eventos internacionales en los últimos 6 años.

Novedad de la tesis.

En esta tesis, son definidas las Iteraciones de Desglose Aproximante (Definición 2, fórmula (17)) como una nueva clase de iteraciones estacionarias lineales globalmente convergentes para la solución del Problema General, subclase especial de iteraciones de desglose (Teorema 1) y también subclase especial de iteraciones de Aproximaciones Sucesivas [34].

Son demostradas por primera vez las siguientes propiedades de convergencia global, aproximantes y otras asintóticas especiales de toda iteración de desglose aproximante (Teorema 2, figura 2) [34]:

- Cada iterado de desglose aproximante puede ser obtenido pseudoiterativamente; es decir, mediante una fórmula de cálculo directo a partir de los datos y parámetros.
- Toda sucesión de iterados de desglose aproximante posee como límite de convergencia global la solución única del problema de Mínimos Cuadrados lineales del tipo “goal-attainment” definido positivo a dos niveles, asociado a su problema original.
- Toda sucesión de iterados de desglose aproximante se acerca estrictamente a su límite global.
- El orden de convergencia global de toda iteración de desglose aproximante es lineal.
- Toda sucesión de iterados de desglose aproximante se acerca a su límite global con una velocidad exponencial.

Sobre la base de la propiedad de pseudoiteratividad y de las propiedades aproximantes de las iteraciones de desglose aproximante demostradas son definidas por primera vez las

seudoiteraciones de desglose aproximante como aplicaciones entre ciertas estructuras espaciales (Definición 5 y Teorema 6), cuya propiedad de continuidad respecto a los valores singulares de la matriz $A(\sqrt{V})^{-1}$ es consecuentemente demostrada también por primera vez (Teorema 7) y cuya fórmula general sirve así de fundamento para una nueva clase de fórmulas de cálculo directo para la aproximación robusta de soluciones del Problema General (fórmula (22)) [35].

Por primera vez, es formulada y argumentada heurísticamente una proposición para la determinación del número de pseudoiterados de desglose aproximante, como un criterio a priori de parada de las iteraciones de desglose aproximante, orientado a un compromiso entre precisión y estabilidad numéricas de los iterados (fórmula (25)) [35].

Todos los resultados mencionados están concebidos para posibilitar una aproximación suficientemente precisa y robusta de las soluciones del Problema General, por primera vez, sin necesidad alguna de evaluación heurística de la condicionalidad de cada problema original.

Es derivado el Método Aproximante de las Componentes (MADC), novedosa variante de un método de Procesamiento Digital de Señales, conocido como el Método de las Componentes (MDC), numericamente robustecida mediante Seudoiteraciones de Desglose Aproximante para soluciones mínimocuadráticas de Norma Euclideana Mínima (SDANEM) (fórmulas (31)-(33)) [37].

MADC aporta aproximados más precisos y menos sensitivos numericamente que los que MDC aporta en problemas de descomposición de señales reales de escala media (dimensionalidad media); MADC aventaja a MDC en robustez además porque MADC no debe perder sus propiedades con el aumento de la dimensionalidad, el empeoramiento de la condicionalidad o, incluso, por la no-ortogonalidad de los diccionarios; lo que puede ocurrir al trabajar con megadiccionarios (diccionarios redundantes), al aumentar la densidad de discretización de las mallas o al incluir heurísticamente palabras en los diccionarios (tabla comparativa y figuras 5-10) [37].

Finalmente, una variante multilínea de MADC es aplicada experimentalmente con éxito, por primera vez, a la descomposición tiempo-frecuencia topográfica de electroencefalogramas (EEG) multicanales humanos reales y da lugar así a un novedoso método de distribución espacio-tiempo-frecuencia suavizada en combinaciones lineales de palabras del diccionario de mejor ajuste al EEG multicanal, que posee propiedades sin precedentes entre los métodos hasta hoy existentes; tales como las siguientes: robustez numérica, no presupone estacionaridad alguna de

los datos de EEG, así como tampoco ninguna ortogonalidad ni estacionaridad de las curvas definidas por el usuario en los diccionarios (figuras 11 -13) [27].

Autoreferencias.

- Koenig T., Marti-Lopez F., Valdes-Sosa P. : "Topographic time-frequency decomposition of spontaneous EEG". *NeuroImage*, vol. 14, num. 1 (2001); pp. 383-390.
- Marti-Lopez F. : "Global convergence properties of the splitting iterations for solving linear least squares problems". *Investigación Operativa (Asociación Latinoamericana de Investigación Operativa)*, vol. 7, num. 3 (1999); pp. 133-142.
- Marti-Lopez F. : "Approximating splitting pseudo-iterations". *Investigación Operativa (Asociación Latinoamericana de Investigación Operativa)*, vol. 9, num. 1-3 (2000); pp. 117-134.
- Marti-Lopez F.: *ApproxKit. A mathematical Package of MatLab Programs and Functions for Numerically Robust Approximation of Multilinear Least Squares Solutions*. Editorial CENIC, Ciudad de La Habana, 2001 (www.mathworks.com/support/ftp/linalgv5.shtml y www.mathtools.net/Basic/Mathematics/MATLAB).
- Marti-Lopez F. and Koenig T. : "Approximating Method of Frames". *Digital Signal Processing*, aceptado para publicación.
- Valdes-Sosa P., Marti-Lopez F., Garcia F., Casanova R. : "Variable resolution electric-magnetic tomography". *Memorias de la X Conferencia Internacional de BioMagnetismo "BioMag96"*, Santa Fe, New Mexico, 1996. Editor C. Woods, Filadelfia, 1998.

Presentaciones públicas del contenido de la tesis.

1. Martí F.: "Non-parametric regularization principles". Conferencia Internacional "Ciencia y Tecnología para el Desarrollo", CIMAF '97; IV Simposio de Matemáticas. Ciudad de La Habana, Cuba; 24-28 marzo 1997.
2. Martí F.: "Further approximating properties of the splitting iterations for solving linear least squares problems".. Conferencia Internacional "Ciencia y Tecnología para el Desarrollo", CIMAF '99; V Simposio de Matemáticas. Ciudad de La Habana, Cuba; 22-26 marzo 1999.

3. Koenig T., Martí-López F., Valdés-Sosa P.: "Topographic time-frequency decomposition of the spontaneous EEG". XIII Seminario Científico del Centro Nacional de Investigaciones Científicas, Ciudad de La Habana, Cuba, 27-30 de junio de 2000.
4. Koenig T., Martí-López F., Valdés-Sosa P.: "Topographic time-frequency decomposition of the EEG". 9no Encuentro Alemán de Mapeo Cerebral; Giessen, Alemania 21-23 septiembre 2000.
5. Koenig T., Martí-López F., Valdés-Sosa P.: "Topographic time-frequency decomposition of the EEG". 11no Congreso de la Sociedad Internacional para la Topografía Electromagnética Cerebral (ISBET); Frankfurt, Alemania, 16-19 noviembre 2000.
6. Koenig T., Martí-López F., Valdés-Sosa P.: "Decomposing the EEG in time, space and frequency: A formal model, existing methods, and a new proposal". 12vo Congreso de la Sociedad Internacional para la Topografía Electromagnética Cerebral (ISBET); Utsunomiya, Japón, 8-10 marzo 2001.

1. ITERACIONES ESTACIONARIAS LINEALES PARA LA APROXIMACIÓN DE SOLUCIONES DEL PROBLEMA GENERAL DE MÍNIMOS CUADRADOS LINEALES EN DIMENSIONES FINITAS SIN RESTRICCIONES.

1.1. Sumario del capítulo.

En este capítulo, resumimos los resultados de la revisión bibliográfica sobre iteraciones estacionarias lineales [5, 10, 48] para la aproximación robusta de soluciones del Problema General; con el propósito de conocer el estado del arte de las iteraciones estacionarias lineales de desglose para la aproximación robusta de soluciones de ese problema.

1.2. Generalidades.

Consideremos el Problema General de Mínimos Cuadrados lineales en dimensiones finitas sin restricciones [5, 6, 16, 18, 48]

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 \quad (1),$$

donde $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$, $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$, y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$; y el sistema de ecuaciones normales, asociado al Problema General (1)

$$A'Ax = A'b \quad (2).$$

Según su definición [6, 18, 48], la llamada “solución pseudoinversa” del Problema General (1) [6, 18, 48],

$$x^* = A^+b \quad (3),$$

es la solución única con norma euclídeana mínima del sistema normal de ecuaciones (2); es decir, x^* es la solución única del problema de Mínimos Cuadrados lineales en dimensiones finitas a dos niveles del tipo “goal-attainment” definido positivo, sin restricciones [2, 3, 52, 53],

$$A^+b = \arg \min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax-b\|_2^2} \|x\|_2^2 \quad (4).$$

Obviamente, según (3), x^* es la imagen de una cierta aplicación discontinua j [47] de $\mathbf{R}^{m \times n} \times \mathbf{R}^m$ en \mathbf{R}^n [15, 49, 56],

$$j(A,b): \mathbf{R}^{m \times n} \times \mathbf{R}^m \mapsto \mathbf{R}^n.$$

En efecto, sea

$$A = L \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R',$$

la factorización de la Descomposición en Valores Singulares (SVD⁶) de la matriz A [6, 18, 48], donde

$$S = \begin{pmatrix} s_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & s_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & s_{\text{rank}(A)} \end{pmatrix}$$

y $s_k \in \mathbf{R}$, $k = 1, 2, \dots, \text{rank}(A)$, $s_1 \geq s_2 \geq \dots \geq s_{\text{rank}(A)} > 0$, son los valores singulares de la matriz A y las matrices $L \in \mathbf{R}^{m \times m}$ y $R \in \mathbf{R}^{n \times n}$ satisfacen que $L' = L^{-1}$ y $R' = R^{-1}$.

⁶ Del inglés, en siglas: “Singular Value Decomposition”.

Al sustituir la matriz pseudoinversa [6, 18] $A^+ = R \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L'$ en (3), obtenemos la conocida expresión [6, 18]

$$x^* = x^*(S) = R \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L' b;$$

de donde

$$\lim_{[diag(S)]_{i+1:rank(A)} \rightarrow +0} \|x^*(S)\|_2 = \lim_{[diag(S)]_{i+1:rank(A)} \rightarrow +0} \left\| R \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L' b \right\|_2 = +\infty,$$

que evidencia la no continuidad de toda solución pseudoinversa del Problema General (1) respecto a los valores singulares de A [6, 18, 48] y, por tanto, su dependencia no continua respecto a los datos A y b [15, 49, 56].

Del Álgebra Lineal es conocido [6, 18, 48] que la condicionalidad de la matriz A y del Problema General (1) es cuantificada mediante el número de condición de la matriz A [6],

$$\mathbf{k}(A) = \|A\|_2 \|A^+\|_2 = \frac{s_1}{s_{rank(A)}} \geq 1 \quad (5).$$

De ahí, la formación de las nociones de matriz y problema bien-condicionados,

$$\mathbf{k}(A) \approx 1,$$

o mal-condicionados,

$$\mathbf{k}(A) \gg 1.$$

Más allá del hecho de la inestabilidad numérica del cálculo del número de condición de matrices según su definición (5), notemos aquí la ambigüedad de las nociones establecidas de matriz y problema bien- y mal-condicionados; es decir, la no existencia de valor numérico alguno o

intervalo de ellos para discernir objetiva y claramente si una matriz o un problema es bien- o mal-condicionado [5, 18, 48].

De acuerdo a la Teoría de Perturbaciones [6, 18], el número de condición de la matriz A es una medida de la sensibilidad de la solución pseudoinversa (3) a perturbaciones de los datos A y b .

Así, un número grande de condición de la matriz A , $\mathbf{k}(A) \gg 1$, estaría en correspondencia con una "hipersensitividad" a perturbaciones de los datos de la solución pseudoinversa (3), cuya causa es la mencionada discontinuidad respecto a los datos A y b del Problema General (1) [6, 15, 18, 48, 49, 56].

En efecto, al hacer un análisis de sensibilidad [6, 18] de las soluciones del sistema normal de ecuaciones (2) –y, por tanto, del Problema General (1) y del problema binivel (4)-, resulta que, si $\mathbf{a} \in \mathbf{R}$, $\mathbf{a} \geq 0$,

$$(A'A + \mathbf{a}I)\tilde{x} = A'b,$$

entonces existe, obviamente, una solución única \tilde{x}^* , tal que

$$\tilde{x}^* = (A'A + \mathbf{a}I)^+ A'b = \tilde{x}^*(S, \mathbf{a}) = R \begin{pmatrix} (S^2 + \mathbf{a}I)^{-1} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L'b.$$

Por ende,

$$\lim_{[diag(S)]_{i+1:rank(A)} \rightarrow +0} \mathbf{k}(A) = +\infty$$

y

$$\lim_{\mathbf{a} \rightarrow +0} \lim_{[diag(S)]_{i+1:rank(A)} \rightarrow +0} \|\tilde{x}^*(S, \mathbf{a})\|_2 \neq \lim_{[diag(S)]_{i+1:rank(A)} \rightarrow +0} \lim_{\mathbf{a} \rightarrow +0} \|\tilde{x}^*(S, \mathbf{a})\|_2 = +\infty.$$

Según la Teoría de Aproximaciones [5, 15, 18, 48, 49, 56], toda aproximación numérica de soluciones del Problema General (1) es una aplicación [47] $\mathbf{j} : \mathbf{R}^{m \times n} \times \mathbf{R}^m \mapsto \mathbf{R}^n$. De tal

forma que $\hat{x}^* = \mathbf{j}(A, b)$ es un aproximado de una solución x^* del Problema General (1), $x^* \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2$, si y sólo si $\exists \mathbf{e} \geq 0$, $\mathbf{e} < +\infty$, tal que $\|\mathbf{j}(A, b) - x^*\|_2 \leq \mathbf{e}$, cualquiera sea $(A, b) \in \Omega_{\mathbf{e}} \subseteq \mathbf{R}^{m \times n} \times \mathbf{R}^m$.

La aproximación \mathbf{j} es continua respecto a A y b [47] si y sólo si $\forall \tilde{A} \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $\forall \tilde{b} \in \mathbf{R}^m$,

$$\lim_{(A, b) \rightarrow (\tilde{A}, \tilde{b})} \mathbf{j}(A, b) = \mathbf{j}(\tilde{A}, \tilde{b});$$

es decir, $\forall \mathbf{e} > 0$, $\mathbf{e} < +\infty$; $\exists \mathbf{d}_A > 0$, $\mathbf{d}_A < +\infty$ y $\exists \mathbf{d}_b > 0$, $\mathbf{d}_b < +\infty$; tales que

$$\left(\|A - \tilde{A}\|_F \leq \mathbf{d}_A \right) \wedge \left(\|b - \tilde{b}\|_2 \leq \mathbf{d}_b \right) \Rightarrow \left\| \mathbf{j}(A, b) - \mathbf{j}(\tilde{A}, \tilde{b}) \right\|_2 \leq \mathbf{e}.$$

Ahora, sea $A = L \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{R}'$. La aproximación \mathbf{j} es continua respecto a $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ si y sólo si $\forall A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $\forall b \in \mathbf{R}^m$ y $\forall i \in \mathbf{N}$, $i \leq \text{rank}(A) - 1$;

$$\lim_{[\text{diag}(S)]_{i+1:\text{rank}(A)} \rightarrow +0} \mathbf{R} \mathbf{j} \left(\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, L^{-1}b \right) = \mathbf{R} \mathbf{j} \left(\begin{pmatrix} [S]_{1:i} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, L^{-1}b \right).$$

Así, \hat{x}^* es hipersensitiva a perturbaciones en A y b , entonces la aproximación \mathbf{j} es discontinua respecto a $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$ y, por tanto, \mathbf{j} no es continua respecto a A y b .

Luego, como afirmación contrarrecíproca de la anterior, si la aproximación \mathbf{j} es continua respecto a A y b , entonces \mathbf{j} es continua respecto a $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}_{m \times n}$ y, por tanto, \hat{x}^* no es hipersensitiva a perturbaciones en A y b .

Por otra parte, según la Teoría de Perturbaciones [6, 15, 18, 49, 56], numericamente robusta es toda aproximación de soluciones del Problema General (1) que depende continuamente de los datos A y b .

Por ende, si \hat{x}^* es un aproximado numericamente robusto de x^* , entonces, cualesquiera sean los datos A y b del Problema General (1), perturbaciones acotadas (“pequeñas”) en ellos repercutirán solamente como cambios acotados (“pequeños”) de módulo y/o dirección en el aproximado \hat{x}^* [6, 15, 18, 48, 49, 56].

Los primeros resultados en la aproximación numericamente robusta de soluciones del Problema General (1) con datos ruidosos conciernen a la solución de los sistemas mal-condicionados severamente de ecuaciones lineales compatibles

$$Ax = b \quad (6),$$

que surgen –como regla– en la solución numérica, vía discretización, de problemas mal-planteados de ecuaciones lineales en ciertos operadores funcionales con datos ruidosos (ver, por ejemplo, [15, 21, 39, 40, 49, 56] y los artículos referidos allí).

Esos primeros resultados están vinculados a la solución del sistema de ecuaciones con matriz definida positiva,

$$(A'A + II)x = A'b \quad (7),$$

“cercano” al sistema de ecuaciones normales (2), donde $I \in \mathbf{R}$, $0 < I < +\infty$ pero $I \approx 0$; cuya solución única es

$$\hat{x}^* = (A'A + II)^{-1} A'b \quad (8),$$

cualquiera sea la condicionalidad de la matriz A . No es difícil comprender que, gracias a la introducción del parámetro real, finito, no nulo, positivo y “pequeño” I ; la solución exacta (8) del

sistema “cercano” (7) resulta una solución “aproximada” numericamente robusta del Problema General (1) [15, 18, 49, 56].

La fórmula (8) es conocida como la versión estándar de la variante directa del método de la Regularización de Tikhonov⁷ para la solución numérica de problemas mal-planteados de ecuaciones lineales en operadores funcionales, vía discretización [49, 56],

$$\hat{x}^* = \begin{cases} A^+b, & \mathbf{k}(A) \approx 1 \\ \arg \min_{x \in \mathbf{R}^n} \left\{ \|Ax - b\|_2^2 + I \|x\|_2^2 \right\} & \mathbf{k}(A) \gg 1 \end{cases} \quad (9),$$

donde $I \in \mathbf{R}$, $0 < I < +\infty$, $I \approx 0$. Por su parte, la versión no estándar de la variante directa es

$$\hat{x}^* = \begin{cases} A^+b, & \mathbf{k}(A) \approx 1 \\ \arg \min_{x \in \mathbf{R}^n} \left\{ \|Ax - b\|_2^2 + I \|Dx\|_2^2 \right\} & \mathbf{k}(A) \gg 1 \end{cases} \quad (10);$$

donde $D \in \mathbf{R}^{q \times n}$, $q \in \mathbf{N}$; tal que $Null(A) \cap Null(D) = \{0\}$ (sobre ambas versiones ver, por ejemplo, [13, 15, 21, 24, 39, 40, 41, 49, 56] y los artículos referidos allí).

Ahora bien, observemos que la aproximación robusta de soluciones del Problema General (1) mediante las fórmulas directas (9) y (10) de la Regularización de Tikhonov supone la evaluación heurística de la condicionalidad de cada problema a resolver; es decir, su calificación heurística como bien- o mal-condicionado.

Éso significa que la eficacia de la aproximación de soluciones de cada problema mediante la Regularización directa de Tikhonov depende metodologicamente, a su vez, de la solución heurística explícita o implícita de otro problema que es siempre ambiguo [15, 18, 21, 24, 31, 39, 40, 49, 56], según las nociones establecidas de problemas bien- y mal-condicionados.

⁷ Tal como aparece descrita en la bibliografía [13, 15, 21, 24, 39-41, 49, 56], la idea de sustituir el sistema de ecuaciones normales (2) por el sistema de ecuaciones “cercano” (7) no era nueva totalmente en ese momento: ya había sido introducida, al menos, por Levenberg en 1944 y por Marquardt en 1963 en la minimización de funciones doblemente diferenciables, cuya matriz hessiana no es definida positiva [16, 30, 33].

En efecto, en los casos de problemas bien-condicionados o mal-condicionados severamente con datos ruidosos, los aproximados de soluciones del Problema General (1) mediante las fórmulas directas (9) y (10) de la Regularización de Tikhonov han probado ser una de las alternativas más eficaces a los aproximados mediante la fórmula de la solución seudoinversa (3) [15, 21, 24, 39, 40, 49, 56].

Desafortunadamente, no sucede lo mismo en los casos de problemas que no son ni bien-condicionados ni mal-condicionados severamente, aún con datos ruidosos. En esas circunstancias, la precisión mediante otras aproximaciones (por ejemplo, mediante la Descomposición en Valores Singulares Truncada, TSVD [18, 21, 24]) puede resultar mejor que la de los aproximados mediante (9) y (10) [31], aunque la robustez de aquellas otras no ha sido aún demostrada [15, 21, 24, 40, 54].

No es difícil comprender que la circunstancia metodológica mencionada es una de las principales causas del limitado campo actual de aplicaciones eficaces de la Regularización directa de Tikhonov, asociado casi exclusivamente con la solución numérica, vía discretización, de aquellos problemas mal-planteados de ecuaciones lineales en algunos operadores funcionales, cuya discretización, según conocemos previamente, produce problemas –como regla- mal-condicionados severamente y, por ende, solemos obviar la evaluación de su condicionalidad (ver, por ejemplo, [15, 21, 31, 39, 40, 42, 51, 52, 56] y los artículos referidos allí).

Por ello, al constituir un obstáculo serio en el propósito de extender el campo de aplicaciones eficaces de la Regularización directa de Tikhonov más allá de su fronteras actuales, en el presente continúan las investigaciones de nuevos enfoques, nuevos procedimientos para la determinación de valores óptimos del parámetro de regularización I , la definición de nuevas matrices de suavizamiento D , etc. (ver, por ejemplo, [13, 15, 17, 18, 20, 21, 23, 24, 31, 39, 40, 49, 52, 56] y los artículos referidos allí).

1.3. Iteraciones estacionarias lineales para la solución de problemas de Mínimos Cuadrados lineales en dimensiones finitas sin restricciones.

Las insuficiencias antes señaladas de la Regularización directa de Tikhonov en la aproximación robusta de soluciones del Problema General (1) con datos ruidosos han conllevado además a la extensión del horizonte de investigaciones, en general, hacia los métodos iterativos para la solución de problemas de Mínimos Cuadrados lineales en dimensiones finitas sin restricciones (ver, por ejemplo, [5-8, 10, 14, 15, 16, 18, 20-25, 38, 40, 41, 45, 48, 54] y los artículos referidos

allí) y, en particular, para aproximaciones más precisas, hacia las iteraciones estacionarias lineales, cuya sencilla fórmula general es

$$x^{[k+1]} = Hx^{[k]} + f, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

donde $H \in \mathbf{R}^{n \times n}$ y $f \in \mathbf{R}^n$, de larga tradición dentro del Álgebra Lineal Numérica [5, 6, 10, 15, 16, 18, 21, 24, 40, 41, 48].

Al respecto, en su detallado y completo estudio sobre regularización "Regularization methods for large-scale problems" [21], Hanke y Hansen afirmaron⁸:

"...In those cases where Tikhonov approximation fails to have optimal accuracy, it is possible to improve it with the following defect iteration⁹... . For obvious reasons the resulting method is usually referred to as iterated Tikhonov regularization. Its most important property is that the set of solutions, which can be reconstructed with optimal accuracy, increases with every iteration, In other words, if defect iteration has been repeated sufficiently many times, the resulting reconstruction will have reached an accuracy that cannot be improved significantly by any other method...".

No muchas iteraciones estacionarias lineales para la aproximación robusta de soluciones de problemas de Mínimos Cuadrados lineales en dimensiones finitas sin restricciones han sido reportadas hasta hoy en la bibliografía (ver, por ejemplo, [5, 6, 10, 15, 16, 18, 21, 24, 40, 41, 48] y los artículos referidos allí). Entre las de mayor actualidad, podemos citar las iteraciones de Richardson [6, 10, 18, 48], las iteraciones de Landweber [15, 21, 24, 40] y las fórmulas de la Regularización Iterada de Tikhonov en el sentido de Oganessian y Starostenko [41] y en el sentido de Shock [21, 24].

Las iteraciones de Richardson son un método de solución de problemas subdeterminados o con rango deficitario y datos exactos de Mínimos Cuadrados lineales en dimensiones finitas sin restricciones,

$$x^{[k+1]} = x^{[k]} - \alpha A^T (Ax^{[k]} - b), \quad k = 0, 1, \dots;$$

⁸ Página 279, epígrafe "Iterated Tikhonov Regularization"

⁹ Se refiere a la Regularización Iterada de Tikhonov en el sentido de Shock, que se discutirá un poco más adelante (Nota del Autor).

donde $m \in [0, 2\|A\|_2^{-2}] \subset \mathbf{R}$ [6, 10, 18, 48]. Estas iteraciones son variantes de las iteraciones estacionarias lineales de Aproximaciones Sucesivas del Algebra Lineal -conocidas ampliamente ya en la solución de sistemas de ecuaciones lineales (6) compatibles [5, 6, 10, 18, 38, 48]-,

$$x^{[k+1]} = x^{[k]} - W(Ax^{[k]} - b), \quad k = 0, 1, \dots \quad (11);$$

donde $W \in \mathbf{R}^{n \times m}$. La convergencia local de las iteraciones de Richardson a una solución mínimo-cuadrática lineal de norma mínima ha sido demostrada, si $x^{[0]} \in \text{Range}(A')$. La continuidad de sus soluciones respecto a los datos aún no ha sido demostrada. La convergencia es –como regla- muy lenta [6, 10, 18, 48].

