UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA
CENTRO NACIONAL DE ESTUDIOS GENERALES

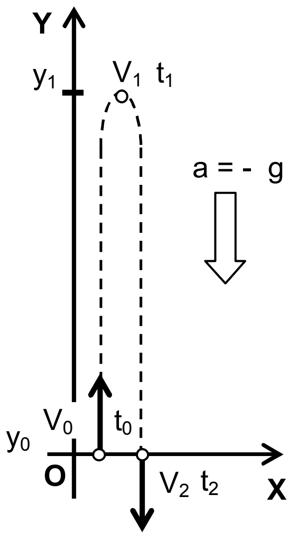
MODALIDAD SABATINA

UNIDAD II CINEMATICA: MOVIMIENTO DE CAÍDA LIBRE. MOVIMIENTO BIDIMENSIONAL

GUIA DE TRABAJO CLASE PRÁCTICA

CAIDA LIBRE

24. ¿A que velocidad debe ser lanzada una bola verticalmente desde el nivel del piso para elevarse a una altura máxima de **50,0 m**? b) ¿Cuánto tiempo estará en el aire?



En el intervalo de tiempo $\Delta t_1 = t_1 - t_0$ la bola alcanza la máxima altura, pasa de y_0 a y_1

Ya que conocemos el desplazamiento vertical y que la velocidad en la máxima altura es instantáneamente cero, utilizamos la tercera relación cinemática.

$\upsilon_1^2 - \upsilon_0^2 = -2g\,\Delta y$, $\upsilon_1 = 0\,m/s$ la altura máxima es $H = \Delta y = y_1 - y_0$

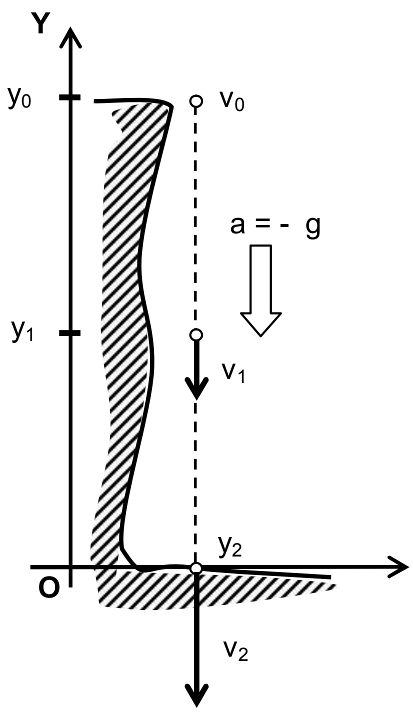
$$\upsilon_0 = \pm\sqrt{2g\Delta y} \qquad \upsilon_0 = \sqrt{19{,}6\frac{m}{s_2}50{,}0\,m} = 31{,}3\frac{m}{s}$$

El tiempo que permanece en el aire la bola puede calcularse como $2t_1$ esto es dos veces el tiempo de subida. Lo calculamos con la relación velocidad tiempo.

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 - g\,t_1 \rightarrow t_1 = \frac{\upsilon_0}{g};\quad 2t_1 = 6{,}39\,s$$

O evaluando el movimiento completo, ascenso y descenso hasta el mismo punto de lanzamiento. En el cual la velocidad final es igual en modulo a la inicial, pero con signo menos: $\upsilon_2 = -\upsilon_0$

$$\upsilon_2 = \upsilon_0 - g\,t_2 \rightarrow t_2 = \frac{\upsilon_0 - \upsilon_2}{g} = 6{,}39\,s$$



25. Una roca se deja caer desde un risco de **100 m** de alto ¿cuánto tiempo tarda en caer a) los primeros **50,0 m** y b) los segundos **50,0 m**?

Determinamos el tiempo requerido para el desplazamiento $\Delta y_1 = y_1 - y_0 = -50\,m$ conociendo la velocidad que adquiere, υ_1

$\upsilon_1^2 - \upsilon_0^2 = -2g\,\Delta y_1 \quad \upsilon_0 = 0\,m/s$

$\upsilon_1 = \pm\sqrt{-2g\,\Delta y} \qquad \upsilon_1 = \pm\sqrt{-2g\,\Delta y} = -31{,}3\,m/s$

Esta velocidad se evalúa en la relación velocidad -tiempo

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 - g\,t_1 \rightarrow t_1 = \frac{-\upsilon_1}{g} = 3{,}19\,s$$

También se puede calcular t_1 utilizando la ecuación del movimiento, la relación velocidad – tiempo.