Aunque muy semejantes a las de Richardson (10), las iteraciones de Landweber son ya un método para la aproximación robusta de soluciones de sistemas de ecuaciones lineales (6) compatibles, con datos ruidosos. Estas iteraciones son también variantes de iteraciones estacionarias lineales de Aproximaciones Sucesivas, cuya convergencia local a una solución mínimo-cuadrática lineal de norma mínima ha sido demostrada, si $x^{[0]} = 0$. Sus iterados son aproximados “autoregularizados” de esa solución, que son obtenidos mediante un criterio de parada a priori basado en el Principio de Discrepancia. Como regla, la convergencia de las iteraciones es también lenta [15, 21, 24, 39, 40].

Las versiones estándar y no-estándar de la fórmula de la Regularización Iterada de Tikhonov en el sentido de Oganessian-Starostenko,

$$x^{[k+1]} = \arg \min_{x \in \mathbf{R}^n} \left\{ \|Ax - b\|_2^2 + I \|x - x^{[k]}\|_2^2 \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (12)$$

y

$$x^{[k+1]} = \arg \min_{x \in \mathbf{R}^n} \left\{ \|Ax - b\|_2^2 + I \|D(x - x^{[k]})\|_2^2 \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (13)$$

donde $I \in \mathbf{R}$, $I > 0$; $x^{[0]} = 0$, $D \in \mathbf{R}^{n \times n}$ y $\text{Null}(A) \cap \text{Null}(D) = \{0\}$; son también ya iteraciones estacionarias lineales para la aproximación robusta de soluciones de sistemas de

ecuaciones lineales (6) compatibles, con datos ruidosos. La convergencia local de estas iteraciones ha sido demostrada para sistemas mal-condicionados severamente, si $x^{[0]} = 0$ [41]. No han sido demostrados aún ni el orden ni el límite de convergencia de esta iteración (ver, por ejemplo, [15, 21, 24, 40, 41] y los artículos referidos allí).

Por su parte, la fórmula de la Regularización Iterada de Tikhonov en el sentido de Shock es una iteración estacionaria lineal para el incremento de la precisión de las soluciones aproximadas \hat{x}^* (8), mediante la fórmula directa (9) de la Regularización de Tikhonov; es decir,

$$(A'A + II)(x^{[k+1]} - x^{[k]}) = A'(b - Ax^{[k]}), \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$x^{[0]} = \hat{x}^* = (A'A + II)^{-1} A'b;$$

donde $I \in \mathbf{R}$, $I > 0$. La convergencia local de esta iteración ha sido demostrada para sistemas de ecuaciones (6) compatibles [21]. La continuidad de las soluciones aproximadas por la fórmula de la Regularización Iterada de Tikhonov en el sentido de Shock respecto a los datos no ha sido aún demostrada. Tampoco han sido demostrados aún ni el orden ni el límite de convergencia de esta iteración tampoco (ver, por ejemplo, [15, 21, 24, 40] y los artículos referidos allí).

1.4. Iteraciones estacionarias lineales de desglose para la solución de problemas de Mínimos Cuadrados lineales en dimensiones finitas sin restricciones.

Según su definición [5, 10, 18, 48], las iteraciones estacionarias lineales de desglose para la solución de sistemas cuadrados de ecuaciones algebraicas lineales (6) son las iteraciones estacionarias lineales, cuya fórmula general es

$$x^{[k+1]} = Q^{-1}(Q - A)x^{[k]} + Q^{-1}b, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

donde $m = n$ y $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es no singular.

No es difícil constatar que las fórmulas de la Regularización Iterada de Tikhonov tanto en el sentido de Oganessian y Starostenko, como en el de Shock, coinciden, constituyendo el mismo caso especial, $Q = A'A + II$, $I \in \mathbf{R}$, $I > 0$; de iteraciones estacionarias lineales de desglose

$$x^{[k+1]} = I(A'A + II)^{-1}x^{[k]} + (A'A + II)^{-1}A'b, k = 0,1,2,\dots;$$

para la solución del sistema de ecuaciones normales (2), $A'Ax = A'b$, asociado al Problema General (1); iteraciones de desglose que resultan, a su vez, un caso especial $f(x) = \|Ax - b\|_2^2$ de las versiones estacionarias de la fórmula iterativa

$$x^{[k+1]} = \arg \min_{x \in \mathbf{R}^n} \left\{ f(x) + I_k \|x - x^{[k]}\|_2^2 \right\},$$

$$I_k \in \mathbf{R}, \tilde{I} \in \mathbf{R}, 0 < I_k \leq \tilde{I} < +\infty,$$

$$k = 0,1,2,\dots;$$

del llamado "Método de Punto Proximal" [8, 25, 38, 45] -conocido método de minimización de Programación Matemática Convexa [16]-, cuya teoría general parece estar ya en vías de aportar los resultados requeridos de convergencia -entre otros asintóticos-, al menos, para ese caso especial [8, 25].

Casi simultáneamente, algo semejante está ocurriendo con la teoría de las iteraciones estacionarias lineales [10, 22, 48].

En [10] son resumidos los resultados más recientes y completos, relativos a las iteraciones estacionarias lineales tanto de Aproximaciones Sucesivas como de desglose para la solución de sistemas de ecuaciones lineales singulares y no estructurados.

Ante la investigación abocada de nuevas propiedades de convergencia, aproximantes, robustez y otras asintóticas de las fórmulas de la Regularización Iterada de Tikhonov tanto en el sentido de Oganessian y Starostenko, como en el de Shock; los resultados reportados en [10] acerca de las iteraciones de desglose para sistemas semi-definidos positivos (tales como los sistemas de ecuaciones normales (2)) son muy importantes. Así, son particularmente notables los resultados concernientes a la demostración de condiciones suficientes para:

- la convergencia global de tales iteraciones a alguna solución del Problema General (para detalles, ver el teorema 8, los incisos a), c) y h) del teorema 9 y el corolario 10 de Dax [10]).
- la convergencia local de cada una de tales iteraciones a la solución existente y única de un cierto problema de Mínimos Cuadrados lineales del tipo “goal-attainment” definido positivo a dos niveles, asociado al Problema General (para detalles, ver el inciso h) del teorema 9 y el corolario 10 de Dax [10]).

Por otra parte, los resultados reportados en [22], apuntan hacia la factibilidad de pasos ulteriores de investigación en esta dirección.

Todos esos resultados serían novedosos no solamente para la aproximación robusta de soluciones del Problema General (1), sino también para la teoría misma de las iteraciones estacionarias lineales para la solución de ese problema.

2. ITERACIONES DE DESGLOSE APROXIMANTE PARA LA APROXIMACIÓN DE SOLUCIONES DEL PROBLEMA GENERAL DE MÍNIMOS CUADRADOS LINEALES EN DIMENSIONES FINITAS SIN RESTRICCIONES ¹⁰.

2.1. Sumario del capítulo.

En este capítulo investigamos las propiedades de convergencia local y global, aproximantes y otras asintóticas de interés de una nueva clase especial de iteraciones estacionarias lineales de desglose para la solución de los sistemas normales de ecuaciones (2) asociados al Problema General (1).

2.2. Las iteraciones de desglose aproximante como clase especial de iteraciones de desglose globalmente convergentes.

De acuerdo a la definición de iteraciones de desglose dada en [10], iteraciones de desglose para la solución de sistemas normales de ecuaciones (2) son las iteraciones estacionarias lineales [5, 18, 48] caracterizadas por la fórmula general

$$x^{[k+1]} = Q^{-1}(Q - A'A)x^{[k]} + Q^{-1}A'b, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (14),$$

donde $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es la matriz de desglose del sistema normal de ecuaciones (2); y cuya matriz de iteraciones H [5, 10, 48] está definida por la fórmula general

$$H = Q^{-1}(Q - A'A).$$

La legitimidad del uso de iteraciones de desglose para la solución del Problema General (1) está garantizada por el hecho que la matriz real de todo sistema normal de ecuaciones (2) es

¹⁰ Los resultados, presentados en este capítulo, aparecen publicados en [34].

cuadrada, simétrica y semidefinida positiva [18]; por tanto, cumple los requisitos para la formulación rigurosa de las correspondientes iteraciones de desglose [10].

No es difícil constatar el hecho que (14) coincide con la fórmula de las iteraciones estacionarias lineales, conocidas como "Iteraciones de Aproximaciones Sucesivas" (11) para la obtención de soluciones de sistemas normales de ecuaciones (2),

$$x^{[k+1]} = x^{[k]} - Q^{-1}(A'Ax^{[k]} - A'b), \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (15).$$

Tampoco es difícil percatarnos que, aún más allá de (15), (14) es equivalente a la fórmula general de una variante estacionaria y preconditionada del método iterativo de minimización no lineal conocido como "Descenso Acelerado" [16, 22]

$$x^{[k+1]} = x^{[k]} - \frac{1}{2} Q^{-1} \nabla \left[\|Ax - b\|_2^2 \right]_{x=x^{[k]}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

para la solución del Problema General (1).

Sea $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$, una matriz definida positiva [18] arbitraria dada, de manera tal que la matriz

$$Q = \frac{V + A'A}{2} \quad (16)$$

es real, cuadrada y no-singular, cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$; $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$. Por tanto, Q cumple los requisitos para ser matriz de desglose de sistemas normales de ecuaciones (2). En tal caso especial, la matriz de desglose Q recibe la denominación de "Matriz de Desglose Aproximante" [34].

Definición 1 ("Matriz de desglose aproximante").

Sea $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$ una matriz definida positiva arbitraria dada. Definimos como matriz de desglose aproximante toda matriz de desglose $Q \in \mathbf{R}^{n \times n}$ de sistemas normales de ecuaciones

$$A'Ax = A'b,$$

tal que

$$Q = \frac{V + A'A}{2},$$

cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$; $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$ \otimes .

Consideremos ahora el caso especial de iteración estacionaria lineal de desglose (14) para la solución del Problema General (1), cuya matriz de desglose es una matriz de desglose aproximante (16); es decir, la iteración estacionaria lineal

$$x^{[k+1]} = (V + A'A)^{-1}(V - A'A)x^{[k]} + 2(V + A'A)^{-1}A'b, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (17),$$

cuya matriz de iteración H es

$$H = (V + A'A)^{-1}(V - A'A) \quad (18).$$

Tal iteración estacionaria lineal de desglose recibe la denominación de "Iteración de Desglose Aproximante" (Definición 2) [34], mientras que su matriz de iteración H recibe la de "Matriz de Iteración de Desglose Aproximante" [34].

Definición 2 ("Iteración de desglose aproximante").

Definimos como iteración de desglose aproximante para la solución de sistemas normales de ecuaciones toda iteración estacionaria lineal de desglose para ese propósito, cuya matriz de desglose sea una matriz de desglose aproximante \otimes .

Definición 3 ("Matriz de iteración de desglose aproximante").

Definimos como matriz de iteración de desglose aproximante la matriz de iteración de toda iteración de desglose aproximante para la solución de sistemas normales de ecuaciones \otimes .

De los resultados reportados por Dax [10], podemos derivar para toda iteración de desglose aproximante (17), entre otras, las siguientes propiedades de convergencia y asintóticas especiales (Teorema 1):

- La sucesión de iterados de desglose aproximante converge globalmente a alguna solución del Problema General (1).
- La sucesión de los valores de la norma euclídeana al cuadrado de los residuos¹¹, definida sobre la sucesión de iterados de desglose aproximante, es estrictamente decreciente.
- La sucesión de los vectores gradiente del cuadrado de la norma euclídeana de los residuos, definida sobre la sucesión de iterados de desglose aproximante, converge a cero globalmente.
- La sucesión de valores de la norma euclídeana de los vectores gradiente del cuadrado de la norma euclídeana de los residuos, definida sobre la sucesión de iterados de desglose aproximante, converge a cero globalmente.
- La sucesión de iterados de desglose aproximante converge localmente a la solución única de cierto problema de Mínimos Cuadrados lineales a dos niveles en dimensiones finitas sin restricciones, del tipo "goal-attainment" definido positivo.

2.3. Propiedades aproximantes de las iteraciones de desglose aproximante. La pseudoiteratividad.

Por su parte, en el Teorema 2, demostramos adicionalmente que toda iteración de desglose aproximante (17) posee nuevas e interesantes propiedades especiales de tipo aproximante, más allá de las propiedades generales ya demostradas en el Teorema 1.

Las nuevas propiedades demostradas son:

- Cada iterado de desglose aproximante puede ser obtenido pseudoiterativamente; es decir, mediante la fórmula de cálculo directo, equivalente numericamente a (17).

¹¹ En Álgebra Lineal [16], vector de los residuos es la diferencia entre el vector, producto de la multiplicación de matriz de un sistema de ecuaciones lineales por el vector de sus incógnitas y el vector de sus términos libres.

- Toda sucesión de iterados de desglose aproximante posee como límite de convergencia global la solución única del problema de Mínimos Cuadrados lineales del tipo “goal-attainment” definido positivo a dos niveles [2, 3, 52, 53] asociado a su problema original.
- Toda sucesión de iterados de desglose aproximante se acerca estrictamente a su límite global.
- El orden de convergencia de toda iteración de desglose aproximante es lineal.
- Toda sucesión de iterados de desglose aproximante se acerca a su límite global con una velocidad exponencial.

2.4. Criterios de parada de las iteraciones de desglose aproximante.

Selección de la matriz de desglose aproximante y del iterado inicial.

Una vez llegada aquí la investigación, de acuerdo a las propiedades de convergencia, aproximantes y asintóticas, demostradas en los Teoremas 1 y 2 y en el Corolario 1, resulta claro que la sucesión $\{x^{[k]}\}_{k=0,1,2,\dots} \subset \mathbf{R}^n$ de toda iteración de desglose aproximante representa un arreglo infinito -y ordenado según la cercanía a su límite- de soluciones aproximadas del sistema normal de ecuaciones (2) correspondiente, cualesquiera sean sus datos reales A y b ; es decir, del Problema General (1) asociado.

Así, para la obtención de algún aproximado \hat{x}^* de una solución x^* del Problema General (1) basta solamente especificar un número finito de pasos de iteración $t^* \in \mathbf{N} \mid t^* < +\infty$, de tal modo que

$$\hat{x}^* = x^{[t^*]} = \left((V + A'A)^{-1}(V - A'A) \right)^{t^*} x^{[0]} + \left(I - \left((V + A'A)^{-1}(V - A'A) \right)^{t^*} \right) A^+ b \approx$$

$$\approx x^* = \arg \min_{x \in \mathbf{R}^n} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 (x - x^{[0]})' V (x - x^{[0]}) \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 \quad (19).$$

En la praxis numérica, tal especificación suele ser realizada algorítmicamente sobre la base de la definición previa de uno o más requisitos que deben ser cumplidos por los iterados en el $k = t^*$ conveniente o deseado; es decir, de uno o más criterios de parada, de tipo a priori o a posteriori, para las iteraciones [5, 18, 48].

No es difícil comprender que las propiedades demostradas en los Teoremas 1 y 2 y en el Corolario 1 aportan ya más que suficientes fundamentos apropiados, desde el punto de vista numérico, para la articulación y utilización de una amplia gama de tales criterios tradicionales de parada [5, 18, 48] para las iteraciones de desglose aproximante. No obstante, en el punto correspondiente del próximo capítulo, un criterio heurístico de parada a priori es introducido por su novedoso tratamiento de la estabilidad numérica de las iteraciones.

Ahora aquí notemos que, gracias a la amplitud de los requisitos a cumplir por la matriz de desglose aproximante y por el iterado inicial, según sus respectivas definiciones, múltiples criterios para su selección pueden ser planteados al solucionar problemas concretos, basados en consideraciones sobre los atributos deseados metodológicos de la fórmula iterativa (17) y/o asintóticos, topológicos, geométricos, etc. de la sucesión de aproximados, generada por ella.

En efecto, observemos que para toda iteración de desglose aproximante (17),

$$x^{[k+1]} = (V + A'A)^{-1}(V - A'A)x^{[k]} + 2(V + A'A)^{-1}A'b, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\forall x^{[0]} \in \mathbf{R}^n.$$

según el punto 2 del Teorema 2, la interpretación geométrica del límite finito de convergencia global de la sucesión generada $\{x^{[k]}\}_{k=0,1,2,\dots} \subset \mathbf{R}^n$,

$$\forall x^{[0]} \in \mathbf{R}^n,$$

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{[k]} = x^* = \arg \min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2} (x - x^{[0]})' V (x - x^{[0]}) \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2,$$

es la de que x^* es aquella de las soluciones del Problema General (1), más cercana al punto del iterado inicial $x^{[0]}$, de acuerdo a la distancia elíptica

$$d(x, y) = \sqrt{(x-y)'V(x-y)} = \|\sqrt{V}(x-y)\|_2,$$

cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$; $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$.

Se trata, pues, de hecho, de aproximaciones de una entre infinitas soluciones distintas, en principio, del Problema General (1), vía el replanteamiento de ese problema como su equivalente binivel, siempre con solución única para cada A y b .

No es difícil constatar que la fórmula (17) puede ser transformada en una muy semejante a una versión estacionaria y preconditionada de la del conocido "Método de Newton" [16] para la solución del Problema General (1),

$$x^{[k+1]} = x^{[k]} - (V + A'A)^{-1} \nabla \left[\|Ax - b\|_2^2 \right]_{x=x^{[k]}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (20)$$

pero que, a diferencia de la fórmula de este último, (17) constituye una iteración estacionaria globalmente convergente a una solución x^* -en cierto modo ya determinada- del problema a resolver, cualesquiera sean sus datos reales A y b .

Además, resulta bien sugerente -de acuerdo con nuestros propósitos- que la fórmula (17) puede ser reescrita fácilmente bajo un enfoque algebraico semejante al de "minimización de funcional paramétrico" de la Regularización de Tikhonov para problemas con datos ruidosos [13, 15, 20, 21, 24, 39-41, 49] y resultar una fórmula similar

$$x^{[k+1]} = \arg \min_{x \in \mathbf{R}^n} \left\{ \|Ax - b\|_2^2 + (x - x^{[k]})' \left(\frac{V - A'A}{2} \right) (x - x^{[k]}) \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \quad (21).$$

Sin embargo, no es difícil percatarnos de la mayor fortaleza algebraica de la fórmula (21) en relación con sus símiles Tikhonovianos (12) y (13), toda vez que la matriz real y simétrica $\frac{V - A'A}{2}$ del segundo término de la expresión (21) puede no ser definida positiva ni, incluso, semidefinida positiva.

2.5. Casos especiales notables de iteraciones de desglose aproximante.

La legitimidad de esa semejanza es evidenciada con las demostraciones de los Teoremas 3 y 4 para el caso de las versiones estándar (12) y no-estándar (13) (con $V = 2II + A'A$ y $V = 2ID'D + A'A$ respectivamente, donde $I \in \mathbf{R}$, $I > 0$, $D \in \mathbf{R}^{q \times n}$, $q \in \mathbf{N}$; tal que $Null(A) \cap Null(D) = \{0\}$) de la fórmula de la Regularización Iterada de Tikhonov tanto en el sentido de Oganessian-Starostenko [41], como en el de Shock [21, 24]; la cual, a su vez, coincide con la fórmula iterativa de versiones estacionarias del Método de Punto Proximal [8, 25, 38, 45] para la solución del Problema General (1).

Otro ejemplo notable es el caso especial de las iteraciones de desglose aproximante para soluciones mínimo-cuadráticas lineales de norma euclídeana mínima (Definición 4) (con $V = II$, donde $I \in \mathbf{R}$, $I > 0$ y $x^{[0]} = 0$); cuya convergencia a soluciones del Problema General (1) es demostrada en el Teorema 5.

Definición 4 (“Iteración de desglose aproximante para soluciones mínimo-cuadráticas lineales con norma euclídeana mínima”).

Sea $I \in \mathbf{R}$, $I > 0$, un escalar arbitrario dado. Definimos como iteración de desglose aproximante para soluciones mínimo-cuadráticas con norma euclídeana mínima toda iteración estacionaria lineal

$$x^{[k+1]} = (II + A'A)^{-1}(II - A'A)x^{[k]} + 2(II + A'A)^{-1}A'b, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$x^{[0]} = 0,$$

para la solución de sistemas normales de ecuaciones,

$$A'Ax = A'b,$$

cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$; $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$ \otimes .

Notemos que, de acuerdo al carácter estacionario lineal de las iteraciones de desglose aproximante, el parámetro I no varía con el paso de iteración “ k ” y, por tanto, podemos

legítimamente asumir $k = 0$ para facilitar la determinación numérica de \mathbf{I} . Así, por ejemplo, tanto en el caso de las versiones estudiadas de la fórmula de la Regularización Iterada de Tikhonov, como en el de la fórmula de la iteración de desglose para soluciones mínimo-cuadráticas lineales con norma euclídeana mínima, el parámetro \mathbf{I} puede ser hallado, por ejemplo, mediante cualquiera –en principio- de los métodos y procedimientos, que aparecen en la literatura calificada pertinente (por ejemplo [15, 17, 18, 21, 23, 24, 39, 40, 56]). Al respecto, debemos puntualizar que, tanto en el caso de la fórmula tanto de la versión estándar de la Regularización Iterada de Tikhonov, como de la iteración estacionaria lineal de desglose aproximante para soluciones mínimo-cuadráticas con norma euclídeana mínima, el valor concreto que toma \mathbf{I} influye solamente en la geometría de la trayectoria de la sucesión $\{x^{[k]}\}_{k=0,1,2,\dots} \subset \mathbf{R}^n$ de iterados de desglose aproximante.

Debemos añadir que, aparte de los casos especiales notables estudiados aquí, las fórmulas de otras iteraciones de uso amplio y de gran actualidad pueden ser derivadas también como casos especiales de iteraciones de desglose aproximante [34].

2.6. Teoremario del capítulo.

Teorema 1 (Propiedades de convergencia y asintóticas notables de las iteraciones de desglose aproximante).

Si $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva arbitraria dada, entonces toda iteración de desglose aproximante

$$x^{[k+1]} = (V + A'A)^{-1}(V - A'A)x^{[k]} + 2(V + A'A)^{-1}A'b, \quad k = 0,1,2,\dots;$$

para la solución del sistema normal de ecuaciones

$$A'Ax = A'b,$$

cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$; $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$, cumple que

$$1.- \forall x^{[0]} \in \mathbf{R}^n, \exists x^* \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 \mid \lim_{k \rightarrow +\infty} x^{[k]} = x^* .$$

$$2.- \forall x^{[k]} \neq x^*, \|Ax^{[k+1]} - b\|_2^2 < \|Ax^{[k]} - b\|_2^2 .$$

$$3.- \forall x^{[0]} \in \mathbf{R}^n, \lim_{k \rightarrow +\infty} A'(Ax^{[k]} - b) = 0 .$$

$$4.- \forall x^{[0]} \in \mathbf{R}^n, \lim_{k \rightarrow +\infty} \|A'(Ax^{[k]} - b)\|_2 = 0 .$$

$$5.- \forall x^{[0]} \in \text{Range}(2(V + A'A)^{-1}A'A), \lim_{k \rightarrow +\infty} x^{[k]} = \arg \min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2} \|(\sqrt{V})x\|_2^2 = x^* .$$

$$6.- \|x^{[k]} - x^*\|_2 \leq \left\| \left(R' \sqrt{V} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 2(I + S^2)^{-1} S^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^+ \left(R' \sqrt{V} \right) \right\|_2 \|x^{[k+1]} - x^{[k]}\|_2, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

donde $L \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R'$, $S \in \mathbf{R}^{\text{rank}(A) \times \text{rank}(A)}$, es la factorización de la SVD de la matriz $A(\sqrt{V})^{-1}$.

Demostración.

Según las definiciones 1 y 2, toda iteración de desglose aproximante

$$x^{[k+1]} = (V + A'A)^{-1}(V - A'A)x^{[k]} + 2(V + A'A)^{-1}A'b, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

para la solución de un sistema normal de ecuaciones

$$A'Ax = A'b,$$

es una iteración de desglose, cuya matriz de desglose Q es la matriz de desglose aproximante

$$Q = \frac{V + A'A}{2}.$$

No es difícil constatar que la matriz $Q + Q' - A'A$ es definida positiva. En efecto,

$$Q + Q' - A'A = V$$

donde, por hipótesis, V es definida positiva.

Luego, toda vez que

$$\text{Arg min}_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 \neq \mathbf{f},$$

tiene lugar cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$, entonces, según los Teoremas 7, 8 de Dax [10] y los incisos a), c), e) y h) de su Teorema 9 [10], los seis puntos que aparecen en el enunciado del presente teorema son satisfechos \otimes .

Lema 1 (Refactorización de toda matriz de iteración de desglose aproximante).

Sea $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$. Si $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva arbitraria dada, entonces la matriz

$$H = (V + A'A)^{-1}(V - A'A),$$

cumple que

1. Existen una matriz $T \in \mathbf{R}^{n \times n}$ no singular y una matriz $J \in \mathbf{R}^{n \times n}$ diagonal,

$$J = \begin{pmatrix} j_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & j_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & j_n \end{pmatrix}, \text{ tales que } H = T^{-1}JT.$$

$$2. \quad |j_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, \text{rank}(A) \quad \text{y} \quad |j_{\text{rank}(A)+i}| = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n - \text{rank}(A).$$

Demostración.

Sea

$$A(\sqrt{V})^{-1} = L \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R',$$

la factorización de la SVD de la matriz $A(\sqrt{V})^{-1}$, donde $S \in \mathbf{R}^{\text{rank}(A) \times \text{rank}(A)}$. Luego,

$$\begin{aligned} H &= (\sqrt{V})^{-1} \left(I + \left(A(\sqrt{V})^{-1} \right) \left(A(\sqrt{V})^{-1} \right) \right)^{-1} \left(I - \left(A(\sqrt{V})^{-1} \right) \left(A(\sqrt{V})^{-1} \right) \right) (\sqrt{V}) = \\ &= (R' \sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 & 0 \\ 0 & I_{n-\text{rank}(A)} \end{pmatrix} (R' \sqrt{V}), \end{aligned}$$

Así, si tomamos

$$T = R' \sqrt{V}$$

y

$$J = \begin{pmatrix} j_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & j_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & j_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 & 0 \\ 0 & I_{n-\text{rank}(A)} \end{pmatrix},$$

resulta que

$$H = T^{-1} J T \otimes_1$$

y, por ende, que

$$|j_i| < 1, \quad i = 1, 2, \dots, \text{rank}(A) \quad \text{y} \quad |j_{\text{rank}(A)+i}| = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n - \text{rank}(A) \quad \otimes_2.$$

Lema 2 (Existencia y unicidad de las soluciones de los problemas de Mínimos Cuadrados lineales del tipo “Goal-Attainment” definido positivo a dos niveles).

Sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$ y $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$; $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$. Consideremos el problema de Mínimos Cuadrados lineales a dos niveles

$$\min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2} (x - \tilde{x})' V (x - \tilde{x}),$$

donde $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$. Si la matriz V es una matriz definida positiva arbitraria dada, entonces

$$1.- \text{Arg} \min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2} (x - \tilde{x})' V (x - \tilde{x}) = \left\{ \text{arg} \min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2} (x - \tilde{x})' V (x - \tilde{x}) \right\}.$$

$$2.- \text{arg} \min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2} (x - \tilde{x})' V (x - \tilde{x}) = (R' \sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n - \text{rank}(A)} \end{pmatrix} (R' \sqrt{V}) \tilde{x} +$$

$+ A^+ b$, donde R es la matriz-factor derecho de la SVD de $A(\sqrt{V})^{-1}$.

Demostración.

Por definición del Problema General de Mínimos Cuadrados lineales en dimensiones finitas sin restricciones [5, 6, 16, 18, 48],

$$\text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2 = \{x \in \mathbf{R}^n \mid A' Ax = A' b\}.$$

Luego,

$$\text{Arg} \min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax-b\|_2^2} (x - \tilde{x})'V(x - \tilde{x}) = \text{Arg} \min_{x \in \{x \in \mathbf{R}^n \mid A'Ax=A'b\}} (x - \tilde{x})'V(x - \tilde{x}).$$

Observemos que en la parte derecha de la anterior igualdad aparece un caso especial de problema ya investigado en la Programación Matemática Convexa, conocido como Problema de Programación Cuadrática del tipo “goal-attainment” con restricciones lineales [16]

$$\min_{x \in \{x \in \mathbf{R}^n \mid A'Ax=A'b\}} (x - \tilde{x})'V(x - \tilde{x});$$

en cuyo caso, si la matriz V es definida positiva (condición necesaria y suficiente de existencia y unicidad de un punto de mínimo [16]), entonces no solamente

$$\text{Arg} \min_{x \in \{x \in \mathbf{R}^n \mid A'Ax=A'b\}} (x - \tilde{x})'V(x - \tilde{x}) \neq \mathbf{f},$$

sino que, también,

$$\text{Arg} \min_{x \in \{x \in \mathbf{R}^n \mid A'Ax=A'b\}} (x - \tilde{x})'V(x - \tilde{x}) = \left\{ \arg \min_{x \in \{x \in \mathbf{R}^n \mid A'Ax=A'b\}} (x - \tilde{x})'V(x - \tilde{x}) \right\}.$$

Obviamente, por las mismas razones recién aducidas,

$$\arg \min_{x \in \{x \in \mathbf{R}^n \mid A'Ax=A'b\}} (x - \tilde{x})'V(x - \tilde{x}) = \arg \min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax-b\|_2^2} (x - \tilde{x})'V(x - \tilde{x}).$$

Por tanto,

$$\text{Arg} \min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax-b\|_2^2} (x - \tilde{x})'V(x - \tilde{x}) = \left\{ \arg \min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax-b\|_2^2} (x - \tilde{x})'V(x - \tilde{x}) \right\} \otimes_1.$$

Aquí, después de imprescindibles transformaciones basadas en las factorizaciones de Cholesky de V [18, 48] y de la SVD de $A(\sqrt{V})^{-1}$, no es difícil obtener, con ayuda de los multiplicadores de Lagrange [16], que

$$\arg \min_{x \in \{x \in \mathbf{R}^n \mid A'Ax = A'b\}} (x - \tilde{x})'V(x - \tilde{x}) = (R'\sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-\text{rank}(A)} \end{pmatrix} (R'\sqrt{V})\tilde{x} + A^+b,$$

donde R es la matriz, factor derecho de la SVD de $A(\sqrt{V})^{-1}$.

Pero, como ya habíamos visto,

$$\arg \min_{x \in \{x \in \mathbf{R}^n \mid A'Ax = A'b\}} (x - \tilde{x})'V(x - \tilde{x}) = \arg \min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2} (x - \tilde{x})'V(x - \tilde{x}).$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} & \arg \min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2} (x - \tilde{x})'V(x - \tilde{x}) = \\ & = (R'\sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-\text{rank}(A)} \end{pmatrix} (R'\sqrt{V})\tilde{x} + A^+b \otimes_2. \end{aligned}$$

Teorema 2 (Propiedades aproximantes de las iteraciones de desglose aproximante).

Si $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva arbitraria dada, entonces toda iteración de desglose aproximante

$$x^{[k+1]} = (V + A'A)^{-1}(V - A'A)x^{[k]} + 2(V + A'A)^{-1}A'b, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

para la solución de sistemas normales de ecuaciones

$$A'Ax = A'b,$$

cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$; $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$, posee las siguientes propiedades aproximantes:

1.- $\forall t \in \mathbf{N} \mid t < +\infty$,

$$x^{[t]} = \left((V + A'A)^{-1}(V - A'A) \right)^t x^{[0]} + \left(I - \left((V + A'A)^{-1}(V - A'A) \right)^t \right) A^+ b.$$

$$2.- \lim_{k \rightarrow +\infty} x^{[k+1]} = x^* = \arg \min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2} (x - x^{[0]})_V (x - x^{[0]}).$$

$$3.- x^{[k]} \neq x^*, \left\| (\sqrt{V})(x^{[k+1]} - x^*) \right\|_2^2 < \left\| (\sqrt{V})(x^{[k]} - x^*) \right\|_2^2, k = 0, 1, 2, \dots.$$

$$4.- \left\| (\sqrt{V})(x^{[k+1]} - x^*) \right\|_2^2 \leq \left\| \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right) \right\|_2^2 \left\| (\sqrt{V})(x^{[k]} - x^*) \right\|_2^2, k = 0, 1, 2, \dots; \text{ donde}$$

$$\left\| \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right) \right\|_2 < 1.$$

$$5.- \left\| x^{[k+1]} - x^* \right\|_2 \leq$$

$$\leq \left\| (R' \sqrt{V})^{-1} \right\|_2 \left\| I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right\|_2^{k+1} \left\| \left[(R' \sqrt{V}) x^{[0]} \right]_{1:\text{rank}(A)} - S^{-1} [L' b]_{1:\text{rank}(A)} \right\|_2,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots; \left\| I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right\|_2 < 1, \text{ donde } L \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R', S \in \mathbf{R}^{\text{rank}(A) \times \text{rank}(A)}, \text{ es la}$$

factorización de la SVD de la matriz $A(\sqrt{V})^{-1}$.

Demostración.

Sea $L \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R'$ la factorización de la SVD de la matriz $A(\sqrt{V})^{-1}$, donde $S \in \mathbf{R}^{\text{rank}(A) \times \text{rank}(A)}$. Luego, la fórmula de las iteraciones de desglose aproximante

$$x^{[k+1]} = (V + A' A)^{-1} (V - A' A) x^{[k]} + 2(V + A' A)^{-1} A' b, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

puede ser reescrita así:

$$\begin{aligned} x^{[k+1]} &= (R' \sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 & 0 \\ 0 & I_{n-\text{rank}(A)} \end{pmatrix} (R' \sqrt{V}) x^{[k]} + \\ &+ (R' \sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} 2(I + S^2)^{-1} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L' b, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Observemos que, debido al carácter estacionario lineal de toda iteración de desglose aproximante, al retroiterar desde k hasta cero, obtenemos

$$\begin{aligned} x^{[k+1]} &= (R' \sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^{k+1} & 0 \\ 0 & I_{n-\text{rank}(A)} \end{pmatrix} (R' \sqrt{V}) x^{[0]} + \\ &+ (R' \sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} 2 \sum_{t=1}^k \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^{k+1-t} (I + S^2)^{-1} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L' b, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

es decir, obtenemos $x^{[k+1]}$ como la $(k+1)$ -ésima suma parcial de una cierta progresión geométrica múltiple,

$$x^{[k+1]} = (R' \sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^{k+1} & 0 \\ 0 & I_{n-\text{rank}(A)} \end{pmatrix} (R' \sqrt{V}) x^{[0]} +$$

$$+ (R'\sqrt{V})^{-1} \left(\begin{array}{c} I - \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^{k+1} \\ 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} S^{-1} \quad 0 \\ 0 \end{array} L'b, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Por tanto, $\forall t \in \mathbf{N} \mid t < +\infty$, tiene lugar que

$$x^{[t]} = \left((V + A'A)^{-1} (V - A'A) \right)^t x^{[0]} + \left(I - \left((V + A'A)^{-1} (V - A'A) \right)^t \right) A^+ b \otimes_1.$$

Como ya habíamos visto antes,

$$x^{[k+1]} = (R'\sqrt{V})^{-1} \left(\begin{array}{c} I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \\ 0 \end{array} \right)^{k+1} \begin{array}{c} 0 \\ I_{n-\text{rank}(A)} \end{array} (R'\sqrt{V})x^{[0]} + \\ + (R'\sqrt{V})^{-1} \left(\begin{array}{c} I - \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^{k+1} \\ 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} S^{-1} \quad 0 \\ 0 \end{array} L'b, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

donde $L \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R'$ es la factorización de la SVD de la matriz $A(\sqrt{V})^{-1}$,

$S \in \mathbf{R}^{\text{rank}(A) \times \text{rank}(A)}$. Luego, según el punto 2 del Lema 1,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{[k+1]} = \lim_{k \rightarrow +\infty} (R'\sqrt{V})^{-1} \left(\begin{array}{c} I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \\ 0 \end{array} \right)^{k+1} \begin{array}{c} 0 \\ I_{n-\text{rank}(A)} \end{array} (R'\sqrt{V})x^{[0]} + \\ + \lim_{k \rightarrow +\infty} (R'\sqrt{V})^{-1} \left(\begin{array}{c} I - \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^{k+1} \\ 0 \end{array} \right) \begin{array}{c} S^{-1} \quad 0 \\ 0 \end{array} L'b = \\ = (R'\sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-\text{rank}(A)} \end{pmatrix} (R'\sqrt{V})x^{[0]} + (R'\sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L'b.$$

Teniendo en cuenta que $A^+ = (R'\sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L'$, al hacer las sustituciones pertinentes,

obtenemos

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{[k+1]} = (R'\sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-\text{rank}(A)} \end{pmatrix} (R'\sqrt{V})x^{[0]} + A^+b$$

y, por tanto, según el Lema 2, obtenemos finalmente

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{[k+1]} = \arg \min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax-b\|_2^2} (x - x^{[0]})V(x - x^{[0]})$$

cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$ y $x^{[0]} \in \mathbf{R}^n \otimes_2$.

Según el punto 1 del Teorema 1, la sucesión $\{x^{[k]}\}_{k=0,1,2,\dots} \subset \mathbf{R}^n$ de toda iteración de desglose aproximante es globalmente convergente, cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$; es decir,

$$\forall x^{[0]} \in \mathbf{R}^n, \exists x^* \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax-b\|_2^2 \mid \lim_{k \rightarrow +\infty} x^{[k]} = x^*.$$

Por eso, x^* es un punto fijo [5, 48] de toda iteración de desglose aproximante y, por ende, cumple que

$$x^* = (V + A'A)^{-1}(V - A'A)x^* + 2(V + A'A)^{-1}A'b,$$

donde la matriz $(V + A'A)^{-1}(V - A'A)$, que aparece en el miembro derecho de la igualdad anterior, es la matriz de iteración de desglose aproximante. Así, tiene lugar la igualdad

$$\forall x^{[k]} \neq x^*, x^{[k+1]} - x^* = (V + A'A)^{-1}(V - A'A)(x^{[k]} - x^*), \quad k = 0,1,2, \dots.$$

Sea $L \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R'$ la factorización de la SVD de la matriz $A(\sqrt{V})^{-1}$, donde

$S \in \mathbf{R}^{\text{rank}(A) \times \text{rank}(A)}$. Como consecuencia del punto 1 del Lema 1, la igualdad anterior puede ser reescrita como

$$(R' \sqrt{V}) \begin{pmatrix} x^{[k+1]} \\ -x^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 & 0 \\ 0 & I_{n-\text{rank}(A)} \end{pmatrix} (R' \sqrt{V}) \begin{pmatrix} x^{[k]} \\ -x^* \end{pmatrix},$$

$$k = 0, 1, 2, \dots;$$

cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$ y $x^{[0]} \in \mathbf{R}^n$.

Por ende,

$$\left\| (\sqrt{V}) \begin{pmatrix} x^{[k+1]} \\ -x^* \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 & 0 \\ 0 & I_{n-\text{rank}(A)} \end{pmatrix} (\sqrt{V}) \begin{pmatrix} x^{[k]} \\ -x^* \end{pmatrix} \right\|_2^2.$$

$$k = 0, 1, 2, \dots;$$

Pero, de acuerdo al punto 2 del Lema 1, $\forall x^{[k]} \neq x^*$,

$$\left\| \begin{pmatrix} I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 & 0 \\ 0 & I_{n-\text{rank}(A)} \end{pmatrix} (R' \sqrt{V}) \begin{pmatrix} x^{[k]} \\ -x^* \end{pmatrix} \right\|_2^2 < \left\| (R' \sqrt{V}) \begin{pmatrix} x^{[k]} \\ -x^* \end{pmatrix} \right\|_2^2.$$

Por tanto,

$$\forall x^{[k]} \neq x^*, \left\| \sqrt{V} \begin{pmatrix} x^{[k+1]} \\ -x^* \end{pmatrix} \right\|_2^2 < \left\| \sqrt{V} \begin{pmatrix} x^{[k]} \\ -x^* \end{pmatrix} \right\|_2^2, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad \otimes_3$$

Sea $L \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R'$ la factorización de la SVD de la matriz $A(\sqrt{V})^{-1}$, donde

$S \in \mathbf{R}^{\text{rank}(A) \times \text{rank}(A)}$. Como habíamos visto ya en la demostración del punto anterior,

$$(R'\sqrt{V})(x^{[k+1]} - x^*) = \begin{pmatrix} I - 2(I + S^2)^{-1}S^2 & 0 \\ 0 & I_{n-\text{rank}(A)} \end{pmatrix} (R'\sqrt{V})(x^{[k]} - x^*),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots;$$

cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$ y $x^{[0]} \in \mathbf{R}^n$. Pero, por la propiedad distributiva del producto de un vector con la suma de matrices,

$$(R'\sqrt{V})(x^{[k+1]} - x^*) = \begin{pmatrix} I - 2(I + S^2)^{-1}S^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (R'\sqrt{V})(x^{[k]} - x^*) +$$

$$+ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-\text{rank}(A)} \end{pmatrix} (R'\sqrt{V})(x^{[k]} - x^*).$$

Además, como consecuencia del punto 2 de este teorema,

$$\left\| (R'\sqrt{V})(x^{[k+1]} - x^*) \right\|_{\text{rank}(A)+1:n} = \left\| (R'\sqrt{V})(x^{[k]} - x^*) \right\|_{\text{rank}(A)+1:n} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Luego,

$$(R'\sqrt{V})(x^{[k+1]} - x^*) = \begin{pmatrix} I - 2(I + S^2)^{-1}S^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (R'\sqrt{V})(x^{[k]} - x^*),$$

$$k = 0, 1, 2, \dots$$

De donde,

$$\left\| (R'\sqrt{V})(x^{[k+1]} - x^*) \right\|_2^2 \leq \left\| \begin{pmatrix} I - 2(I + S^2)^{-1}S^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\|_2^2 \left\| (R'\sqrt{V})(x^{[k]} - x^*) \right\|_2^2$$

y, por tanto,

$$\left\| \sqrt{V}(x^{[k+1]} - x^*) \right\|_2^2 \leq \left\| I - 2(I + S^2)^{-1}S^2 \right\|_2^2 \left\| \sqrt{V}(x^{[k]} - x^*) \right\|_2^2,$$

$$k = 0, 1, 2, \dots;$$

donde, según el punto 2 del Lema 1, $\left\| I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right\|_2 < 1 \otimes_4$.

Sea $L \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R'$ la factorización de la SVD de la matriz $A(\sqrt{V})^{-1}$, donde $S \in \mathbf{R}^{\text{rank}(A) \times \text{rank}(A)}$. Como ya habíamos visto en la demostración del punto anterior,

$$\begin{aligned} (R' \sqrt{V}) \begin{pmatrix} x^{[k+1]} - x^* \\ x^{[k]} - x^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (R' \sqrt{V}) \begin{pmatrix} x^{[k+1]} - x^* \\ x^{[k]} - x^* \end{pmatrix}, \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

De donde, después de retroiterar hasta $k = 0$, resulta

$$\begin{aligned} (R' \sqrt{V}) \begin{pmatrix} x^{[k+1]} - x^* \\ x^{[0]} - x^* \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (R' \sqrt{V}) \begin{pmatrix} x^{[k+1]} - x^* \\ x^{[0]} - x^* \end{pmatrix} \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

y, por ende,

$$\begin{aligned} x^{[k+1]} - x^* &= (R' \sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^{k+1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (R' \sqrt{V}) \begin{pmatrix} x^{[k+1]} - x^* \\ x^{[0]} - x^* \end{pmatrix}; \\ k &= 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Aquí, de acuerdo al punto 2 del presente teorema, al punto 2 del Lema 2 y al hecho de que

$A^+ = (R' \sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L'$, después de hacer las necesarias transformaciones, obtenemos

$$x^* - x^{[0]} = -(R' \sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} I_{\text{rank}(A)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (R' \sqrt{V}) x^{[0]} + (R' \sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L' b$$

y, como consecuencia,

$$x^{[k+1]} - x^* = (R'\sqrt{V})^{-1} \left(\left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^{k+1} \begin{pmatrix} ((R'\sqrt{V})x^{[0]})_{1:\text{rank}(A)} - S^{-1}[L'b]_{1:\text{rank}(A)} \\ 0 \end{pmatrix} \right)$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} & \|x^{[k+1]} - x^*\|_2 \leq \\ & \leq \left\| (R'\sqrt{V})^{-1} \right\|_2 \left\| I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right\|_2^{k+1} \left\| \begin{pmatrix} ((R'\sqrt{V})x^{[0]})_{1:\text{rank}(A)} - S^{-1}[L'b]_{1:\text{rank}(A)} \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_2; \end{aligned}$$

donde, según el punto 1 del Lema 1, tiene lugar que $\left\| I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right\|_2 < 1$, cualesquiera

sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$ y $x^{[0]} \in \mathbf{R}^n \otimes_5$.

Corolario 1 (Decrecimiento estricto de la distancia entre iterados vecinos).

Si $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva arbitraria dada, entonces toda iteración de desglose aproximante

$$x^{[k+1]} = (V + A'A)^{-1} (V - A'A)x^{[k]} + 2(V + A'A)^{-1} A'b, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

para la solución del sistema normal de ecuaciones

$$A'Ax = A'b,$$

cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$; $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$, cumple que

$$\forall x^{[k]} \neq x^{[k-1]}, \left\| \left(\sqrt{V} \right) x^{[k+1]} - x^{[k]} \right\|_2 < \left\| \left(\sqrt{V} \right) x^{[k]} - x^{[k-1]} \right\|_2, \quad k = 1, 2, 3, \dots$$

Demostración.

Sea $L \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R'$ la factorización de la SVD de la matriz $A(\sqrt{V})^{-1}$, donde

$S \in \mathbf{R}^{rank(A) \times rank(A)}$. Como ya habíamos visto, la fórmula de las iteraciones de desglose aproximante

$$x^{[k+1]} = (V + A'A)^{-1}(V - A'A)x^{[k]} + 2(V + A'A)^{-1}A'b, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

puede ser reescrita así:

$$\begin{aligned} x^{[k+1]} &= \left(R' \sqrt{V} \right)^{-1} \begin{pmatrix} I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 & 0 \\ 0 & I_{n-rank(A)} \end{pmatrix} \left(R' \sqrt{V} \right) x^{[k]} + \\ &+ \left(R' \sqrt{V} \right)^{-1} \begin{pmatrix} 2(I + S^2)^{-1} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L'b, \quad k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

No es difícil comprender que al restar de esta identidad la correspondiente al paso anterior, y premultiplicar la identidad resultante por $(R' \sqrt{V})$, obtenemos

$$\begin{aligned} \left(R' \sqrt{V} \right) \left(x^{[k+1]} - x^{[k]} \right) &= \begin{pmatrix} I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 & 0 \\ 0 & I_{n-rank(A)} \end{pmatrix} \left(R' \sqrt{V} \right) \left(x^{[k]} - x^{[k-1]} \right), \\ &k = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

De donde,

$$\left\| \left(R' \sqrt{V} \right) \left(x^{[k+1]} - x^{[k]} \right) \right\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 & 0 \\ 0 & I_{n-rank(A)} \end{pmatrix} \left(R' \sqrt{V} \right) \left(x^{[k]} - x^{[k-1]} \right) \right\|_2^2.$$

Pero, de acuerdo al punto 2 del Lema 1, tiene lugar que

$$\left\| \begin{pmatrix} I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 & 0 \\ 0 & I_{n-\text{rank}(A)} \end{pmatrix} (R' \sqrt{V})(x^{[k]} - x^{[k-1]}) \right\|_2^2 < \left\| (R' \sqrt{V})(x^{[k]} - x^{[k-1]}) \right\|_2^2.$$

Por tanto,

$$\forall x^{[k]} \neq x^{[k-1]}, \left\| (\sqrt{V})(x^{[k+1]} - x^{[k]}) \right\|_2 < \left\| (\sqrt{V})(x^{[k]} - x^{[k-1]}) \right\|_2, \quad k = 1, 2, 3, \dots \otimes$$

Teorema 3 (Límite de convergencia global de la sucesión de la Regularización Iterada estándar de Tikhonov).

Si $I \in \mathbf{R}$, $I > 0$, es un escalar arbitrario dado, entonces la sucesión $\{x^{[k]}\}_{k=0,1,2,\dots} \subset \mathbf{R}^n$, generada por la versión estándar de la fórmula de la Regularización Iterada de Tikhonov en el sentido de Oganessian-Starostenko,

$$x^{[k+1]} = \arg \min_{x \in \mathbf{R}^n} \left\{ \|Ax - b\|_2^2 + I \|x - x^{[k]}\|_2^2 \right\}, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

cumple que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{[k]} = \arg \min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2} \left\| (\sqrt{2II + A'A})(x - x^{[0]}) \right\|_2^2,$$

cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$; $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$.

Demostración.