$$y_1 = y_0 + \upsilon_0 t_1 - \frac{1}{2}g\,t_1^2 \rightarrow y_1 = y_0 + 0 - \frac{1}{2}g\,t_1^2 \rightarrow t_1 = \sqrt{2(y_0 - y_1)/g}$$

Para hallar el tiempo $t_2 - t_1$ requerido para el desplazamiento $y_2 - y_1 = -50\,m$ podemos repetir el procedimiento previo, que involucra un calculo intermedio. Pero veamos otra via:

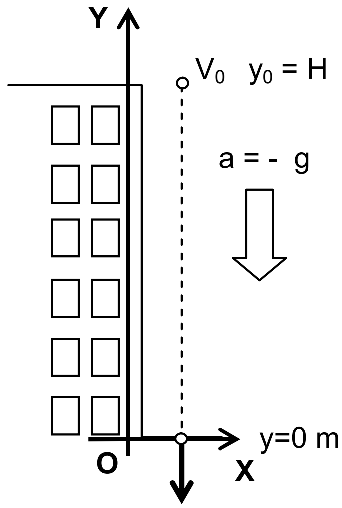
$$y_2 = y_1 + \upsilon_1 t - \frac{1}{2} g t^2 \quad \rightarrow \quad t^2 - 2(\frac{\upsilon_1}{g})t + 2\frac{y_2 - y_1}{g} = 0$$

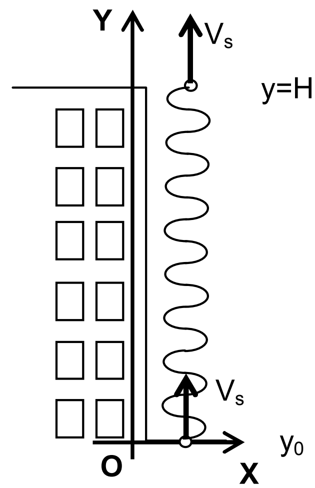
$$\frac{\upsilon_1}{g} = 3{,}194\ s$$

$$2\frac{y_2 - y_1}{g} = -10{,}204\ s^2$$

$$t = -3{,}194\ s \pm \sqrt{(3{,}194\,s)^2 - (-10{,}204\ s^2)} = 1{,}32\,s$$

26. Un estudiante ocioso suelta una sandía desde una azotea y oye que la sandía se estrella **3,00 s** después. ¿Qué altura tiene el edificio? La rapidez del sonido es de **340 m/s**. Ignore la resistencia del aire.





El tiempo de $t = 3{,}00\,s$ es la suma del tiempo de caída libre t_1 y el que le toma al sonido en alcanzar al estudiante t_2 La primera ecuación que escribimos es:

$t = t_1 + t_2$ Ec 1.

Para el movimiento de caída libre la ecuación del movimiento, la relación velocid ad – tiempo es:

$$y = y_0 + \upsilon_0 t_1 - \frac{1}{2} g t_1^{\,2} \quad \rightarrow \quad 0 = H - \frac{1}{2} g t_1^{\,2}$$

$H = \frac{1}{2} g t_1^{\,2}$ Ec 2.

Para la propagación del sonido la ecuación del movimiento es la del MRU.

$y = y_0 + \upsilon_S t_2$

$H = \upsilon_S t_2$ Ec 3.

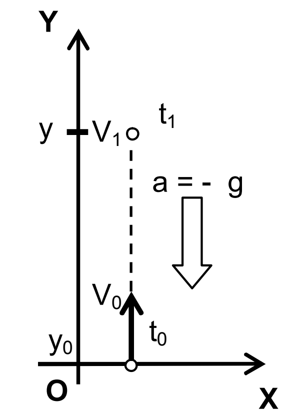
$$\upsilon_S t_2 = \frac{1}{2} g t_1^{\,2} \rightarrow \upsilon_S (t - t_1) = \frac{1}{2} g t_1^{\,2} \rightarrow \quad t_1^{\,2} + 2\frac{\upsilon_S}{g} t_1 - 2\frac{\upsilon_S t}{g} = 0$$

La solución de la ecuación cuadrática no proporciona $t_1 = 2{,}88\ s$

Sustituyendo en la ecuación 1 obtenemos la altura del edificio.

$$H = \frac{1}{2} g t_1^{\,2} = 4{,}9\frac{m}{s^2}(2{,}88\,s)^2 = 40{,}7\ m$$

27. Si una pulga salta una altura de **0.640 m**; Determine: a) la rapidez en el instante que abandona el terreno y b) el tiempo permanece en el aire.