No es difícil constatar que si $I \in \mathbf{R}$, $I > 0$, es un escalar arbitrario dado, entonces toda matriz $V = 2II + A'A$ es definida positiva, cualquiera sea $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$; $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$. En efecto,

$$(\Delta x)' (2II + A'A)\Delta x \geq 2I \|\Delta x\|_2^2 > 0, \forall \Delta x \in \mathbf{R}^n, \Delta x \neq 0.$$

Tampoco es difícil percatarnos que, con esas mismas premisas y según las Definiciones 1 y 2, la matriz

$$?I + A'A = \frac{V + A'A}{2}$$

constituye la matriz de desglose aproximante de la versión estándar de la fórmula de la Regularización Iterada de Tikhonov en el sentido de Oganessian-Starostenko, como iteración estacionaria lineal de desglose aproximante,

$$x^{[k+1]} = I (?I + A'A)^{-1} x^{[k]} + (?I + A'A)^{-1} A'b, k = 0, 1, 2, \dots$$

Por tanto, de acuerdo al punto 2 del Teorema 2,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{[k]} = \arg \min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2} \left\| \left(\sqrt{2II + A'A} \right) (x - x^{[0]}) \right\|_2^2;$$

cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$; $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$ \otimes .

Teorema 4 (Límite de convergencia global de la sucesión de la Regularización Iterada no-estándar de Tikhonov).

Si $I \in \mathbf{R}$, $I > 0$, es un escalar arbitrario, entonces la sucesión $\{x^{[k]}\}_{k=0,1,2,\dots} \subset \mathbf{R}^n$, generada por la versión no-estándar de la fórmula de la Regularización Iterada de Tikhonov en el sentido de Oganessian-Starostenko,

$$x^{[k+1]} = \arg \min_{x \in \mathbf{R}^n} \left\{ \|Ax - b\|_2^2 + I \|D(x - x^{[k]})\|_2^2 \right\}, k = 0, 1, 2, \dots;$$

cumple que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{[k]} = \arg \min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax-b\|_2^2} \left\| \left(\sqrt{2ID'D + A'A} \right) (x - x^{[0]}) \right\|_2^2,$$

cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $D \in \mathbf{R}^{n \times n}$, tales que

$$\text{Null}(D) \cap \text{Null}(A) = \{0\}$$

y $b \in \mathbf{R}^m$; $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$.

Demostración.

No es difícil constatar que si $I \in \mathbf{R}$, $I > 0$, es un escalar arbitrario dado, entonces toda matriz $V = 2ID'D + A'A$ es definida positiva, cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $D \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$; tales que

$$\text{Null}(D) \cap \text{Null}(A) = \{0\}.$$

En efecto, si $\text{Null}(D) \cap \text{Null}(A) = \{0\}$, entonces sean $L_A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $L_D \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $S_A \in \mathbf{R}^{\text{rank}(A) \times \text{rank}(A)}$ y $S_D \in \mathbf{R}^{\text{rank}(A) \times \text{rank}(A)}$, $S_A^2 + S_D^2 = I_{\text{rank}(A)}$ y $R \in \mathbf{R}^{n \times n}$, no-singular, los factores de la Descomposición en Valores Singulares Generalizados (GSVD) de las matrices A y D [18, 24], $A = L_A \begin{pmatrix} S_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R^{-1}$ y $D = L_D \begin{pmatrix} S_D & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} R^{-1}$. Por tanto,

$$(\Delta x)' (2ID'D + A'A) \Delta x = (2I + 1) \left\| R^{-1} \Delta x \right\|_2^2 > 0, \quad \forall \Delta x \in \mathbf{R}^n, \quad \Delta x \neq 0.$$

Tampoco es difícil percatarnos que, con esas mismas premisas y según las Definiciones 1 y 2, la matriz

$$?D'D + A'A = \frac{V + A'A}{2}$$

resulta la matriz de desglose aproximante de la versión no-estándar de la fórmula de la Regularización Iterada de Tikhonov en el sentido de Oganessian-Starostenko, como iteración estacionaria lineal de desglose aproximante,

$$x^{[k+1]} = I(2D'D + A'A)^{-1}D'Dx^{[k]} + (2D'D + A'A)^{-1}A'b, \quad k = 0,1,2,\dots.$$

Por tanto, de acuerdo al punto 2 del Teorema 2,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{[k]} = \arg \min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax-b\|_2^2} \left\| \left(\sqrt{2ID'D + A'A} \right) (x - x^{[0]}) \right\|_2^2;$$

cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $D \in \mathbf{R}^{n \times n}$, tales que

$$\text{Null}(D) \cap \text{Null}(A) = \{0\}$$

y $b \in \mathbf{R}^m$; $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$ \otimes .

Teorema 5 (Las soluciones mínimo-cuadráticas lineales con norma euclídeana mínima como límites de convergencia global de iteraciones de desglose aproximante).

Si $I \in \mathbf{R}$, $I > 0$, es un escalar arbitrario dado, entonces la sucesión $\{x^{[k]}\}_{k=0,1,2,\dots} \subset \mathbf{R}^n$ de toda iteración de desglose aproximante para soluciones mínimo-cuadráticas lineales con norma euclídeana mínima

$$x^{[k+1]} = (II + A'A)^{-1}(II - A'A)x^{[k]} + 2(II + A'A)^{-1}A'b, \quad k = 0,1,2,\dots;$$

desde

$$x^{[0]} = 0,$$

converge a la única solución con norma euclídeana mínima del problema

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2,$$

cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$; $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$.

Demostración.

No es difícil constatar que si $I \in \mathbf{R}$, $I > 0$, es un escalar arbitrario dado, entonces cualquier matriz $V = II$ es definida positiva. En efecto, si $I \in \mathbf{R}$, $I > 0$, entonces

$$(\Delta x)' (II) \Delta x = I \|\Delta x\|_2^2 > 0, \forall \Delta x \in \mathbf{R}^n, \Delta x \neq 0.$$

Con esas mismas premisas, tampoco es difícil percatarnos que, según las Definiciones 1, 2 y 4, la matriz

$$Q = \frac{V + A'A}{2} = \frac{II + A'A}{2}$$

resulta la matriz de desglose aproximante de la iteración de desglose aproximante para soluciones mínimos-cuadráticas lineales con norma euclídeana mínima,

$$x^{[k+1]} = (II + A'A)^{-1} (II - A'A)x^{[k]} + 2(II + A'A)^{-1} A'b, k = 0, 1, 2, \dots$$

Por tanto, si $x^{[0]} = 0$, entonces, de acuerdo al punto 2 del Teorema 2,

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x^{[k]} = \arg \min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2} I \|x\|_2^2;$$

cualesquiera sean $I \in \mathbf{R}$, $I > 0$, $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$; $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$ \otimes .

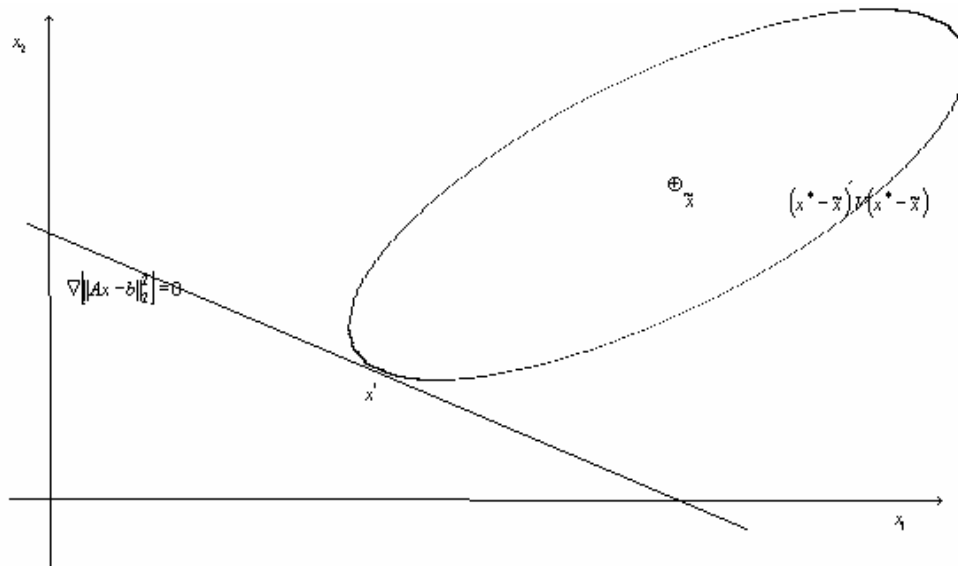


Figura 1. Representación geométrica en dos dimensiones de la solución de todo problema de Mínimos Cuadrados lineales del tipo “goal-attainment” sin restricciones a dos niveles.

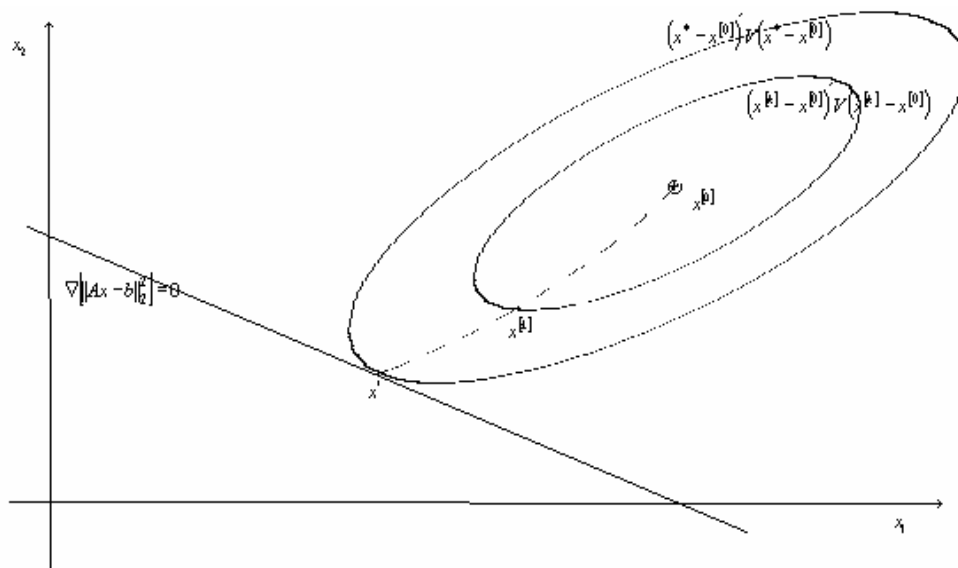


Figura 2. Esquema en dos dimensiones de la trayectoria de toda iteración de desglose aproximante.

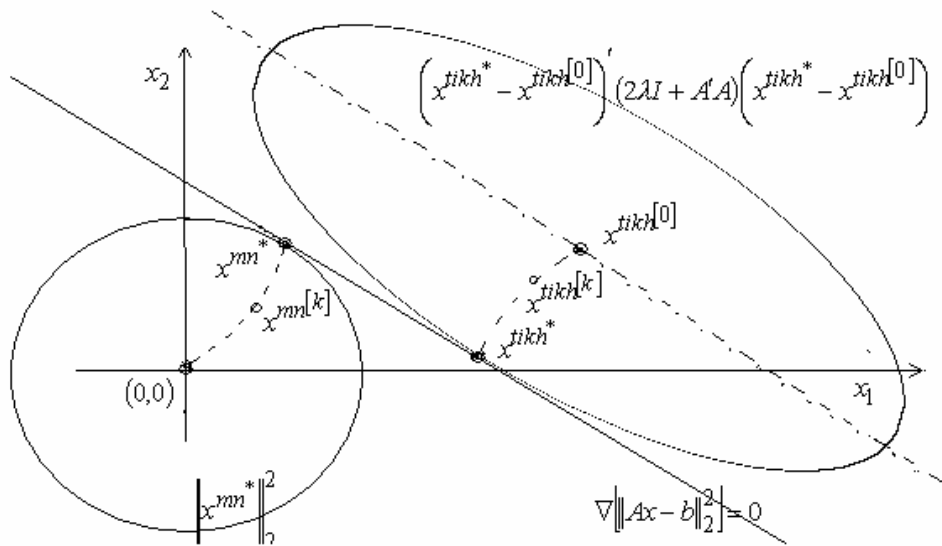


Figura 3. Esquema en dos dimensiones de las trayectorias de una sucesión de la Regularización Iterada estándar de Tikhonov y de una de la iteración de desglose aproximante para soluciones mínimo-cuadráticas con norma euclídeana mínima.

3. SEUDOITERACIONES DE DESGLOSE APROXIMANTE EN LA APROXIMACIÓN ROBUSTA DE SOLUCIONES DEL PROBLEMA GENERAL DE MÍNIMOS CUADRADOS LINEALES EN DIMENSIONES FINITAS SIN RESTRICCIONES¹².

3.1. Sumario del capítulo.

En este capítulo, sobre la base de los resultados del capítulo anterior, son introducidas las pseudoiteraciones de desglose aproximante como aplicaciones continuas [47] entre ciertas estructuras espaciales; cuya propiedad de continuidad respecto a los valores singulares de la matriz $A(\sqrt{V})^{-1}$ es demostrada y sirve así de fundamento para la definición de una nueva clase de fórmulas de cálculo directo para la aproximación robusta de soluciones del Problema General del mismo nombre. Adicionalmente, es argumentada una proposición heurística orientada a un compromiso entre precisión y estabilidad numéricas de los aproximados calculados por las fórmulas de la nueva clase.

3.2. Las pseudoiteraciones de desglose aproximante como aplicaciones paramétricas continuas de $R^{m \times n} \times R^m$ en R^n .

Los resultados del tipo Regularización de Tikhonov obtenidos (Teoremas 3, 4 y 5), llevan nuestra atención sobre aquellas propiedades de los iterados de desglose aproximante, que están vinculadas con la robustez numérica; es decir, con la continuidad [47] de su dependencia de los valores singulares de la matriz $A(\sqrt{V})^{-1}$ [56].

Por ello, procedemos a la investigación de las propiedades de la fórmula (19) de la pseudoiteratividad en cada paso finito dado (punto 1 del Teorema 2) como una aplicación paramétrica $\mathbf{j}_{V, \tilde{x}, t}(A, b)$,

¹² Los resultados, presentados en este capítulo, aparecen publicados en [35].

$$\mathbf{j}_{V, \tilde{x}, t}(A, b): \mathbf{R}^{m \times n} \times \mathbf{R}^m \xrightarrow{V, \tilde{x}, t} \mathbf{R}^n,$$

$$\mathbf{j}_{V, \tilde{x}, t}(A, b) = \left((V + A'A)^{-1}(V - A'A) \right)^t \tilde{x} + \left(I - \left((V + A'A)^{-1}(V - A'A) \right)^t \right) A^+ b \quad (22),$$

donde $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$ y $t \in \mathbf{Z}^+$, $t < +\infty$, son respectivamente una matriz definida positiva, un vector, y un escalar arbitrarios dados; aplicación que denominamos “Seudoiteración de Desglose Aproximante”, tal que si $\{x^{[k]}\}_{k=0,1,2,\dots} \subset \mathbf{R}^n$ es la sucesión de una iteración de desglose aproximante (17), entonces $\forall t \in \mathbf{Z}^+ \mid t < +\infty$,

$$x^{[t]} = \mathbf{j}_{V, x^{[0]}, t}(A, b) \quad (23).$$

Definición 5 (“Seudoiteración de desglose aproximante”).

Sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$, donde $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$. Definimos como seudoiteración de desglose aproximante toda aplicación paramétrica

$$\mathbf{j}_{V, \tilde{x}, t}(A, b): \mathbf{R}^{m \times n} \times \mathbf{R}^m \xrightarrow{V, \tilde{x}, t} \mathbf{R}^n,$$

tal que

$$\mathbf{j}_{V, \tilde{x}, t}(A, b) = \left((V + A'A)^{-1}(V - A'A) \right)^t \tilde{x} + \left(I - \left((V + A'A)^{-1}(V - A'A) \right)^t \right) A^+ b,$$

donde $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$ y $t \in \mathbf{Z}^+$, $t < +\infty$, son respectivamente una matriz definida positiva, un vector, y un escalar arbitrarios dados \otimes .

Definición 6 (“Seudoiterado de desglose aproximante”).

Sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$, donde $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$. Definimos como pseudoiterado de desglose aproximante cada elemento del conjunto imagen de toda pseudoiteración de desglose aproximante $\mathbf{j}_{V, \tilde{x}, t}(A, b)$, donde $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$ y $t \in \mathbf{Z}^+$, $t < +\infty$, son respectivamente una matriz definida positiva, un vector, y un escalar arbitrarios dados \otimes .

Definición 7 (“Número de pseudoiterados de desglose aproximante”).

Sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$, donde $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$. Definimos como número de pseudoiterados de desglose aproximante al parámetro escalar, $t \in \mathbf{Z}^+$, $t < +\infty$, de toda pseudoiteración de desglose aproximante $\mathbf{j}_{V, \tilde{x}, t}(A, b)$, donde $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$ y $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$, son respectivamente una matriz definida positiva y un vector arbitrarios dados \otimes .

Definición 8 (“Aproximado de referencia”¹³).

Sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$, donde $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$. Definimos como aproximado de referencia al parámetro vectorial $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$ de toda pseudoiteración de desglose aproximante $\mathbf{j}_{V, \tilde{x}, t}(A, b)$, donde $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$ y $t \in \mathbf{Z}^+$, $t < +\infty$, son respectivamente una matriz definida positiva y un escalar arbitrarios dados \otimes .

3.3. Las pseudoiteraciones de desglose aproximante y la pseudoiteratividad de las iteraciones de desglose aproximante.

Obviamente, debido precisamente a ese vínculo esencial (23) con las iteraciones de desglose aproximante, las pseudoiteraciones de desglose aproximante poseen la propiedad de ser

¹³ A diferencia del “aproximado inicial” definido en la Regularización de Tikhonov [15, 21, 24, 49], aquí el aproximado de referencia no tiene que ser un aproximado de la solución seudoinvertida (o sea, de una solución mínimocuadrática lineal de mínima norma), sino un punto del espacio de aproximados de las soluciones –mínima norma o no- del problema original, que sirva de referencia a una de ellas.

estrictamente descendentes (punto 1 del Teorema 6) y estrictamente aproximantes (punto 2 del Teorema 6). Luego, si

$$0 \ll t < +\infty,$$

entonces

$$\|A\mathbf{j}_{V,\tilde{x},t}(A,b) - b\|_2^2 \ll \|A\tilde{x} - b\|_2^2$$

y

$$\|(\sqrt{V})\mathbf{j}_{V,\tilde{x},t}(A,b) - x^*\|_2^2 \ll \|(\sqrt{V})(\tilde{x} - x^*)\|_2^2,$$

donde asumimos que el aproximado de referencia \tilde{x} difiere de la solución x^* y es algún aproximado que tratamos de mejorar.

Sean $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$, $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$ y $t \in \mathbf{Z}^+$, $t < +\infty$; respectivamente una matriz definida positiva, un vector y un escalar arbitrarios dados. De acuerdo a la definición de pseudoiteraciones de desglose aproximante (Definición 5) y al Teorema 7, $\mathbf{j}_{V,\tilde{x},t}$ es una aplicación paramétrica de $\mathbf{R}^{m \times n} \times \mathbf{R}^m$ en \mathbf{R}^n : que depende continuamente [47] de los valores singulares de la matriz $A(\sqrt{V})^{-1}$;

$$\begin{aligned} \forall (A,b) \in \mathbf{R}^{m \times n} \times \mathbf{R}^m \text{ y } \forall i \in \mathbf{N}, 1 \leq i \leq \text{rank}(A) - 1, \\ \lim_{[\text{diag}(S)]_{i+1:\text{rank}(A)} \rightarrow +0} \left(\mathbf{R}'\sqrt{V} \mathbf{j}_{I,(\mathbf{R}'\sqrt{V})\tilde{x},t} \left(\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L'b \right) \right) = \\ = \left(\mathbf{R}'\sqrt{V} \mathbf{j}_{I,(\mathbf{R}'\sqrt{V})\tilde{x},t} \left(\begin{pmatrix} [S]^{l:i} & 0 \\ 1:i & \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L'b \right) \right); \end{aligned}$$

donde $A(\sqrt{V})^{-1} = L \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R'$ es la factorización de la SVD de la matriz $A(\sqrt{V})^{-1}$. Por tanto, según la Teoría de Aproximaciones y la de Perturbaciones [5, 6, 15, 18, 48, 49, 56], $\mathbf{j}_{V, \tilde{x}, t}$ es una aplicación paramétrica continua [47] respecto a los datos A y b del Problema General (1)

$$\forall (\tilde{A}, \tilde{b}) \in \mathbf{R}^{m \times n} \times \mathbf{R}^m, \quad \lim_{(A, b) \rightarrow (\tilde{A}, \tilde{b})} \mathbf{j}_{V, \tilde{x}, t}(A, b) = \mathbf{j}_{V, \tilde{x}, t}(\tilde{A}, \tilde{b}).$$

Más detalladamente: para todos \tilde{A} y \tilde{b} , cualquiera sea $0 < \mathbf{e} \ll +\infty$, existen al menos $0 < \mathbf{d}_A \ll +\infty$ y $0 < \mathbf{d}_b \ll +\infty$, tales que

$$\left(\|A - \tilde{A}\|_F \leq \mathbf{d}_A, \|b - \tilde{b}\|_2 \leq \mathbf{d}_b \right) \Rightarrow \left\| \mathbf{j}_{V, \tilde{x}, t}(A, b) - \mathbf{j}_{V, \tilde{x}, t}(\tilde{A}, \tilde{b}) \right\|_2 \leq \mathbf{e}.$$

Luego, $\mathbf{j}_{V, \tilde{x}, t}$ es una aproximación numericamente robusta; es decir, cualesquiera sean los datos A y b del Problema General (1), perturbaciones acotadas ("pequeñas") en ellos repercutirán solamente como cambios acotados ("pequeños") en la imagen [6, 15, 18, 48, 49, 56]:

No es difícil constatar que, gracias a la propiedad de continuidad demostrada, la matriz $(R' \sqrt{V})^{-1} \Phi_t(S) (R' \sqrt{V})$,

$$\Phi_t(S) = \begin{pmatrix} I - \begin{pmatrix} I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \\ 0 \end{pmatrix}^t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

cumple algebraicamente en

$$\mathbf{j}_{V, \tilde{x}, t}(A, b) = (R' \sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \\ 0 \end{pmatrix}^t & 0 \\ 0 & I_{n - \text{rank}(A)} \end{pmatrix} (R' \sqrt{V}) \tilde{x} +$$

$$+ (R'\sqrt{V})^{-1} \left(\begin{array}{c} \left(I - \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^t \\ 0 \end{array} \right) S^{-1} \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right) L'b$$

un papel de filtraje numérico $\forall t \in \mathbf{Z}^+ \mid t < +\infty$ (Corolario 2);

$$j_{V, \tilde{x}, t}(A, b) = (R'\sqrt{V})^{-1} (I - \Phi_t(S)) (R'\sqrt{V}) \tilde{x} + (R'\sqrt{V})^{-1} \Phi_t(S) (R'\sqrt{V}) A^+ b \quad (24)$$

análogo, por ejemplo, a la tarea de las matrices de filtro [19, 21, 24, 40] de las versiones estándar (9) y no-estándar (10) de la Regularización directa de Tikhonov. En efecto, $\forall i \in \mathbf{N} \mid 1 \leq i \leq \text{rank}(A)$,

$$\lim_{[diag(S)]_{i:rank(A)} \rightarrow 0} I - \Phi_t(S) = \begin{pmatrix} I - [\Phi_t(S)]_{1:i-1}^{1:i-1} & 0 \\ 0 & I_{n-i+1} \end{pmatrix}$$

y

$$\lim_{[diag(S)]_{i:rank(A)} \rightarrow 0} \Phi_t(S) S^{-1} = \begin{pmatrix} [\Phi_t(S)]_{1:i-1}^{1:i-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [S^{-1}]_{1:i-1}^{1:i-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\forall t \in \mathbf{Z}^+ \mid t < +\infty$.

Desafortunadamente, las propiedades de todo iterado de desglose aproximante (17) $x^{[k]}$, $k = 0, 1, 2, \dots$; demostradas en el Teorema 7 y en el Corolario 2, no tienen lugar en la solución x^* del Problema General (1), el límite de su sucesión $\{x^{[k]}\}_{k=0,1,2,\dots} \subset \mathbf{R}^n$ (Teorema 8). En efecto, no es difícil constatar que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \lim_{[diag(S)]_{i:rank(A)} \rightarrow 0} \Phi_t(S) S^{-1} \neq \lim_{[diag(S)]_{i:rank(A)} \rightarrow 0} \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_t(S) S^{-1}.$$

No obstante, si \tilde{x} es una solución aproximada del Problema General (1) y t^* es un número de iterados de desglose aproximante arbitrario dado; ambos asumidos o calculados previamente de

algún modo (es decir, $\tilde{x} \approx x^*$, pero $\tilde{x} \neq x^*$ y $t^* \in \mathbf{Z}^+$, $0 \leq t^* < +\infty$), entonces \hat{x}^* ,

$$\hat{x}^* = \mathbf{j}_{V, \tilde{x}, t^*}(A, b),$$

es, según (23), una solución aproximada numericamente robusta, calculada mediante la fórmula (19), cualesquiera sean los datos A y b de ese problema.

Es decir, las pseudoiteraciones de desglose aproximante son toda una clase de fórmulas de cálculo directo para la aproximación robusta de soluciones del Problema General (1) [35].

3.4. Casos especiales notables de pseudoiteraciones de desglose aproximante.

Así, como ejemplos de casos especiales notables de pseudoiteraciones de desglose aproximante para $t^* = 1$ podemos mencionar las versiones estándar (9),

$$\begin{aligned} \hat{x}^* &= \arg \min_{x \in \mathbf{R}^n} \left\{ \|Ax - b\|_2^2 + \mathbf{I} \|x - \tilde{x}\|_2^2 \right\} = \\ &= \mathbf{I}(A'A + \mathbf{I})^{-1} \tilde{x} + (A'A + \mathbf{I})^{-1} A'b, \end{aligned}$$

y no-estándar (10),

$$\begin{aligned} \hat{x}^* &= \arg \min_{x \in \mathbf{R}^n} \left\{ \|Ax - b\|_2^2 + \mathbf{I} \|D(x - \tilde{x})\|_2^2 \right\} = \\ &= \mathbf{I}(A'A + \mathbf{I}D'D)^{-1} D'D\tilde{x} + (A'A + \mathbf{I}D'D)^{-1} A'b; \end{aligned}$$

de la fórmula de la Regularización directa de Tikhonov, donde $I \in \mathbf{R}$, $I > 0$; $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$ y $D \in \mathbf{R}^{q \times n}$, $q \in \mathbf{N}$; tal que $\text{Null}(A) \cap \text{Null}(D) = \{0\}$ (Corolarios 3 y 4).

3.5. Proposición heurística para la determinación del número de pseudoiterados de desglose aproximante.

A continuación, presentamos una proposición heurística para la determinación del número de pseudoiterados de desglose aproximante como el número de pasos t^* estimado a priori en que la iteración de desglose aproximante asociada alcanza un compromiso de precisión versus estabilidad numéricas de los iterados como aproximados de su solución límite.

A pesar de los resultados de los teoremas demostrados, debemos señalar que, en circunstancias especiales –determinadas por la selección de $x^{[0]}$ y, especialmente, de V -, los iterados de desglose aproximante, calculados ya sea mediante (17) o (19), podrían comenzar a presentar un mal comportamiento ante errores de redondeo-truncamiento [5, 16, 18, 48].

La figura 4 muestra esquemáticamente cómo una sucesión $\{x^{[k]}\}_{k=0,1,2,\dots} \subset \mathbf{R}^n$ de iterados de desglose aproximante podría comenzar a describir, dentro de una vecindad de su límite x^* , a partir de un cierto t^* , una trayectoria de tipo “oscilatorio” o de “zig-zag”, semejante a las que suelen describir muy conocidas iteraciones -por ejemplo, “Descenso por Coordenadas”, “Descenso Acelerado”, etc. [16, 18]-, como manifestación gráfica de mal comportamiento numérico [16].

En efecto, observemos que si $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva arbitraria dada, entonces, según la propiedad de pseudoiteratividad de las iteraciones de desglose aproximante (punto 1 del Teorema 2), $\forall t \in \mathbf{Z}^+ \mid t < +\infty$,

$$x^{[t]} = \mathbf{j}_{V, x^{[0]}, t}(A, b) = \left((V + A'A)^{-1} (V - A'A) \right)^t x^{[0]} + \left(I - \left((V + A'A)^{-1} (V - A'A) \right)^t \right) A^+ b,$$

cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$ y $x^{[0]} \in \mathbf{R}^n$. Luego, al ser el límite x^* de la sucesión $\{x^{[k]}\}_{k=0,1,2,\dots} \subset \mathbf{R}^n$ un punto fijo de toda iteración de desglose aproximante (17), tomando en cuenta el punto 1 del Lema 1, tenemos que

$$x^{[t]} - x^* = (R' \sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^t & 0 \\ 0 & I_{n-\text{rank}(A)} \end{pmatrix} (R' \sqrt{V}) (x^{[0]} - x^*),$$

donde $A(\sqrt{V})^{-1} = L \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R'$ es la factorización de la SVD de $A(\sqrt{V})^{-1}$.

Al considerar detenidamente las dos igualdades anteriores sobre la base del resultado del punto 2 del Lema 1, de los resultados de decrecimiento estricto del Teorema 2 y del Teorema 9, no queda ninguna duda de que, en general, si $\mathbf{k} \left((V + A'A)^{-1} (V - A'A) \right) \neq 1$, entonces, el aumento del número de iterados de desglose aproximante t conlleva a que

- Todas las componentes de $x^{[t]}$ tienden monotonamente a su valor correspondiente en el límite x^* a velocidades, en principio, muy distintas.
- $\left\| \sqrt{V} (x^{[t]} - x^*) \right\|_2$ decrece estrictamente; o sea, la precisión de $x^{[t]}$ mejora monotonamente como aproximado de x^* .
- La condicionalidad de la matriz potencia $\left((V + A'A)^{-1} (V - A'A) \right)^t$ empeora monotonamente durante el acercamiento de $x^{[t]}$ al límite x^* .

Luego, la simultaneidad de estos tres procesos significaría la no-conmensurabilidad de las magnitudes de error relativo por componente [6, 16, 18] de cada iterado dentro de una cierta vecindad de x^* , a partir de un cierto t^* , $0 \leq t^* < +\infty$ (Teorema 9); por ende, en las circunstancias reales del cálculo en precisión finita (con truncamiento-redondeo), esa simultaneidad podría conllevar a un mal comportamiento numérico, causado -según Fletcher

[16]- por la pérdida de las correlaciones numéricas verdaderas entre las componentes de cada iterado.

Así, el Teorema 9 aporta una explicación verosímil del posible mal-comportamiento numérico de los iterados de desglose aproximante $x^{[t]}$ al tender a su límite, basada en las circunstancias de la transición de esos iterados desde su continuidad para todo $t < +\infty$ (Teorema 7) hacia su discontinuidad en $t = +\infty$ (Teorema 8) respecto a los valores singulares de $A(\sqrt{V})^{-1}$.

Luego, para la determinación de números de pseudoiterados de desglose aproximante t^* pueden ser legítimamente derivados criterios de parada a priori, basados en la idea de la imposición preventiva de un tope superior para el número de condición de la matriz potencia de iteración de desglose aproximante, aprovechando la relación directa del mejoramiento de la precisión de los aproximados y del empeoramiento de la condicionalidad de esa matriz con el aumento de t .

Asumamos que $\mathbf{k}\left(A(\sqrt{V})^{-1}\right) \neq 1$ y que $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$ es ya un aproximado de la solución buscada del Problema General (1), obtenido previamente de algún modo, de forma tal que $x^{[0]} = \tilde{x}$. Así, pues,

$$\left(\mathbf{k}\left(A(\sqrt{V})^{-1}\right) \neq 1\right) \Leftrightarrow \left(\mathbf{k}\left((V + A'A)^{-1}(V - A'A)\right) \neq 1\right)$$

y, al transformar la fórmula (17) con ayuda de la SVD de $A(\sqrt{V})^{-1}$, resulta que

$$x^{[t]} = (R'\sqrt{V})^{-1} \left(\begin{array}{cc} \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^t & 0 \\ 0 & I_{n-\text{rank}(A)} \end{array} \right) (R'\sqrt{V})x^{[0]} + \\ + (R'\sqrt{V})^{-1} \left(\begin{array}{cc} \left(I - \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^t \right) S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) L'b.$$

Luego, sobre la base del Teorema 9, es legítimo tomar como número de pseudoiterados de desglose aproximante algún número $t^* \in \mathbb{N}$, tal que $\forall t \leq t^* < +\infty$,

$$\left(\mathbf{k} \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right) \right)^t \leq \left(\mathbf{k} \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right) \right)^{t^*} \approx \frac{1}{\mathbf{e}},$$

donde \mathbf{e} es valor normativo de tolerancia numérica¹⁴. Por tanto,

$$t^* = \text{int} \left(\frac{\log(\mathbf{e}^{-1})}{\log \left(\mathbf{k} \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right) \right)} \right) \quad (25).$$

3.6. Comentario complementario final.

Para comprender más claramente la fórmula (25) como criterio a priori simple de parada de las iteraciones de desglose aproximante –es decir, para determinar t^* –, analicemos más detenidamente alguno de los peores casos; por ejemplo, cuando

$$\mathbf{k} \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right) \geq \frac{1}{\mathbf{e}} \gg 1,$$

donde \mathbf{e} es el valor de tolerancia numérica. Denotemos, para simplificar la notación,

$$\mathbf{k} = \mathbf{k} \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right).$$

No es difícil comprender que si

¹⁴ Por ejemplo, en las versiones actuales de MatLab, la función estándar “eps” devuelve la distancia desde 1 hasta el número flotante más cercano y mayor, como el valor normativo de la precisión relativa en punto flotante. Ese valor es usado como la tolerancia numérica asumida en funciones como la del cálculo de la matriz seudoinversa de Moore-Penrose o del rango de una matriz, entre otras.

$$\mathbf{t}^*(\mathbf{k}) = \text{int} \left(\frac{\log(\mathbf{e}^{-1})}{\log(\mathbf{k})} \right),$$

entonces

$$\lim_{\mathbf{k} \rightarrow (\mathbf{e}^{-1})_-} \mathbf{t}^*(\mathbf{k}) = 1,$$

mientras que

$$\lim_{\mathbf{k} \rightarrow (\mathbf{e}^{-1})_+} \mathbf{t}^*(\mathbf{k}) = 0.$$

Pero, de acuerdo a (23),

$$\begin{aligned} x[\mathbf{t}^*] &= \mathbf{j}_{V, \tilde{x}, \mathbf{t}^*}(A, b) = \\ &= \begin{cases} \tilde{x}, & \mathbf{t}^* = 0 \\ \left((V + A'A)^{-1}(V - A'A) \right) \tilde{x} + \left(I - \left((V + A'A)^{-1}(V - A'A) \right) \right) A^+ b, & \mathbf{t}^* = 1 \end{cases}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\hat{x}^* = \begin{cases} \tilde{x}, & \mathbf{k} \gg \mathbf{e}^{-1} \\ x[\mathbf{t}^*], & \mathbf{k} \approx \mathbf{e}^{-1} \end{cases};$$

lo que, según el Teorema 9, constituye una propiedad deseable para un aproximado \hat{x}^* en tal situación extrema

Por otra parte, notemos que para el cálculo de \mathbf{t}^* según (25) no hay necesidad alguna de evaluación heurística de la condicionalidad de cada problema original.

Además, observemos que, con toda su generalidad, las fórmulas (17), (22) y (25) nos permiten principalmente evaluar con certeza la pertinencia y el alcance de los algoritmos construibles

sobre la base de los resultados obtenidos hasta aquí y que el nivel de su complejidad algorítmica debe variar significativamente con las opciones específicas de formulación de la matriz V . En efecto, las fórmulas de los ejemplos notables de los Teoremas 3 y 4 del capítulo anterior y de los Corolarios 3 y 4 de este capítulo; las fórmulas de la Definición 4, así como las fórmulas de otros métodos de uso amplio y de gran actualidad derivables también como casos especiales de iteraciones y pseudoiteraciones de desglose aproximante [34, 35], nos permiten constatar la diversidad de niveles de complejidad de los algoritmos construibles.

Debemos subrayar el hecho que para la determinación de t^* según (25) en los casos de problemas con datos ruidosos, suponemos la matriz V formulada explícitamente de alguna manera apropiada para considerar numericamente la influencia de ese ruido; es decir, una formulación tal como son las formulaciones paramétricas de la Regularización de Tikhonov en sus diversas versiones y variantes [13, 15, 20, 21, 24, 39-41, 49].

3.7. Teorema del capítulo.

Teorema 6 (Propiedades aproximantes de las pseudoiteraciones de desglose aproximante).

Sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$, $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$. Sea además

$$x^* = \arg \min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax-b\|_2^2} (x - \tilde{x})' V (x - \tilde{x}).$$

Si $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva arbitraria dada, entonces $\forall t \in \mathbf{Z}^+$, $t < +\infty$, y $\forall \tilde{x} \in \mathbf{R}^n$, $\tilde{x} \neq x^*$, toda pseudoiteración de desglose aproximante $\mathbf{j}_{V, \tilde{x}, t}(A, b)$,

$$\mathbf{j}_{V, \tilde{x}, t}(A, b): \mathbf{R}^{m \times n} \times \mathbf{R}^m \xrightarrow{V, \tilde{x}, t} \mathbf{R}^n,$$

$$\mathbf{j}_{V, \tilde{x}, t}(A, b) = \left((V + A'A)^{-1} (V - A'A) \right)^t \tilde{x} + \left(I - \left((V + A'A)^{-1} (V - A'A) \right)^t \right) A^+ b;$$

cumple que

$$\|A\mathbf{j}_{V,\tilde{x},t}(A,b) - b\|_2^2 < \|A\tilde{x} - b\|_2^2$$

y

$$\|(\sqrt{V})\mathbf{j}_{V,\tilde{x},t}(A,b) - x^*\|_2^2 < \|(\sqrt{V})(\tilde{x} - x^*)\|_2^2.$$

Demostración.

La validez del enunciado es inferida inmediatamente del punto 2 del Teorema 1 y del punto 3 del Teorema 2 sobre la base de la Definición 5 y del punto 1 del Teorema 2 \otimes .

Teorema 7 (Toda pseudoiteración de desglose aproximante es una aplicación continua de los valores singulares de $A(\sqrt{V})^{-1}$).

Sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$; $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$. Sea $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$. Si $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$, matriz definida positiva, y $t \in \mathbf{Z}^+$, $t < +\infty$, entonces toda pseudoiteración de desglose aproximante

$$\mathbf{j}_{V,\tilde{x},t}(A,b) = \left((V + A'A)^{-1}(V - A'A) \right)^t \tilde{x} + \left(I - \left((V + A'A)^{-1}(V - A'A) \right)^t \right) A^+ b,$$

es una aplicación continua [47] de los valores singulares de la matriz $A(\sqrt{V})^{-1}$, cualesquiera sean A y b .

Demostración.

Sean $L \in \mathbf{R}^{m \times m}$ y $R \in \mathbf{R}^{n \times n}$, matrices unitarias, y $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, matriz diagonal, tal que

$S \in \mathbf{R}^{rank(A) \times rank(A)}$; factores todos de la SVD de la matriz $A(\sqrt{V})^{-1}$,
 $A(\sqrt{V})^{-1} = L \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R'$.

De a la Definición 5, $\forall t \in \mathbf{Z}^+ \mid t < +\infty$,

$$\begin{aligned} \mathbf{j}_{V, \tilde{x}, t}(A, b) &= \left((V + A'A)^{-1} (V - A'A) \right)^t \tilde{x} + \left(I - \left((V + A'A)^{-1} (V - A'A) \right)^t \right) A^+ b = \\ &= (R' \sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^t & 0 \\ 0 & I_{n - rank(A)} \end{pmatrix} (R' \sqrt{V}) \tilde{x} + \\ &+ (R' \sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} \left(I - \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^t \right) S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L' b. \end{aligned}$$

Pero notemos que si $t < +\infty$, entonces $\forall i \in \mathbf{N} \mid 1 \leq i \leq rank(A)$,

$$\begin{aligned} & \lim_{[diag(S)]_{i:rank(A)} \rightarrow 0} \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^t = \\ &= \begin{pmatrix} \left[\left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^t \right]_{1:i-1, 1:i-1} & 0 \\ 0 & I_{1+rank(A)-i} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

y

$$\lim_{[diag(S)]_{i:rank(A)} \rightarrow 0} \left(I - \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^t \right) S^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} \left[\begin{array}{c} \left(I - \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^t \right) S^{-1} \\ 0 \end{array} \right]_{\substack{1:i-1 \\ 1:i-1}} & 0 \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $\forall i \in \mathbf{N} \mid 1 \leq i \leq \text{rank}(A)$,

$$\begin{aligned} & \lim_{[diag(S)]_{i:rank(A)} \rightarrow 0} \mathbf{j}_{V, \tilde{x}, t}(A, b) = \\ & = (R' \sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^t & 0 \\ 0 & I_{n+1-i} \end{pmatrix}_{\substack{1:i-1 \\ 1:i-1}} (R' \sqrt{V}) \tilde{x} + \\ & + (R' \sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} \left[\begin{array}{c} \left(I - \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^t \right) S^{-1} \\ 0 \end{array} \right]_{\substack{1:i-1 \\ 1:i-1}} & 0 \\ & 0 \end{pmatrix} L'b, \end{aligned}$$

cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m \otimes$.

Corolario 2 (Acerca del filtraje numérico en las pseudoiteraciones de desglose aproximante).

Sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$. Si $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$ es una matriz definida positiva y $t \in \mathbf{Z}^+ \mid t < +\infty$, entonces la matriz $\Phi_t(S) \in \mathbf{R}^{n \times n}$,

$$\Phi_t(S) = \begin{pmatrix} I - \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde $S \in \mathbf{R}^{\text{rank}(A) \times \text{rank}(A)}$ es la matriz diagonal de los valores singulares de la matriz $A(\sqrt{V})^{-1}$, cumple que $\forall i \in \mathbf{N} \mid 1 \leq i \leq \text{rank}(A)$,

$$1.- \lim_{[diag(S)]_{i:rank(A)} \rightarrow 0} I - \Phi_t(S) = \begin{pmatrix} I - [\Phi_t(S)]_{1:i-1}^{1:i-1} & 0 \\ 0 & I_{n-i+1} \end{pmatrix}$$

y

$$2.- \lim_{[diag(S)]_{i:rank(A)} \rightarrow 0} \Phi_t(S)S^{-1} = \begin{pmatrix} [\Phi_t(S)]_{1:i-1}^{1:i-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [S^{-1}]_{1:i-1}^{1:i-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Demostración.

Sea $S \in \mathbf{R}^{rank(A) \times rank(A)}$, la matriz de los valores singulares de la matriz $A(\sqrt{V})^{-1}$.

Consideremos la matriz $\Phi_t(S) \in \mathbf{R}^{n \times n}$,

$$\Phi_t(S) = \begin{pmatrix} I - \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Por tanto, $\forall i \in \mathbf{N} / 1 \leq i \leq rank(A)$,

$$\lim_{[diag(S)]_{i:rank(A)} \rightarrow 0} I - \Phi_t(S) = \begin{pmatrix} I - [\Phi_t(S)]_{1:i-1}^{1:i-1} & 0 \\ 0 & I_{n-i+1} \end{pmatrix} \otimes_1$$

y

$$\lim_{[diag(S)]_{i:rank(A)} \rightarrow 0} \Phi_t(S)S^{-1} = \begin{pmatrix} [\Phi_t(S)]_{1:i-1}^{1:i-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [S^{-1}]_{1:i-1}^{1:i-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \otimes_2.$$

Corolario 3 (La fórmula de la Regularización directa estándar de Tikhonov como caso especial de la de las pseudoiteraciones de desglose aproximante).

Si $I \in \mathbf{R}$, $I > 0$, es un escalar arbitrario dado, entonces la fórmula de la variante estándar de la Regularización directa de Tikhonov,

$$\hat{x}^* = \arg \min_{x \in \mathbf{R}^n} \left\{ \|Ax - b\|_2^2 + I \|x - \tilde{x}\|_2^2 \right\},$$

es un caso especial de la fórmula de las pseudoiteraciones de desglose aproximante,

$$\mathbf{j}_{V, \tilde{x}, t}(A, b) = \left((V + A'A)^{-1} (V - A'A) \right)^t \tilde{x} + \left(I - \left((V + A'A)^{-1} (V - A'A) \right)^t \right) A^+ b;$$

cuyos parámetros son

$$V = 2II + A'A$$

y

$$t = 1,$$

cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$; $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$.

Demostración.

La validez de este corolario es inferida inmediatamente del punto 1 del Teorema 2 y de la Definición 5, a partir de los valores dados de V y $t \otimes$.

Corolario 4 (La fórmula de la Regularización directa no-estándar de Tikhonov como caso especial de la de las pseudoiteraciones de desglose aproximante).

Si $I \in \mathbf{R}$, $I > 0$, es un escalar arbitrario dado, entonces la fórmula de la variante no-estándar de la Regularización directa de Tikhonov,

$$\hat{x}^* = \arg \min_{x \in \mathbf{R}^n} \left\{ \|Ax - b\|_2^2 + \mathbf{I} \|D(x - \tilde{x})\|_2^2 \right\},$$

es un caso especial de la fórmula de las pseudoiteraciones de desglose aproximante,

$$\mathbf{j}_{V, \tilde{x}, t}(A, b) = \left((V + A'A)^{-1} (V - A'A) \right)^t \tilde{x} + \left(I - \left((V + A'A)^{-1} (V - A'A) \right)^t \right) A^+ b;$$

cuyos parámetros son

$$V = 2\mathbf{I}D'D + A'A$$

y

$$t = 1,$$

cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $D \in \mathbf{R}^{n \times n}$, tales que

$$\text{Null}(D) \cap \text{Null}(A) = \{0\}$$

y $b \in \mathbf{R}^m$; $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$.

Demostración.

La validez de este corolario es inferida inmediatamente del punto 1 del Teorema 2 y de la Definición 5, a partir de los valores dados de V y t \otimes .

Teorema 8 (Toda solución mínimo-cuadrática lineal en dimensiones finitas a dos niveles depende discontinuamente de los valores singulares de $A(\sqrt{V})^{-1}$).

Sean $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$, matriz definida positiva arbitraria dada, $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$; donde $m \in \mathbf{N}$ y $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$ y $n < +\infty$. Sea, además, la matriz diagonal $\begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^{m \times n}$, tal que $S \in \mathbf{R}^{\text{rank}(A) \times \text{rank}(A)}$; el factor central de la SVD de la matriz $A(\sqrt{V})^{-1}$.

Si

$$x^*(\text{diag}(S)) = \arg \min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax - b\|_2^2} (x - \tilde{x})' V (x - \tilde{x}),$$

entonces

$$\lim_{[\text{diag}(S)]_{i:\text{rank}(A)} \rightarrow 0} \left\| \sqrt{V} x^*(\text{diag}(S)) \right\|_2^2 = +\infty, \quad 1 \leq i \leq \text{rank}(A),$$

cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$ y $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$.

Demostración.

Teniendo en cuenta que $A^+ = (R' \sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L'$, sobre la base del Lema 2 podemos

afirmar que

$$x^*(\text{diag}(S)) = (R' \sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-\text{rank}(A)} \end{pmatrix} (R' \sqrt{V}) \tilde{x} + (R' \sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L' b,$$

cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$ y $\tilde{x} \in \mathbf{R}^n$. Luego,

$$\left\| \sqrt{V} x^*(\text{diag}(S)) \right\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_{n-\text{rank}(A)} \end{pmatrix} (R' \sqrt{V}) \tilde{x} \right\|_2^2 + \left\| \begin{pmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L' b \right\|_2^2$$

y, por tanto, $\forall i \in N \mid 1 \leq i \leq \text{rank}(A)$,

$$\begin{aligned} & \lim_{[diag(S)]_{i:\text{rank}(A)} \rightarrow 0} \left\| \sqrt{V} x^* (\text{diag}(S)) \right\|_2^2 \geq \\ & \geq \lim_{[diag(S)]_{i:\text{rank}(A)} \rightarrow 0} b' L \begin{pmatrix} S^{-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L' b \geq \\ & \geq \lim_{[diag(S)]_{i:\text{rank}(A)} \rightarrow 0} \sum_{t=i}^{\text{rank}(A)} \frac{[L'b]_t^2}{s_t^2} = +\infty \quad \otimes. \end{aligned}$$

Teorema 9 (Crecimiento monótono y no acotado de la razón aritmética máxima entre magnitudes de error relativo por componente de un iterado de desglose aproximante).

Sean $V \in \mathbf{R}^{n \times n}$ una matriz definida positiva arbitraria dada y la iteración de desglose aproximante

$$x^{[k+1]} = (V + A'A)^{-1} (V - A'A)x^{[k]} + 2(V + A'A)^{-1} A'b, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

para la solución de sistemas normales de ecuaciones

$$A'Ax = A'b,$$

cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$ y $b \in \mathbf{R}^m$; $m \in N$, $m < +\infty$ y $n \in N$, $n < +\infty$.

Sea, además,

$$\begin{aligned} \Omega^{[k]} = \{ & i \in N \mid ((1 \leq i \leq p) \vee (\text{rank}(A) - q + 1 \leq i \leq \text{rank}(A))) \wedge \\ & \wedge \left(\left((R' \sqrt{V}) (x^{[0]} - x^*) \right)_i \neq 0 \right) \}, \\ & k = 0, 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

donde

$$x^* = \arg \min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax-b\|_2^2} (x - \tilde{x})' V (x - \tilde{x});$$

$R \in \mathbf{R}^{n \times n}$, la matriz-factor unitario derecho de la SVD de $A(\sqrt{V})^{-1}$; $p \in \mathbf{Z}^+$, el número de valores singulares de $A(\sqrt{V})^{-1}$ mayores estrictamente que 1 y, finalmente, $q \in \mathbf{Z}^+$, el de sus valores singulares menores estrictamente que 1.

Si A y V son tales que $\mathbf{k} \left(A(\sqrt{V})^{-1} \right) \neq 1$, entonces

$$1.- \frac{\max_{i \in \Omega^{[k]}} \frac{\left| \left((R' \sqrt{V}) x^{[k]} - x^* \right)_i \right|}{\left| \left((R' \sqrt{V}) x^{[0]} - x^* \right)_i \right|}}{\min_{i \in \Omega^{[k]}} \frac{\left| \left((R' \sqrt{V}) x^{[k]} - x^* \right)_i \right|}{\left| \left((R' \sqrt{V}) x^{[0]} - x^* \right)_i \right|}} < \frac{\max_{i \in \Omega^{[k+1]}} \frac{\left| \left((R' \sqrt{V}) x^{[k+1]} - x^* \right)_i \right|}{\left| \left((R' \sqrt{V}) x^{[0]} - x^* \right)_i \right|}}{\min_{i \in \Omega^{[k+1]}} \frac{\left| \left((R' \sqrt{V}) x^{[k+1]} - x^* \right)_i \right|}{\left| \left((R' \sqrt{V}) x^{[0]} - x^* \right)_i \right|}}, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$2.- \lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\max_{i \in \Omega^{[k]}} \frac{\left| \left((R' \sqrt{V}) x^{[k]} - x^* \right)_i \right|}{\left| \left((R' \sqrt{V}) x^{[0]} - x^* \right)_i \right|}}{\min_{i \in \Omega^{[k]}} \frac{\left| \left((R' \sqrt{V}) x^{[k]} - x^* \right)_i \right|}{\left| \left((R' \sqrt{V}) x^{[0]} - x^* \right)_i \right|}} = +\infty.$$

Demostración.

Sea $L \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} R'$ la factorización de la SVD de la matriz $A(\sqrt{V})^{-1}$.

Denotemos:

- Con “ $S_{>1}$ ”, la submatriz diagonal superior izquierda de S , formada por los p valores singulares de $A(\sqrt{V})^{-1}$ mayores estrictamente que 1.
- Con “ $S_{<1}$ ”, la submatriz diagonal inferior derecha de S , formada por los q valores singulares de $A(\sqrt{V})^{-1}$ menores estrictamente que 1.

Obviamente, $p \geq 0$, $q \geq 0$, $1 \leq p + q \leq \text{rank}(A)$. Así, pues,

$$S = \begin{pmatrix} S_{>1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{\text{rank}(A)-p-q} & 0 \\ 0 & 0 & S_{<1} \end{pmatrix}.$$

Según el punto 1 del Teorema 2,

$$\begin{aligned} x^{[k+1]} &= \left((V + A'A)^{-1} (V - A'A) \right)^{k+1} x^{[0]} + \left(I - \left((V + A'A)^{-1} (V - A'A) \right)^{k+1} \right) A^+ b = \\ &= (R' \sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^{k+1} & 0 \\ 0 & I_{n-\text{rank}(A)} \end{pmatrix} (R' \sqrt{V}) x^{[0]} + \\ &+ (R' \sqrt{V})^{-1} \begin{pmatrix} \left(I - \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^{k+1} \right) S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L' b. \end{aligned}$$

Por ende,

$$\begin{aligned} (R' \sqrt{V}) x^{[k+1]} &= \begin{pmatrix} \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^{k+1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} (R' \sqrt{V}) x^{[0]} + \\ &+ \begin{pmatrix} \left(I - \left(I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 \right)^{k+1} \right) S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} L' b. \end{aligned}$$

Ahora, reescribamos detalladamente la igualdad anterior:

$$\begin{aligned} \left[(R' \sqrt{V}) x^{[k+1]} \right]_{1:p} &= \left(I - 2 \left(I + S_{>1}^2 \right)^{-1} S_{>1}^2 \right)^{k+1} \left[(R' \sqrt{V}) x^{[0]} \right]_{1:p} + \\ &+ \left(I - \left(I - 2 \left(I + S_{>1}^2 \right)^{-1} S_{>1}^2 \right)^{k+1} \right) S_{>1}^{-1} [L'b]_{1:p}. \end{aligned}$$

$$\left[(R' \sqrt{V}) x^{[k+1]} \right]_{p+1:rank(A)-q} = [L'b]_{p+1:rank(A)-q}.$$

$$\begin{aligned} &\left[(R' \sqrt{V}) x^{[k+1]} \right]_{rank(A)-q+1:rank(A)} = \\ &= \left(I - 2 \left(I + S_{<1}^2 \right)^{-1} S_{<1}^2 \right)^{k+1} \left[(R' \sqrt{V}) x^{[0]} \right]_{rank(A)-q+1:rank(A)} + \\ &+ \left(I - \left(I - 2 \left(I + S_{<1}^2 \right)^{-1} S_{<1}^2 \right)^{k+1} \right) S_{<1}^{-1} [L'b]_{rank(A)-q+1:rank(A)}. \end{aligned}$$

$$\left[(R' \sqrt{V}) x^{[k+1]} \right]_{rank(A)+1:n} = \left[(R' \sqrt{V}) x^{[0]} \right]_{rank(A)+1:n}.$$

Por simple inspección de las cuatro igualdades anteriores, podemos concluir que la magnitud individual de las componentes desde la $(p+1)$ -ésima hasta la $(rank(A)-q)$ -ésima y desde la $(rank(A)+1)$ -ésima hasta la n -ésima del vector iterativo $(R' \sqrt{V}) x^{[k]}$ no varía con el paso de iteración k ; es decir, k no influye en la magnitud de error relativo por componente de ellas. Sin embargo, no podemos afirmar lo mismo en el caso de las demás componentes; es decir, de aquellas, cuyo subíndice i es $1 \leq i \leq p$ o $rank(A)-q+1 \leq i \leq rank(A)$.

Así, según el punto 2 del Teorema 2, x^* es un punto fijo de la iteración de desglose aproximante. De donde, como consecuencia del punto 1 del Lema 1,

$$\begin{aligned} (R'\sqrt{V})(x^{[k]} - x^*) &= \begin{pmatrix} I - 2(I + S^2)^{-1} S^2 & 0 \\ 0 & I_{n-\text{rank}(A)} \end{pmatrix}^k (R'\sqrt{V})(x^{[0]} - x^*), \\ k &= 0, 1, 2, \dots; \end{aligned}$$

cualesquiera sean $A \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbf{R}^m$ y $x^{[0]} \in \mathbf{R}^n$. Luego,

$$\left[(R'\sqrt{V})(x^{[k]} - x^*) \right]_{1:p} = \left(I_p - 2(I + S_{>1}^2)^{-1} S_{>1}^2 \right)^k \left[(R'\sqrt{V})(x^{[0]} - x^*) \right]_{1:p},$$

y

$$\begin{aligned} &\left[(R'\sqrt{V})(x^{[k]} - x^*) \right]_{\text{rank}(A)-q+1:\text{rank}(A)} = \\ &= \left(I_q - 2(I + S_{<1}^2)^{-1} S_{<1}^2 \right)^k \left[(R'\sqrt{V})(x^{[0]} - x^*) \right]_{\text{rank}(A)-q+1:\text{rank}(A)}; \\ &k = 0, 1, 2, \dots. \end{aligned}$$

Aquí, otra vez, si $\left[(R'\sqrt{V})(x^{[0]} - x^*) \right]_{1:p} = 0$, entonces $\left[(R'\sqrt{V})(x^{[k]} - x^*) \right]_{1:p}$ no varía con k .

Por otro lado, si $\left[(R'\sqrt{V})(x^{[0]} - x^*) \right]_{\text{rank}(A)-q+1:\text{rank}(A)} = 0$, entonces

$\left[(R'\sqrt{V})(x^{[k]} - x^*) \right]_{\text{rank}(A)-q+1:\text{rank}(A)}$ tampoco varía con k .

Luego, el cálculo de la magnitud individual de los errores relativos por componente del k -ésimo

iterado $\frac{\left[(R'\sqrt{V})(x^{[k]} - x^*) \right]_i}{\left[(R'\sqrt{V})(x^{[0]} - x^*) \right]_i}$ tiene sentido solamente para aquellas componentes, cuyo

subíndice i pertenece a $\Omega^{[k]}$.

Observemos que, según habíamos ya visto,

$$\frac{\left[(R'\sqrt{V})(x^{[k]} - x^*) \right]_i}{\left[(R'\sqrt{V})(x^{[0]} - x^*) \right]_i} = \left(1 - 2 \frac{s_i^2}{1 + s_i^2} \right)^k, \quad \forall i \in \Omega^{[k]}.$$

De donde, sobre la base del punto 4 del Teorema 2, si $\mathbf{k}\left(A(\sqrt{V})^{-1}\right) \neq 1$, entonces podemos afirmar que la magnitudes individuales del error relativo por componente decrecen estricta y exponencialmente con k a muy distintas velocidades y, por tanto,

$$\frac{\max_{i \in \Omega^{[k]}} \left| \frac{\left[(R' \sqrt{V}) x^{[k]} - x^* \right]_i}{\left[(R' \sqrt{V}) x^{[0]} - x^* \right]_i} \right|}{\min_{i \in \Omega^{[k]}} \left| \frac{\left[(R' \sqrt{V}) x^{[k]} - x^* \right]_i}{\left[(R' \sqrt{V}) x^{[0]} - x^* \right]_i} \right|} < \frac{\max_{i \in \Omega^{[k+1]}} \left| \frac{\left[(R' \sqrt{V}) x^{[k+1]} - x^* \right]_i}{\left[(R' \sqrt{V}) x^{[0]} - x^* \right]_i} \right|}{\min_{i \in \Omega^{[k+1]}} \left| \frac{\left[(R' \sqrt{V}) x^{[k+1]} - x^* \right]_i}{\left[(R' \sqrt{V}) x^{[0]} - x^* \right]_i} \right|}, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \otimes_1$$

y

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{\max_{i \in \Omega^{[k]}} \left| \frac{\left[(R' \sqrt{V}) x^{[k]} - x^* \right]_i}{\left[(R' \sqrt{V}) x^{[0]} - x^* \right]_i} \right|}{\min_{i \in \Omega^{[k]}} \left| \frac{\left[(R' \sqrt{V}) x^{[k]} - x^* \right]_i}{\left[(R' \sqrt{V}) x^{[0]} - x^* \right]_i} \right|} = +\infty \quad \otimes_2.$$

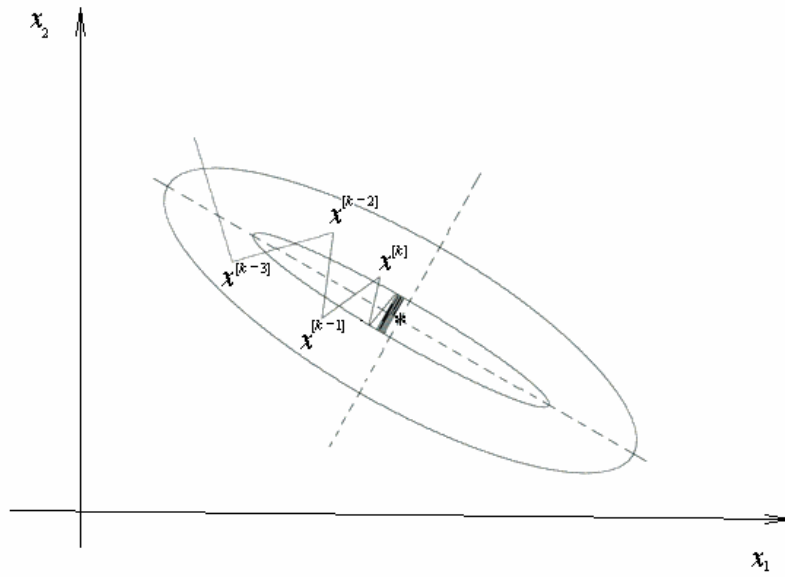


Figura 4. Esquema en dos dimensiones de la trayectoria “oscilante” o en “zig-zag” de conocidas iteraciones estacionarias lineales.

4. VALIDACIÓN EXPERIMENTAL DE LAS SEUDOITERACIONES DE DESGLOSE APROXIMANTE¹⁵.

4.1. Sumario del capítulo.

A continuación, la eficacia de las pseudoiteraciones de desglose aproximante es validada experimentalmente en la solución de un problema clásico de procesamiento digital de señales, donde la solución pseudoinversa del Problema General resulta demasiado sensitiva a las perturbaciones de los datos. La validación es realizada en dos etapas. La primera etapa consiste en el desarrollo del “Método Aproximante de las Componentes” (MADC), como variante robusta del conocido Método de las Componentes (MDC) [9, 11, 32] y la evaluación comparativa simultánea de ambos métodos mediante simulaciones digitales con ruido. La segunda etapa consiste en la utilización de una versión multilineal de MADC en la descomposición tiempo-frecuencia topográfica de electroencefalogramas (EEG) multicanales humanos de la vida real [12].

4.2. El Método Aproximante de las Componentes (MADC).

4.2.1. Discusión.

El Método de las Componentes (MDC)¹⁶ [9, 11, 32] es aún hoy día uno de los métodos de descomposición más usados en la representación adaptativa de señales, a pesar de supuestas insuficiencias, tales como la de no preservar la dispersidad o de no ser un método de alta resolución [9]. El quid de tan persistente “popularidad” reside indudablemente en la sencillez y claridad de la idea geométrica que sustenta al método; atributos que lo hacen no meramente

¹⁵ Los resultados presentados en este capítulo, relacionados con la descomposición tiempo-frecuencia topográfica del EEG; han sido publicados en [27], mientras que los relacionados con el Método Aproximante de las Componentes (“Approximating Method of Frames”), aparecerán publicados en [37] próximamente.

¹⁶ En inglés “Method of Frames”, método de representación adaptativa de señales debido a la Profesora belga-estadounidense Dr. Ingrid Daubechies de la Universidad de Princeton, New Jersey, USA; reportado en su artículo “Time-frequency localization operators: a geometric phase space approach”, aparecido en la revista IEEE Transactions on Information Theory, volumen 34 de 1988, pp. 605-612.

elegible, sino incluso atractivo -por su fácil implementabilidad y la fácil interpretabilidad de sus resultados- para la obtención rápida de buenas soluciones aproximadas de los coeficientes de descomposición de la señal, que otros métodos mejor calificados -tales como el Método de la Búsqueda de Bases o el de la Detección de Colisiones [9] necesitan como aproximados iniciales.

Matemáticamente, el MDC consiste en lo siguiente [32]: denotemos con S , $S \subseteq \mathbf{R}^n$, el espacio de todas las señales reales discretizadas posibles de interés; Φ , $\Phi \in \mathbf{R}^{n \times p}$, una matriz dada (llamada comunmente "diccionario"), cuyas columnas son "curvas onduladas" predefinidas, seleccionadas y discretizadas (llamadas comunmente "componentes", "átomos" o "palabras" del diccionario); y \mathbf{y} , $\mathbf{y} \in S$, una señal cualquiera de S , dada. El propósito del método es hallar el juego de coeficientes de representación $\mathbf{a}^* \in \mathbf{R}^p$ (llamado comunmente "de energía mínima"), tal que

$$\Phi \mathbf{a}^* = \mathbf{y};$$

es decir, es obtener la solución (si ésta existe) del problema de Mínimos Cuadrados lineales del tipo "goal-attainment" con restricciones [16]

$$\min_{\mathbf{a} \in \{\mathbf{a} \in \mathbf{R}^p \mid \Phi \mathbf{a} = \mathbf{y}\}} \|\mathbf{a}\|_2^2.$$

En [11], fue demostrado que si Φ cumple el requisito de ser sobrecompleto,

$$p \geq \text{rank}(\Phi) = \text{rank}(\Phi \mid \mathbf{y}) = n, \quad \forall \mathbf{y} \in S \quad (26),$$

entonces la solución \mathbf{a}^* existe y es única [9] y satisface que

$$\begin{aligned} \mathbf{a}^* &= \arg \min_{\mathbf{a} \in \{\mathbf{a} \in \mathbf{R}^p \mid \Phi \mathbf{a} = \mathbf{y}\}} \|\mathbf{a}\|_2^2 = \\ &= \Phi^+ \mathbf{y} = \Phi'(\Phi \Phi')^{-1} \mathbf{y} \quad (27). \end{aligned}$$

De donde, cualquiera sea la señal de interés \mathbf{y} , los mejores coeficientes de energía mínima para su representación en " n " palabras básicas exactamente, $n \ll p$, de un diccionario Φ

deben poder ser siempre obtenidos meramente al seleccionar el Φ apropiado para ello (“Wavelets”, Fourier, Gabor, “Bumps”, etc. (ver en [9, 11, 32] y otros, referenciados allí).

Desafortunadamente, a pesar de esa heurística válida, con demasiada frecuencia MDC produce soluciones aproximadas espúreas o carentes de sentido respecto al problema de representación adaptativa de la señal \mathbf{y} original, debido a que -como regla- el diccionario Φ no es una matriz bien-condicionada y \mathbf{y} es numericamente ruidosa; circunstancias tan inevitables como perjudiciales, particularmente, si el problema es de gran escala [13, 19, 21, 40, 56].

La desventaja esencial del enfoque de MDC al problema de descomposición de señales es su falta de robustez numérica, evidenciada por el uso en la fórmula (27) de un elemento tan sensitivo al ruido, como es la seudoinversa Φ^+ [6, 18, 48, 56].

Para colmo, los mismos inconvenientes esencialmente podrían ser observados si (27) fuese instrumentado a ultranza a través tanto de una TSVD o una SVD amortiguada (ver [18, 21, 24, 40, 54] y otros, referenciados allí), como de alguno de los procedimientos iterativos de descenso del tipo gradiente reportados en la bibliografía (ver [6, 18] y otros).

Afortunadamente, sobre la base de los resultados expuestos en los Capítulos 2 y 3, MDC puede ser robustecido numericamente, al replantearlo de la manera siguiente: hallar una solución

aproximada numericamente robusta $\hat{\mathbf{a}}^* \in \mathbf{R}^P$ del juego de coeficientes de representación $\mathbf{a}^* \in \mathbf{R}^P$ de mejor ajuste y energía mínima; es decir, un aproximado numericamente robusto $\hat{\mathbf{a}}^* \in \mathbf{R}^P$ de la solución $\mathbf{a}^* \in \mathbf{R}^P$ del problema

$$\min_{\mathbf{a} \in \text{Arg} \min_{\mathbf{a} \in \mathbf{R}^m} \|\Phi \mathbf{a} - \mathbf{y}\|_2^2} \|\mathbf{a}\|_2^2 \quad (28).$$

Esta forma robustecida de MDC recibe el nombre de “Método Aproximante de las Componentes (MADC)”.

Aquí observamos, de una parte, que el problema (28) es un caso especial del problema de Mínimos Cuadrados lineales del tipo “goal-attainment” a dos niveles (Lema 2),

$$\min_{x \in \text{Arg} \min_{x \in \mathbf{R}^n} \|Ax-b\|_2^2} (x - \tilde{x})' V (x - \tilde{x});$$

en cuyo caso, la solución \mathbf{a}^* , según el punto 1 del Lema 2, existe y es única, cualquiera sean el diccionario $\Phi \in \mathbf{R}^{n \times p}$ y la señal \mathbf{y} ; y, de la otra parte, que, de acuerdo con la teoría de la Programación Cuadrática convexa [16], si Φ cumple la condición (26) de ser sobrecompleto, entonces

$$\mathbf{a}^* = \arg \min_{\mathbf{a} \in \text{Arg} \min_{\mathbf{a} \in \mathbf{R}^p} \|\Phi \mathbf{a} - \mathbf{y}\|_2^2} \|\mathbf{a}\|_2^2 = \arg \min_{\mathbf{a} \in \{\mathbf{a} \in \mathbf{R}^p | \Phi \mathbf{a} = \mathbf{y}\}} \|\mathbf{a}\|_2^2.$$

No es difícil constatar además que en MADC, a diferencia de MDC, si Φ cumple la condición más fuerte de ser sobrecompleto

$$p \geq n \geq \text{rank}(\Phi) = \text{rank}(\Phi | \mathbf{y}) \geq 1, \forall \mathbf{y} \in S \quad (29);$$

entonces, de acuerdo otra vez con [16], la señal \mathbf{y} es descompuesta exactamente en el número $\text{rank}(\Phi)$ de palabras básicas del diccionario Φ ; es decir, \mathbf{y} podría resultar descompuesta en un número de palabras básicas de Φ menor, incluso, que el número predefinido n en que resultaría descompuesta por MDC, sin dejar por ello de existir ni de ser única la descomposición \mathbf{a}^* ,

$$\mathbf{a}^* = \arg \min_{\mathbf{a} \in \text{Arg} \min_{\mathbf{a} \in \mathbf{R}^p} \|\Phi \mathbf{a} - \mathbf{y}\|_2^2} \|\mathbf{a}\|_2^2 = \Phi^+ \mathbf{y}.$$

De donde, podemos afirmar que MADC es una cierta generalización de MDC. También, de acuerdo con la teoría de la Programación Cuadrática convexa [16],

$$\mathbf{a}^* = \arg \min_{\mathbf{a} \in \text{Arg} \min_{\mathbf{a} \in \mathbf{R}^p} \|\Phi \mathbf{a} - \mathbf{y}\|_2^2} \|\mathbf{a}\|_2^2 = \arg \min_{\mathbf{a} \in \text{Arg} \min_{\mathbf{a} \in \mathbf{R}^p} \|\Phi \mathbf{a} - \mathbf{y}\|_2^2} I \|\mathbf{a}\|_2^2 \quad (30),$$

$$\forall I \in \mathbf{R}, I > 0.$$

No es difícil reconocer en el miembro derecho extremo de la igualdad (30) la expresión general de las soluciones mínimo-cuadráticas lineales del tipo “goal-attainment” a dos niveles que son el límite de las iteraciones de desglose aproximante con norma euclídeana mínima (Definición 4 y Teorema 5)

$$\mathbf{a}^{[k+1]} = \left(I - 2(\mathbf{I}\mathbf{I} + \Phi'\Phi)^{-1}\Phi'\Phi \right) \mathbf{a}^{[k]} + 2(\mathbf{I}\mathbf{I} + \Phi'\Phi)^{-1}\Phi'\mathbf{y}, \quad k = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\mathbf{a}^{[0]} = 0,$$

de tal manera que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \mathbf{a}^{[k]} = \arg \min_{\mathbf{a} \in \text{Arg} \min_{\mathbf{a} \in \mathbf{R}^p} \|\Phi\mathbf{a} - \mathbf{y}\|_2^2} \mathbf{I} \|\mathbf{a}\|_2^2, \quad \forall \mathbf{I} \in \mathbf{R}, \quad \mathbf{I} > 0.$$

Por ende, según el punto 1 del Teorema 2, la Definición 5 y el Teorema 7, resulta legítimo

plantearnos la obtención de un aproximado $\hat{\mathbf{a}}^*$ de \mathbf{a}^* ; es decir,

$$\hat{\mathbf{a}}^* \approx \mathbf{a}^* = \arg \min_{\mathbf{a} \in \text{Arg} \min_{\mathbf{a} \in \mathbf{R}^p} \|\Phi\mathbf{a} - \mathbf{y}\|_2^2} \mathbf{I}^* \|\mathbf{a}\|_2^2.$$

Aquí proponemos calcular el parámetro $\mathbf{I}^* > 0$, por ejemplo, mediante el procedimiento “orientado-a-datos” de la conocida Validación-Cruzada Generalizada [17, 56],

$$\mathbf{I}^* = \arg \min_{\mathbf{I} \in \mathbf{R}, \mathbf{I} > 0} \frac{\left\| \left(I - 2(\mathbf{I}\mathbf{I} + \mathbf{S}^2)^{-1} \mathbf{S}^2 \right) \left[\mathbf{L}'\mathbf{y} \right]_{1:\text{rank}(\mathbf{A})} \right\|_2^2}{\left(\text{tracé} \left(I - 2(\mathbf{I}\mathbf{I} + \mathbf{S}^2)^{-1} \mathbf{S}^2 \right) \right)^2} \quad (31),$$

adecuado al problema (26), donde la matriz diagonal $\mathbf{S} \in \mathbf{R}^{\text{rank}(\Phi) \times \text{rank}(\Phi)}$ es el factor central de la factorización de la SVD de la matriz diccionario Φ .

Después, calculamos t^* , el número de pseudoiterados de desglose aproximante (Definición 7), siguiendo la proposición heurística concerniente, descrita al final del Capítulo 3, para alcanzar un

compromiso de precisión versus estabilidad numéricas de \hat{a}^* ,

$$t^* = \text{int} \left(\frac{\log(e^{-1})}{\log \left(\mathbf{k} \left(\mathbf{I} - 2 \left(\mathbf{I}^* \mathbf{I} + \mathbf{S}^2 \right)^{-1} \mathbf{S}^2 \right) \right) \right) < +\infty \quad (32),$$

donde e es el valor de tolerancia numérica.

Así, si denotamos, además, $L \in \mathbf{R}^{m \times m}$ y $R \in \mathbf{R}^{n \times n}$ los factores izquierdo y derecho respectivamente de la factorización de la SVD de Φ , la fórmula de la Seudoiteración de Desglose Aproximante para soluciones mínimo-cuadráticas lineales con Norma Euclideana Mínima (SDANEM) para MADC resulta finalmente:

$$\hat{a}_{MADC}^* = R \left(\begin{array}{cc} \left(\mathbf{I} - \left(\mathbf{I} - 2 \left(\mathbf{I}^* \mathbf{I} + \mathbf{S}^2 \right)^{-1} \mathbf{S}^2 \right)^{t^*} \right) \mathbf{S}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{array} \right) L' \mathbf{y} \quad (33).$$

4.2.2. Un esquema básico del algoritmo de MADC..

Un esquema básico del algoritmo de MADC es

1. Inicialización.
2. Validación de que el número de filas del diccionario es mayor o igual que uno y menor o igual que el número de sus columnas.
3. Cálculo de la SVD del diccionario.
4. Validación de que matriz de valores singulares del diccionario no resulta la nula.

5. Validación de que la matriz de valores singulares del diccionario no resulta una proporcional a la matriz identidad.
6. Cálculo del parámetro lambda, según la expresión (31).
7. Cálculo del número de pseudoiterados de desglose aproximante, según la expresión (32).
8. Aproximación de los coeficientes de la descomposición de la señal, según la expresión (33), teniendo muy en cuenta que

$$\frac{1 - \left(1 - 2 \frac{s_i^2}{\mathbf{I}^* + s_i^2}\right)^{t^*}}{s_i} = 2 \frac{s_i}{\mathbf{I}^* + s_i^2} \sum_{t=0}^{t^*-1} \left(\frac{\mathbf{I}^* - s_i^2}{\mathbf{I}^* + s_i^2}\right)^t, \quad i = 1, 2, \dots, \text{rank}(\Phi).$$

9. Fin.

4.2.3. Comparación de robustez MADC vs MDC.

Para la constatación de las propiedades de MADC, un experimento numérico comparativo MADC vs. MDC fue llevado a efecto en computadora para la verificación práctica de las ventajas de MADC sobre MDC a partir de la evaluación simultánea de la robustez de ambos algoritmos, mediante los programas y funciones MatLab de ApproxKit [36], cuyos resultados aparecen resumizados en la tabla “Sumario comparativo MDC vs. MADC de los resultados experimentales”.

El experimento fue concebido como la descomposición por ambos métodos, en los mismos diccionarios de rango completo, de la bien conocida señal sinusoidal unidimensional simulada con ruido aditivo (figura 5). El ruido adicionado a la señal fue blanco, con la matriz identidad multiplicada por un tercio de la amplitud de la señal sin ruido como matriz de covarianza.

Obviamente, para poder legitimar la descomposición MDC de la señal sin ruido como verdadera, descartamos el empleo de mallas demasiado densas. De ese modo, evitamos la distorsión numérica en el cálculo de la solución legitimada, causada por la prevalencia de los errores acumulados de truncamiento-redondeo en la solución de problemas a gran escala [6, 16, 18, 48].

Para la evaluación cuantitativa de los resultados del experimento fueron asumidas como indicadores de robustez numérica de ambos métodos de aproximación en circunstancias de

ruido la norma l_2 del sesgo $\left\| \hat{\mathbf{a}}_{media} - \mathbf{a}_{exacta}^* \right\|_2$, como indicador de precisión, y la norma de

Frobenius de la matriz de covarianza $\left\| Cov \left[\hat{\mathbf{a}}^* \right] \right\|_F$ de los aproximados, como indicador de

sensitividad.

Con el fin de realizar los cálculos de estos indicadores para ambos algoritmos simultaneamente en problemas de escala creciente y con empeoramiento gradual de la condicionalidad, la misma señal fue discretizada en 15 mallas con densidad de discretización distintas, de tal modo que el número de puntos de discretización de cada malla varió en el rango de múltiplos de 5 entre 15 y 85.

Así, 15 diccionarios distintos de “bumps” unidimensionales como palabras fueron construídos - los diccionarios más simples, quizás, que pueden ser construídos-; uno por cada malla, donde el ancho de los “bumps” (el número de puntos de discretización bajo la parte no constante de la curva) varió en el rango de los números impares entre 3 y el mayor número impar, menor o igual que la densidad de cada malla; de modo tal que las diferentes columnas de cada diccionario correspondiesen a todas las distintas curvas posibles de “bumps” de ancho menor o igual que la densidad de la malla correspondiente, que podrían ser discretizadas sobre la misma malla (figura 6). Consecuentemente, el diccionario más pequeño tuvo un tamaño de 15×105 , mientras que el más grande, 85×3570 .

Los resultados del experimento realizado muestran claramente (figuras 8, 9 y 10) que MADC debe aventajar a MDC en robustez también porque MADC no debe perder sus propiedades con la aparición de redundancia en los diccionarios o, imeramente, con el empeoramiento de la condicionalidad de ellos ; lo que sí suele ocurrir con MDC al aumentar la densidad de discretización de las mallas (figura 6), al trabajar con megadiccionarios o al incluir heurísticamente palabras en los diccionarios [9, 11, 32].

Tabla “Sumario comparativo MDC vs. MADC de resultados experimentales”.

Dimensiones del diccionario.	Número de condición del diccionario.	Precisión de MDC. (Norma L2 del sesgo).	Sensitividad de MDC. (Norma de Frobenius de la covarianza de la solución).	Precisión de MADC. (Norma L2 del sesgo).	Sensitividad de MADC. (Norma de Frobenius de la covarianza de la solución).
15 X 105	12.977231006691	0.1339215677742558	0.3044844730842139	0.2089716059314939	0.1159171284133569
20 X 180	18.329892122179	0.1496135141494978	0.4182708286421030	0.1094893692384803	0.1319948029164822
25 X 300	27.859135866464	0.1839851578466195	0.3917339447208505	0.1459850731921675	0.04997282608705471
30 X 420	34.9602522549305	0.2213455530909698	0.4047496081046574	0.1347088333315648	0.03244876007063013
35 X 595	46.060920148632	0.2610930803608649	0.4481165040172738	0.1136048738547638	0.02130133377289967
40 X 760	54.3725258223775	0.2238638140504264	0.5087918349546743	0.1355090382489969	0.01221662417861762
45 X 990	67.0835518233567	0.2483400927781107	0.5807423247447383	0.1156664216809370	0.008940059204070299
50 X 1200	76.4537731885000	0.2352119682830404	0.6419624217719111	0.1203676192748240	0.006225787899645956
55 X 1485	90.5957416807174	0.2666492542947290	0.6990038888812240	0.1037066050781014	0.006540395724745142
60 X 1740	100.9107305933013	0.2754873052988047	0.6965827997137442	0.09741417326876217	0.003625148406564985
65 X 2080	116.3459130687830	0.3080628237943248	0.8134009347108974	0.08974555358611357	0.003358659839124901
70 X 2380	127.5278057262000	0.3244844283334311	0.7899724896833681	0.08416967028379410	0.002921103292812246
75 X 2775	144.1548810644664	0.3570575948629262	0.8557728628483092	0.08726547952200471	0.002341514720112740
80 X 3120	156.1411095140949	0.3305248702837548	0.8687305345986509	0.07599315717981625	0.001660241726516961
85 X 3570	173.8805867663558	0.3710325566265710	0.9090907543259439	0.07632789914146433	0.001481871653915634

En esta tabla aparecen los resultados del experimento comparativo MADC vs. MDC para la verificación de las ventajas de MADC sobre MDC a partir de la evaluación simultánea de la robustez de ambos algoritmos. El experimento fue concebido como la descomposición por ambos métodos, en los mismos diccionarios, de la bien conocida señal sinusoidal unidimensional simulada con ruido blanco aditivo. Para la evaluación cuantitativa de los resultados del experimento fueron asumidas como indicadores de robustez numérica de ambos métodos en circunstancias de ruido la norma l_2 del sesgo, como indicador de precisión, y la norma de Frobenius de la matriz de covarianza de los aproximados, como indicador de sensibilidad. Con el fin de realizar los cálculos de estos indicadores para ambos algoritmos simultáneamente en problemas de escala creciente y con empeoramiento gradual de la condicionalidad, la misma señal fue discretizada en 15 mallas con densidad de discretización distintas. Así, 15 diccionarios distintos de “bumps” unidimensionales como palabras fueron construídos.

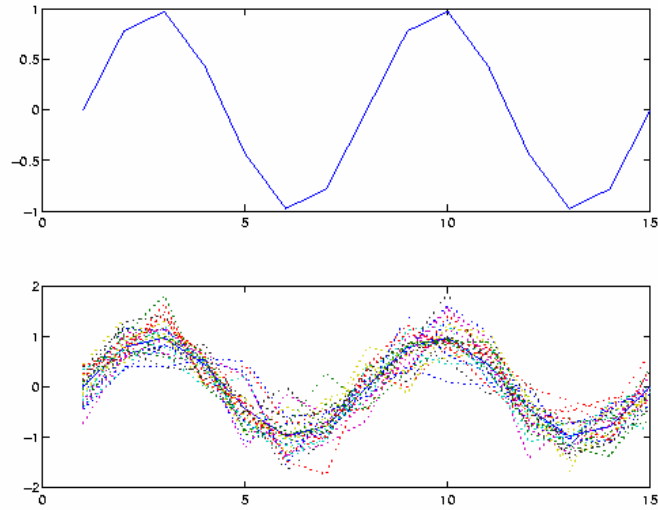


Figura 5. Ploteos de la bien conocida señal sinusoidal unidimensional discretizada en una malla de 15 puntos, sin ruido (sub-figura superior) y con ruido (sub-figura inferior).

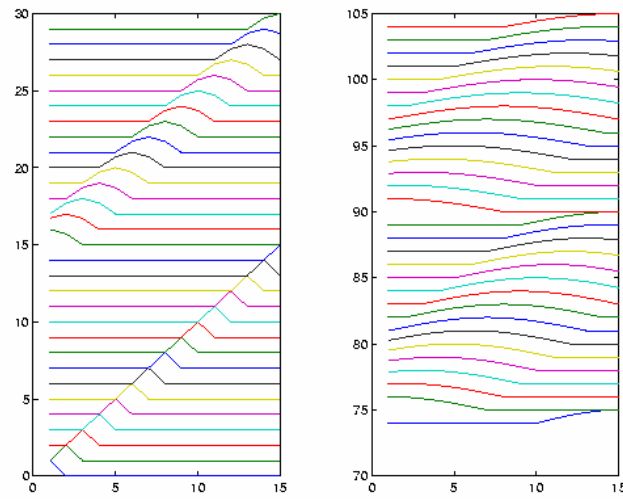


Figura 6. En esta figura, las sub-figuras izquierda y derecha muestran respectivamente las 30 primeras y las 30 últimas filas de la matriz transpuesta del diccionario Φ de tamaño más pequeño (15x105).

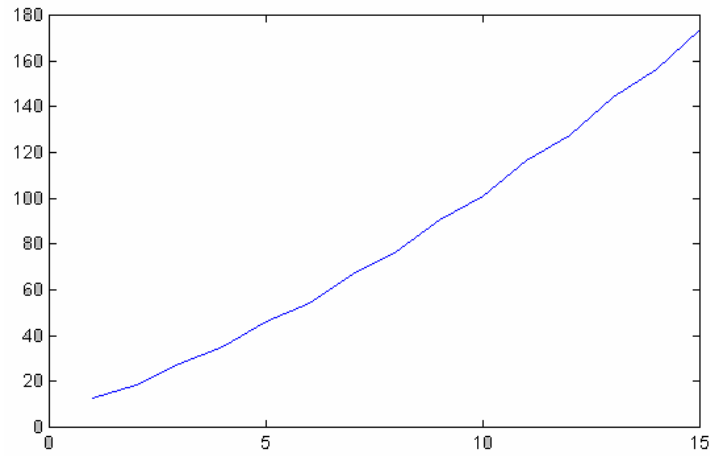


Figura 7. Esta figura muestra el ploteo del número de condición de las 15 matrices-diccionario Φ del experimento (columna 2 de la tabla) e ilustra así el empeoramiento de la condicionalidad de los diccionarios con el aumento de su tamaño.

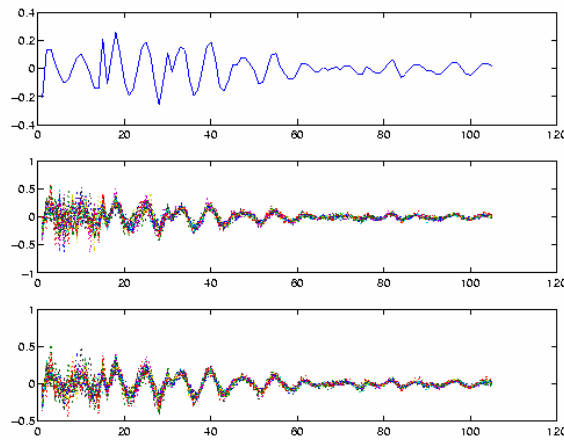


Figura 8. Esta figura ilustra las soluciones aproximadas MDC y MADC de la descomposición de la misma señal sinusoidal unidimensional discretizada con ruido en una malla de 15 puntos de la figura 5. La figura muestra los ploteos del aproximado MDC verdadero (sub-figura superior) y de los aproximados MDC (sub-figura central) y MADC (sub-figura inferior), calculados en ruido.

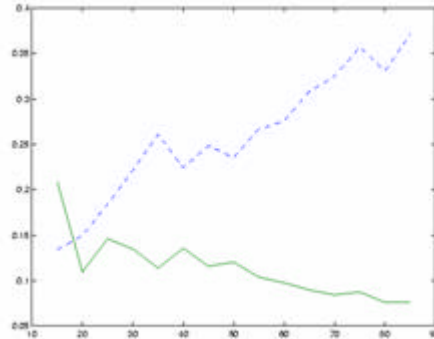


Figura 9. Para la comparación de robustez MDC vs MADC, la norma l_2 del sesgo de los aproximados fue asumida como indicador de precisión de los algoritmos en ruido. Esta figura muestra los gráficos superpuestos del logaritmo de ese indicador vs densidad de discretización de malla de la solución MDC (columna 3 de la tabla, trazo discontinuo) y de la solución MADC (columna 5 de la tabla, trazo continuo) lo que evidencia que MADC debe aportar aproximados más precisos que MDC en problemas de escala media y grande.

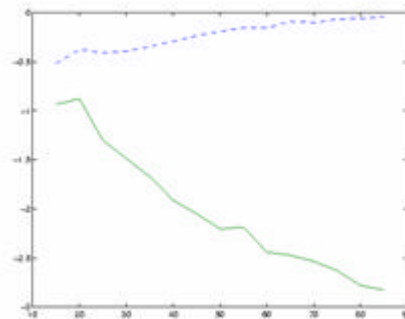


Figura 10. Para la comparación de robustez MDC vs. MADC, la norma de Frobenius de la matriz de covarianza de los aproximados fue asumida como indicador de sensibilidad en ruido. Esta figura muestra los gráficos superpuestos del logaritmo de ese indicador vs densidad de discretización de malla de las soluciones MDC (columna 4 de la tabla, trazo discontinuo) y MADC (columna 6 de la tabla, trazo continuo) lo que evidencia que MADC debe aportar aproximados menos sensitivos al ruido que MDC en problemas de escala media y grande.

4.3. Descomposición tiempo-frecuencia topográfica de electroencefalogramas (EEG) multicanales espontáneos.

4.3.1. Discusión.

Para completar la validación práctica de los resultados de la investigación, una variante multilineal del método rehabilitado fue aplicada a la descomposición tiempo-frecuencia topográfica de la señal bioeléctrica de los electroencefalogramas (EEG) multicanales, que suelen ser procesados en estudios no invasivos reales de la actividad electro-magnética del cerebro [12], tal como veremos a continuación.

Es conocido que la transformación de los datos del EEG al dominio de la frecuencia (mediante la Transformada Rápida de Fourier) ha sido ampliamente usada historicamente para describir los estados funcionales normales y anormales del cerebro como función de la potencia espectral en diferentes bandas de frecuencia [50]. Aunque esto ha producido toda una gama de hallazgos clínicamente muy importantes, al transformar el EEG al dominio de la frecuencia, la alta resolución temporal inherente al EEG se pierde y la validez general de la aplicación del análisis espectral clásico resulta seriamente limitada por la artificialidad de la obligada suposición de estacionaridad del EEG [12].

Es conocido también que, en general, debido a la naturaleza espectral y no estacionaria del EEG [12], la descomposición tiempo-frecuencia del EEG multicanal espontáneo supone, en primer lugar, la identificación en el EEG de ciertos “marcadores internos” de tiempo de eventos en forma de los denominados “microestados” [28, 29, 43, 55] y, en segundo lugar, la solución de problemas con datos no exactos, planteados previamente vía discretización, que resultan, como regla, muy mal-condicionados y de escala media o grande, cuyas soluciones deben satisfacer, además, el requisito de ser tan espacialmente suaves como sea posible [15, 21, 26, 42, 44, 49, 51, 56].

La descomposición tiempo-frecuencia topográfica de EEG espontáneos [27] es un novedoso método de análisis computadorizado del EEG que combina las ventajas de los métodos existentes del análisis espacial del EEG [12, 50], de la descomposición tiempo-frecuencia de las series de tiempo de la señal eléctrica de un canal único mediante “wavelets” [1, 4, 46] y de la identificación de microestados en el EEG mediante Reconocimiento de Patrones [43].

El nuevo método aporta una nueva forma topográfica de representación robusta tiempo-frecuencia del EEG humano multicanal espontáneo (figura 13), fisiológica y estadísticamente plausible: el EEG crudo es representado en cada electrodo por los coeficientes de la combinación lineal de toda una gama (diccionario) de series de tiempo (palabras) que corresponden a gráficos discretizados de funciones de Gabor

$$g_{g,w,t,q}(t) = e^{-\left(\frac{t-t}{g}\right)^2} \cos(w(t-t) + q)$$

para distintos valores discretos de los parámetros escalares reales a , w , t y q dentro de un rango predefinido (figura 12); así como de otras series de tiempo, semejantes gráficamente al EEG, pero conocidas fisiológica y analíticamente por el usuario y definidas previamente por él.

El procedimiento del Método de la Descomposición Tiempo-Frecuencia Topográfica (MDTFT) de EEG espontáneos [27] consiste en la secuencia de las dos etapas siguientes:

1. La distribución espacial suavizada en las combinaciones lineales de palabras del diccionario que mejor ajustan al EEG multicanal espontáneo; que es obtenida mediante una cierta variante multilineal del Método Aproximante de las Componentes (MADC) [37], cuya implementación es descrita detalladamente más adelante en esta tesis.
2. La distribución final de palabras del diccionario para un número mínimo de topografías (ya que el número de microestados es pequeño [27, 55]); que es obtenida mediante la variante del método de Reconocimiento de Patrones, denominado "Método de Acumulación de la Media K-ésima", detallada en [27] y [43].

4.3.2. Distribución espacial suavizada en combinaciones lineales de componentes de mejor ajuste al EEG multicanal vía MADC.

El problema de la distribución espacial suavizada en las combinaciones lineales de palabras del diccionario que mejor ajustan al EEG multicanal espontáneo es hallar en cada electrodo los coeficientes de las combinaciones lineales de las palabras del diccionario para una aproximación mínimo-cuadrática

lineal del EEG, que aporte simultaneamente la suavidad espacial máxima y la norma euclidea mínima de los coeficientes.

Más matemáticamente:

- Sean $m \in \mathbf{N}$, el número de electrodos sobre el cuero cabelludo (figura 11), $t \in \mathbf{N}$, el número de instantes de tiempo discretizado dentro de un intervalo acotado inferior y superiormente y $n \in \mathbf{N}$, el número de palabras (curvas elementales) predefinidas en el diccionario.
- Sean $X \in \mathbf{R}^{t \times m}$, la matriz del EEG discretizado; $D \in \mathbf{R}^{t \times n}$, la matriz del diccionario “Gabor” con otras palabras predefinidas; $S \in \mathbf{R}^{m \times m}$, la matriz de suavidad espacial de los valores de voltaje en los electrodos sobre el cuero cabelludo, implementada a través de la discretización del operador 2-D laplaciano real y, finalmente, $C \in \mathbf{R}^{n \times m}$, una matriz de los coeficientes de la descomposición desconocida.

Entonces, el problema queda planteado así: hallar la matriz $C^* \in \mathbf{R}^{n \times m}$, tal que

$$\begin{aligned}
 C^* &= \arg \min_{C \in \text{Arg} \min_{C \in \mathbf{R}^{n \times m}} \|DC - X\|_F^2} \left\{ \|C\|_F^2 + \|CS'\|_F^2 \right\} = \\
 &= \arg \min_{C \in \text{Arg} \min_{C \in \mathbf{R}^{n \times m}} \|DC - X\|_F^2} \|C(I \ S')\|_F^2.
 \end{aligned}$$

No es difícil ver que la matriz de suavidad S' opera solamente “fila por fila” sobre la matriz de coeficientes C . Por otra parte, tampoco es difícil comprender que, mediante los cambios de variable

$$P = (I \ S'), \ K = CP, \ Y = XP;$$

el problema multilinear en norma de Frobenius anterior puede ser reformulado facilmente a través de la concatenación sucesiva de los dos siguientes

$$K^* = \arg \min_{K \in \text{Arg} \min_{K \in \mathbf{R}^{n \times m}} \|DK - Y\|_F^2} \|K\|_F^2,$$

$$C'^* = \arg \min_{C' \in \text{Arg} \min_{C' \in \mathbf{R}^{n \times m}} \|PC' - (K^*)\|_F^2} \|C'\|_F^2;$$

cada uno de los cuales puede ser convertido inmediatamente, a su vez, al problema equivalente en la norma euclídeana (norma ℓ_2) mediante la vectorización "columna a columna" de todas las matrices y así quedar reformulado como un ya conocido problema de Mínimos Cuadrados lineales del tipo "goal-attainment" sin restricciones a dos niveles; cuya solución numérica puede ser aproximada robustamente mediante el MADC.

El nuevo método de descomposición tiempo-frecuencia topográfica del EEG espontáneo posee propiedades sin precedentes entre los métodos hasta hoy existentes, que devienen importantes ventajas de uso práctico; tales como las siguientes: robustez numérica, no presupone estacionaridad alguna de los datos de EEG, así como tampoco ninguna ortogonalidad ni estacionaridad de las curvas definidas por el usuario [27].



Figura 11. Esta figura muestra en una maqueta la adhesión de 128 electrodos para registro de señales bio-eléctricas sobre el hipotético cuero cabelludo de un individuo sujeto a un estudio no-invasivo de la actividad electro-magnética del cerebro humano.

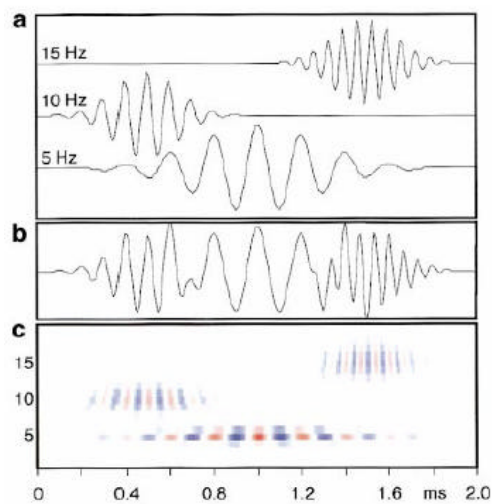


Figura 12. Esta figura ilustra la composición tiempo-frecuencia de una señal eléctrica de un canal único en el ejemplo de una señal artificial. Las curvas de tres series de tiempo distintas de tipo Gabor (sub-figura "a") son combinadas linealmente y producen una curva muy semejante a la de una señal verdadera de EEG (sub-figura "b") con su gráfico frecuencia vs. tiempo de Wigner (sub-figura "c"). La escala de colores indica los valores de las amplitudes locales obtenidas en cada punto del plano tiempo-frecuencia: rojo es positivo y azul es negativo; un tono más oscuro indica mayor intensidad. Figura tomada de [27].

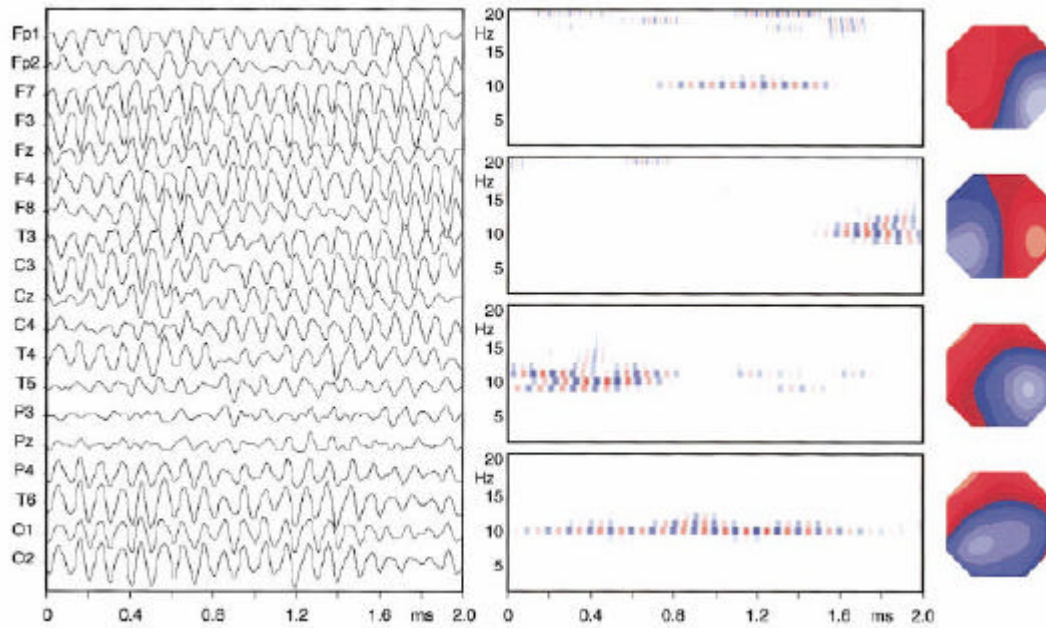


Figura 13. Esta figura muestra el resultado del registro y la descomposición tiempo-frecuencia topográfica de una señal de EEG verdadero de 19 canales de un estudio de la actividad eléctrica cerebral espontánea durante 2 milisegundos de descanso en vigilia con ojos cerrados. En ella aparece el registro de las señales de 19 electrodos vs. 256 instantes de tiempo (sub-figura vertical extrema izquierda), sometidas a descomposición en un diccionario “Gabor” de 10028 palabras con un número de condición $k \approx 1.1935 \times 10^{15}$; de la cual resultaron cuatro distribuciones topográficas principales con sus respectivos gráficos de Wigner (4 sub-figuras horizontales centrales) y sus correspondientes topografías (4 sub-figuras octogonales del extremo derecho). La descomposición explicó el 85.7% de la varianza total del EEG. Figura tomada de [27].

CONCLUSIONES.

Como consecuencia del trabajo realizado de investigación, los objetivos de tesis planteados fueron alcanzados satisfactoriamente.

I) Definimos la clase de las Iteraciones de Desglose Aproximante (Definición 2) como una nueva clase especial de iteraciones estacionarias lineales de desglose globalmente convergentes para la solución del Problema General de Mínimos Cuadrados lineales en dimensiones finitas sin restricciones. Demostramos que esas iteraciones forman también una nueva clase especial de iteraciones estacionarias lineales de Aproximaciones Sucesivas y que, entre sus propiedades de convergencia, aproximantes y otras asintóticas de interés, están las siguientes (Teoremas 1, 2 y 7):

- La sucesión de valores de la norma euclídeana al cuadrado de los residuos, definida sobre la sucesión de iterados de desglose aproximante, es estrictamente decreciente.
- Toda sucesión de iterados de desglose aproximante posee como límite de convergencia global la solución única del problema de Mínimos Cuadrados lineales del tipo "goal-attainment" definido positivo a dos niveles, asociado a su problema original.
- Toda sucesión de iterados de desglose aproximante se acerca en forma monótona decreciente a su límite global.
- Cada iterado de desglose aproximante puede ser obtenido seudoiterativamente; es decir, mediante una fórmula de cálculo directo a partir de los datos y parámetros.
- Todo iterado de desglose aproximante de paso finito depende continuamente de la matriz del problema y el vector de términos libres del Problema General.

II) Definimos la clase de las Seudoiteraciones de Desglose Aproximante (Definición 5) como una nueva clase de fórmulas de cálculo directo para la aproximación numérica robusta de soluciones del Problema General, cuya fórmula general y propiedades aproximantes y de robustez son derivadas con inmediatez de las de la nueva clase de iteraciones de desglose aproximante previamente introducida (Teorema 6 y Corolario 2).

III) Fue validada exitosamente, mediante simulación digital con ruido, la eficacia de las fórmulas de aproximación robusta de soluciones del Problema General con las ventajas evidenciadas comparativamente por los pseudoiterados de desglose aproximante sobre las soluciones seudoinvertidas del problema de la descomposición de señales discretizadas, donde esa solución resulta demasiado sensitiva a las perturbaciones de los datos.

IV) Fue demostrada la eficacia de las pseudoiteraciones de desglose aproximante mediante su aplicación experimental a la solución del problema de la descomposición tiempo-frecuencia topográfica de la señal de electroencefalogramas (EEG) multicanales humanos de la vida real.

V) Todos los resultados mencionados posibilitan una aproximación suficientemente precisa y robusta de las soluciones del Problema General sin necesidad alguna de evaluación heurística de la condicionalidad de cada problema original.

RECOMENDACIONES.

- 1.- Investigar diversos criterios del compromiso precisión vs. estabilidad numéricas de los aproximados para el auto-ajuste del parámetro t^* , número de pseudoiterados de desglose aproximante.
- 2.- Investigar la aproximación robusta de la solución de problemas de Mínimos-Cuadrados lineales a dos niveles en dimensiones finitas con restricciones lineales de igualdad y/o con restricciones de tipo cota.
- 3.- Investigar la aproximación robusta de la solución de problemas de Mínimos-Cuadrados no-lineales a dos niveles en dimensiones finitas sin restricciones.
- 4.- Investigar algoritmos de iteraciones de desglose aproximante, basados en variantes menos costosas de la Descomposición en Valores Singulares.
- 5.- Investigar la aplicación de la sensibilidad auto-ajustada a la aproximación de la solución numérica de los problemas inversos de las distintas clases de tomografía del cerebro.
- 6.- Investigar la inclusión de otros términos cuadrados lineales perfectos en la función objetivo superior del problema de la distribución espacial suavizada en combinaciones lineales de palabras del diccionario de mejor ajuste en la descomposición tiempo-frecuencia topográfica de electroencefalogramas multicanales espontáneos.
- 7.- Investigar la aplicación de los resultados obtenidos al diseño de reguladores adaptativos de auto-ajuste robustos multivariables de procesos.

REFERENCIAS.

1. Akay M., Akay Y. M., Cheng P., Szeto H. H. : "Investigating the effects of opioid drugs on electrocortical activity using wavelet transform". *Biological Cybernetics*, num. 72 (1995), pp. 431-437.
2. Anandalingam G., Friesz T. : "Hierarchical optimization: an introduction". *Annals of Operations Research*, num. 34 (1992), pp. 1-11.
3. Bard J. F. : "Convex two-level optimization". *Mathematical Programming*, vol. 40 (1988), pp. 15-27.
4. Bartnik E. A., Blinowska K. J., Durka P. J. : "Single evoked potential reconstruction by means of wavelet transform". *Biological Cybernetics*, num. 67 (1992), pp. 175-181.
5. Berezin I. S.; Zhidkov N. P. : *Computing Methods* (volume 2). MIR Publishers, Moscow, 1965.
6. Bjorck Å. : "Least squares methods". En: *Handbook of Numerical Analysis*. Vol. 1, eds. P. G. Ciarlet y J. L. Lions, Elsevier Pub., Amsterdam, 1990.
7. Brakhage H. : "On ill-posed problems and the method of Conjugate Gradients". *Inverse and Ill-Posed Problems* (editores Engl H. W. and Groetsch C. W.) Academic Press, Boston-Orlando-San Diego, 1987.
8. Censor Y., Zenios S. A. : "Proximal minimization algorithm with D-functions". *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 73, num. 3 (1992), pp. 451-464.
9. Chen S. : *Basis Pursuit* (Ph. D. Thesis), Department of Statistics, Stanford University, 1995.
10. Dax A. : "The convergence of linear stationary iterative processes for solving singular unstructured systems of linear equations". *SIAM Reviews*, vol. 32, num. 4 (1990); pp. 611-635.
11. Daubechies I. : "Time-frequency localization operators: a geometric phase space approach". *IEEE Transactions on Information Theory*, vol. 34 (1988), 605-612

12. Dumermuth G., Molinari L. : "Spectral analysis of the EEG. Some fundamentals revisited and some open problems". *Neuropsychobiology*, num. 17 (1987), pp. 85-89.
13. Elden L. : "Algorithms for the regularization of ill-conditioned least squares problems". *BIT*, num. 17 (1977); pp. 134-145.
14. Elfving T. : "Block-iterative methods for consistent and inconsistent linear equations". *Numerische Mathematik*, num. 35 (1980), pp. 1-12
15. Engl H., Hanke M., Neubauer A. : *Regularization of Inverse Problems*. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London, 1996.
16. Fletcher R. : *Practical Methods of Optimization* (second edition). John Wiley and Sons, New York, 1987.
17. Golub G. H., Heath M., Wahba G. : "Generalized Cross-Validation as a method for choosing a good ridge parameter". *Tecnometrics*, vol. 21, num. 2 (1979), 215-223.
18. Golub G. H., Van Loan C. F. : *Matrix Computations* (second edition). John Hopkins Pub. Co., Baltimore, 1989.
19. Groetsch C. W., Vogel C. R. : "Asymptotic theory of filtering for linear operator equations with discrete noisy data". *Mathematics of Computation*, vol. 49, num. 180 (1987), pp. 499-506.
20. Hanke M. : "Regularization with differential operators: an iterative approach". *Numerical Functional Analysis and Optimization*, num. 13 (1992), pp. 523-540.
21. Hanke M., Hansen P. Ch. : "Regularization methods for large-scale problems". *Surveys on Mathematics for Industry*, num. 3 (1993); pp. 253-315.
22. Hanke M., Neumann M. : "Preconditionings and splittings for rectangular systems". *Numerische Mathematik*, num. 57 (1990); pp. 85-95.
23. Hanke M., Raus T. : "A general heuristic for choosing the regularization parameter in ill-posed problems". *SIAM Journal of Scientific Computations*, vol. 17, num. 4 (1996), pp. 956-972.

24. Hansen P. Ch. : "Regularization Tools: A MatLab package for analysis and solution of discrete ill-posed problems". Numerical Algorithms, num. 6 (1994); pp. 1-35.
25. Iusem A. N. : "Some properties of Generalized Proximal Point methods for quadratic and linear programming" Journal of Optimization Theory and Applications, vol. 85, num. 3 (1995), pp. 593-412.
26. Jimenez-Sobrinio J. C., Biscay-Lirio R., Montoto O. : "Modeling the electroencephalogram by means of spatial spline smoothing and temporal autoregression". Biological Cybernetics, num. 72 (1995), pp. 249-259.
27. Koenig T., Marti-Lopez F., Valdes-Sosa P. : "Topographic time-frequency decomposition of spontaneous EEG". NeuroImage, vol. 14, num. 1 (2001); pp. 383-390.
28. Lehmann D., Ozaki H., Pal I. : "EEG alpha map series: Brain microstates by space-oriented adaptive segmentation". Electroencephalography and Clinical Neurophysiology, num. 67 (1987), pp. 271-288.
29. Lehmann D., Strik W. K., Henggeler B., Koenig T., Koukkou M. : "Brain electric microstates and momentary conscious mind states as building blocks of spontaneous thinking: I.- Visual imagery and abstract thought". International Journal of Psychophysiology, num. 29 (1998), pp. 1-11.
30. Levenberg K. : "A method for the solution of certain nonlinear problems in least squares". Quarterly of Applied Mathematics, num. 2 (1944), pp. 164-168.
31. Lopez, J., Guerra V., Hernandez M., Alvarez M., Garces I. : *Solución numérica del problema inverso de Fraunhofer con técnicas de regularización* (Reporte de Investigación CEMAFIT 98-47, ICIMAF 98-64), Centro de Matemáticas y Física Teórica, Instituto de Cibernética, Matemáticas y Física; 1998.
32. Mallat S. and Zhang Z. : "Matching Pursuit in a time-frequency dictionary". IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 41 (1993), 3397-3415.
33. Marquardt D. W. : "An algorithm for least squares estimation of non-linear parameters". SIAM Journal, num. 11 (1963), pp. 431-441.

34. Marti-Lopez F. : "Global convergence properties of the splitting iterations for solving linear least squares problems". *Investigación Operativa (ALIO)*, vol. 7, num. 3 (1999); pp. 133-142.
35. Marti-Lopez F. : "Approximating splitting pseudo-iterations". *Investigación Operativa (ALIO)*, vol. 9, num. 1-3 (2000); pp. 117-134.
36. Marti-Lopez F.: *ApproxKit. A mathematical Package of MatLab Programs and Functions for Numerically Robust Approximation of Multilinear Least Squares Solutions*. Editorial CENIC, Ciudad de La Habana, 2001 (www.mathworks.com/support/ftp/linalgv5.shtml y www.mathtools.net/Basic/Mathematics/MATLAB).
37. Marti-Lopez F. and Koenig T. : "Approximating Method of Frames". *Digital Signal Processing*, aceptado para publicación.
38. Martinet B. : "Regularisation d'inequations variationelles par approximations successives". *Revue Française d'Information sur la Recherche Operationelle* (1970), pp. 154-159.
39. Morozov V. A. : "On the solution of functional equations by the method of regularization". *Soviet Mathematical Doklads*, num. 7 (1966), pp. 414-417.
40. Neumaier A. : "Solving ill-conditioned and singular linear systems: a tutorial on regularization". *SIAM Reviews*, vol. 40, num. 3 (1998); pp. 636-666.
41. Oganessian S. M., Starostenko V. I. : "A regularizing iteration process based on the parametric functional of A. N. Tikhonov". *Soviet Mathematical Doklads (USSR Academy of Sciences)*, vol. 19, num. 1 (1979).
42. Pascual-Marqui R. D., Michel C. M., Lehmann D. : "Low resolution electromagnetic tomography: a new method for localizing electrical activity in the brain". *International Journal of Psychophysiology*, num. 18, vol. 1 (1994), pp. 49-65.
43. Pascual-Marqui R. D., Michel C. M., Lehmann D. : "Segmentation of brain electrical activity into microstates: Model estimation and validation". *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*, num. 42 (1995), pp. 658-665.

44. Ramsay J. O., Silverman B. W. : *Functional Data Analysis*. Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1997.
45. Rockafellar R. T. : "Monotone operators and proximal point algorithm". *SIAM Journal of Control and Optimization*, num. 14 (1976); pp. 877-898.
46. Senhadji L., Dillenseger J. D., Wendling F., Rocha C., Kinie A. : "Wavelet analysis of EEG for three dimensional mapping of epileptic events". *Annals of Biomedical Engineering*, num. 23 (1995), pp. 543-552.
47. Silva-Reherman C. : *Matemática Básica Superior*. Editorial Científico-Técnica, Ciudad de La Habana, 1985.
48. Stoer J. R., Bulirsch R. : *Introduction to Numerical Analysis* (tercera edición). Springer, New York, Berlín, Heidelberg; 2002.
49. Tikhonov A. N., Arsenin V. Y. : *Solutions of Ill-Posed Problems*. Winston, Washington (DC), 1977.
50. Valdes-Sosa P., Bosch-Bayard J, Grave-de-Peralta R., Hernández-Cáceres J., Riera-Díaz J., Pascual-Marqui R. D., Biscay-Lirio R. : "Frequency domain models of the EEG". *Brain Topography*, num.4, pp. 309-319.
51. Valdes-Sosa P., Marti-Lopez F., Garcia-Moruarte F., Casanova -Fernandez R. : "Variable resolution electric-magnetic tomography". *Memorias de la X Conferencia Internacional de BioMagnetismo "BioMag96"*, Santa Fe, New Mexico, 1996. Editor C. Woods, Filadelfia, 1998.
52. Vicente L. N., Calamai P. H. : "Bilevel and multilevel programming: a bibliography review". *Journal of Global Optimization*, num. 5 (1994), pp. 291-306.
53. Vicente L. N., Savard G., Júdece J. : "Descent approaches for quadratic bilevel programming". *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 81, num. 2 (1994), pp. 379-399.
54. Vogel C., Wade J. : "Iterative SVD-based methods for ill-posed problems". *SIAM Journal for Scientific Computations*, vol. 15, num. 3 (1994), pp. 736-754.

55. Wackermann J., Lehmann D., Michel C. M., Strik W. K. : "Adaptive segmentation of spontaneous EEG map series into spatially defined microstates". International Journal of Psychophysiology, num. 14 (1993), pp. 269-283.
56. Wahba G. : "Practical approximate solutions to linear operator equations when data are noisy", SIAM Journal of Numerical Analysis, num. 14 (1977), pp.651-667.

ANEXO 1. CONVENIO DE SÍMBOLOS Y NOTACIÓN.

Símbolo “ \otimes ”.

Denotamos con \otimes cada fin de definición o de demostración; agregando un subíndice numérico apropiado en los casos de enunciados con incisos.

Símbolo “ ∇ ”.

Sea una función $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Denotamos con ∇ el operador diferencial del gradiente de una función, $\nabla f(x)$

Notación “ $\|x\|_2$ ” y “ $\|X\|_2$ ”.

Denotamos con $\|x\|_2$ la norma euclídeana de x , si $x \in \mathbf{R}^n$, donde $n \in \mathbf{N}$ y $n < +\infty$. Si $X \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $m \in \mathbf{N}$ y $m < +\infty$, denotamos con $\|X\|_2$ la norma subordinada euclídeana de X .

Notación “ $\|X\|_F$ ”.

Sea $X \in \mathbf{R}^{m \times n}$, donde $m \in \mathbf{N}$ y $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$ y $n < +\infty$. Denotamos con $\|X\|_F$ la norma de Frobenius de X .

Notación “ $[X]_{i:j}^{k:l}$ ”.

Sean $X \in \mathbf{R}^{m \times n}$, $m \in \mathbf{N}$, $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$, $n < +\infty$; $i \in \mathbf{N}$, $j \in \mathbf{N}$, $1 \leq i \leq j \leq n$; $k \in \mathbf{N}$, $l \in \mathbf{N}$, $1 \leq k \leq l \leq m$. Denotamos con $[X]_{i:j}^{k:l}$ la submatriz o subvector de la matriz o vector X consistente en todos sus elementos desde la i -ésima columna hasta la j -ésima y desde la k -ésima fila hasta la l -ésima.

Notación “ $k(X)$ ”.

Sea $X \in \mathbf{R}^{m \times n}$, donde $m \in \mathbf{N}$ y $m < +\infty$ y $n \in \mathbf{N}$ y $n < +\infty$. Denotamos con $k(X)$ el número de condición de X .

Símbolo “ I ” y “ I_n ”.

Denotamos con I o I_n la matriz unidad -matriz cuadrada y diagonal de unos- cuyas dimensiones son respectivamente definidas por contexto o $n \times n$.

Notación “ $X < Y$ ” y “ $X \leq Y$ ”.

Sean $X \in \mathbf{R}^{n \times n}$ y $Y \in \mathbf{R}^{n \times n}$, matrices diagonales. Denotamos con $X < Y$ o $X \leq Y$ las relaciones $x_{ii} < y_{ii}$ o $x_{ii} \leq y_{ii}$ respectivamente entre los i -ésimos elementos diagonales de ambas matrices.

Notación “ X' ”.

Sea $X \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Denotamos con X' la matriz transpuesta de X , $X' \in \mathbf{R}^{n \times m}$.

Notación “ X^+ ”.

Sea $X \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Denotamos con X^+ la matriz pseudoinversa Moore-Penrose de X , $X^+ \in \mathbf{R}^{n \times m}$.

Notación “ X^n ”.

Sea $X \in \mathbf{R}^{m \times m}$. Denotamos con X^n , donde n es un escalar entero no-negativo, la matriz producto $\overbrace{XX \cdots X}^n$.

Notación “ \sqrt{X} ”.

Denotamos con \sqrt{X} la matriz real cuadrada y triangular, factor de la Descomposición de Cholesky de la matriz X , cuyas dimensiones son definidas contextualmente.

Notación “ $\{x_i\}_{i=0,1,2,\dots} \subseteq \mathbf{R}^n$ ”.

Denotamos con $\{x_i\}_{i=0,1,2,\dots} \subseteq \mathbf{R}^n$ la sucesión $x_0, x_1, x_2, \dots, x_i, \dots$; de elementos $x_i \in \mathbf{R}^n$, $i \in \mathbf{Z}^+$, ordenados según $i = 0, 1, 2, \dots$.

Notación “ $Diag(X)$ ”.

Sea $X \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Denotamos con $Diag(X)$ a la matriz real, cuadrada y diagonal, cuya diagonal principal coincide con la de la matriz X .

Notación “ $diag(X)$ ”.

Sea $X \in \mathbf{R}^{m \times n}$. Denotamos con $diag(X)$ al vector real, que coincide con la diagonal principal de la matriz X .

Notación “ $\text{int}(x)$ ”.

Denotamos con $\text{int}(x)$ la parte entera del número real x .

Símbolos “Arg min” y “arg min”.

Sea una función $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$. Denotamos con $\text{Arg min}_{x \in X \subseteq \mathbf{R}^n} f(x)$ el conjunto de todos los puntos de mínimo global de f en $X \subseteq \mathbf{R}^n$; es decir,

$$\text{Arg min}_{x \in X \subseteq \mathbf{R}^n} f(x) = \{x \in X \mid f(x) \leq f(y), \forall y \in X \subseteq \mathbf{R}^n\}.$$

Adicionalmente, sean f y X tales que $\text{Arg min}_{x \in X \subseteq \mathbf{R}^n} f(x) = \{x^*\}$. Así, denotamos con

$\text{arg min}_{x \in X \subseteq \mathbf{R}^n} f(x)$ el único punto de mínimo global de f en $X \subseteq \mathbf{R}^n$; es decir,

$$\text{arg min}_{x \in X \subseteq \mathbf{R}^n} f(x) = x^*.$$

Símbolo “min”.

Sean una función $f: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ y un conjunto $X \subseteq \mathbf{R}^n$, tales que $\text{Arg min}_{x \in X \subseteq \mathbf{R}^n} f(x) \neq \emptyset$.

Denotamos con $\min_{x \in X \subseteq \mathbf{R}^n} f(x)$ el problema de optimización que consiste en hallar un punto de

mínimo global de f en $X \subseteq \mathbf{R}^n$; es decir, el problema de hallar, al menos, un

$x^* \in \text{Arg min}_{x \in X \subseteq \mathbf{R}^n} f(x)$.

ANEXO 2. PAQUETE DE PROGRAMAS “APPROXKIT”.

ApproxKit versión 2.0, para MatLab 5.3.0.10183 (R11) de MathWorks Inc.

ApproxKit es un juego de programas y funciones MatLab para la aproximación numericamente robusta de soluciones mínimo-cuadráticas multi-lineales discretas.

ApproxKit es particularmente útil en la solución de aquellos problemas mínimo-cuadráticos multi-lineales discretos de escala media o media-grande, mal-condicionados; tales como, por ejemplo, los problemas de aproximación, inversos discretizados o de regresión multi-lineal, tan frecuentes en la realización de tareas de cálculo y procesamiento de datos experimentales.

Los algoritmos de estos programas y funciones fueron concebidos para aplicar los resultados más recientes de las teorías de los problemas de mínimos cuadrados a dos niveles y de regularización.

ApproxKit es un juego de programas y funciones MatLab para la aproximación numericamente robusta de soluciones mínimo-cuadráticas lineales en dimensiones finitas. ApproxKit es particularmente útil en la solución de problemas mínimo-cuadráticos lineales en dimensiones finitas de escala media o media-grande, numericamente mal-condicionados; como regla, tales como, los problemas de aproximación, inversos o de regresión multi-lineales discretos, tan frecuentes en la realización de complejas tareas de cálculo y procesamiento de información científico-técnicos.

Los algoritmos de estos programas y funciones fueron concebidos para aplicar los resultados más recientes de las teorías de los problemas de mínimos cuadrados a dos niveles y de regularización (ver referencias) e instrumentados en una forma abierta no solamente para su uso inmediato, sino, más bien, para que el usuario MatLab construya sus propios programas y funciones adecuados al propósito antes mencionado.

Puestos previamente a punto bajo MatLab 5.3.0.10183 (R11), los algoritmos de los programas y funciones fueron probados exitosamente tanto mediante las múltiples y diversas funciones de “test” basadas en las “matrices elementales especiales” que ofrece MatLab, como mediante las de problemas inversos, que aparecen en “Regutools” [24], el paquete desarrollado en MatLab por el Dr. Per Christian Hansen del Centro Danés de Computación para la Investigación Científica y la Educación (UNI*C); así como aquéllos que son agrupados como “toolbox” con tal propósito y ofrecidos, como regla, junto a MatLab.

El paquete ApproxKit consiste de los 11 códigos-fuente MatLab orientados a propósito de las funciones ApproxKit y un programa demostrativo (el fichero ApproxKitdemo.m), todos ellos editados como ficheros “*.m” separados o, secuencialmente, como un único fichero “*.txt” (el fichero ApproxKit.txt); y un fichero “readme” de tipo “*.txt”.

Los siguientes ficheros “*.m” son obligatorios: ApproxKitdemo, Argmingcve, Argmingcvt, Asi, Aspi, BoxandWall, Compgsvd, Compsvd, Itr, Menasi, Menaspi y Pitr.

Aparte de los antes mencionados ficheros “*.m” propios de ApproxKit, los dos siguientes ficheros “*.m” del paquete REGUTOOLS (“Regularization tools”, versión 2.0, para MatLab 4.0, registrado por Per Christian Hansen y UNI*C y libremente disponibles en el sitio WEB de MathWorks) son también obligatorias: Csdecomp y Gsvd.