El máximo desplazamiento vertical Δy (la altura de 0,640 m) se realiza sin contacto con el terreno, es decir, en caída libre con una velocidad inicial hacia arriba y al completar este desplazamiento instantáneamente pasa por el reposo, $\upsilon_1 = 0\,m/s$.

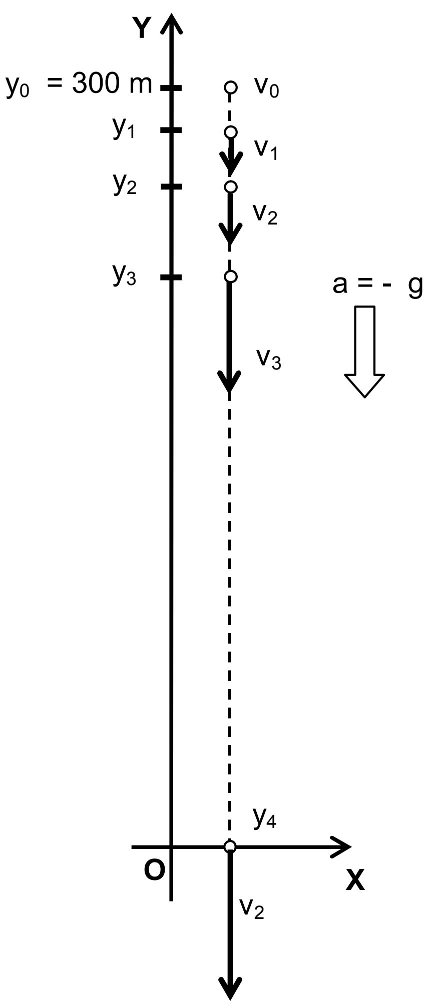
Entre t_0 y t_1 evaluamos la relación rapideces - desplazamiento

$$\upsilon_1^2 - \upsilon_0^2 = -2g\,\Delta y_1 \rightarrow \quad -\upsilon_0^2 = -2g\,\Delta y_1 \quad \rightarrow \quad \upsilon_0 = \sqrt{2g\Delta y} = 3{,}54\,m/s$$

El tiempo se evalúa de la relación velocidad-tiempo

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 - g\,t_1 \rightarrow t_1 = \frac{\upsilon_0}{g};\ t = 2t_1 = 2\frac{\upsilon_0}{g} = 0{,}72\,s$$

28. Un objeto cae libremente a partir del reposo. Halle: (a) su aceleración, (b) la distancia que recorre en **3.0 s**; (c) su rapidez después de descender **70.0 m**; (d) el tiempo necesario para alcanzar una rapidez de **25.0 m/s**; (e) el tiempo que tarda en caer **300 m**.



El desplazamiento recorrido, a partir del reposo, $\upsilon_0 = 0\,m/s$ entre t_0 y $t_1 = 3{,}0\,s$ se puede obtener de la ecuación del movimiento

$$y_1 - y_0 = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}g\,t^2 \rightarrow y_1 - y_0 = -\frac{1}{2}g\,t^2 = -44{,}1\,m$$

La distancia recorrida es $44{,}1\,m$

Después de ¨descender¨ $70\,m$ i.e. un desplazamiento $\Delta y = -70\,m$ a partir de que se deja caer, alcanza una velocidad υ_2

$$\upsilon_2^2 - \upsilon_0^2 = -2g\,\Delta y \rightarrow \upsilon_2 = \pm\sqrt{-2g\,\Delta y} = -37\,m/s$$

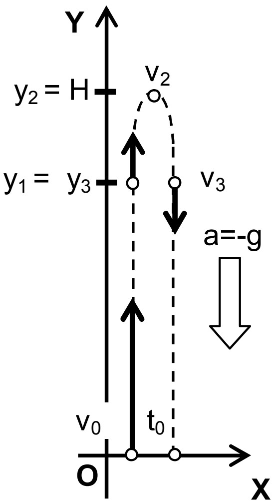
El tiempo que requiere para alcanzar una rapidez $\upsilon_1 = -25{,}0\,m/s$ se obtiene de la relación velocidad tiempo.

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 - g\,t_1 \rightarrow t_1 = -\frac{\upsilon_1}{g} = 2{,}55\,m/s$$

Igual se puede determinar el tiempo que tarda en caer $300\,m$ i.e. $\Delta y = -300\,m$ pero usaremos la ecuación del movimiento.

$$y_3 - y_0 = \upsilon_0 t - \frac{1}{2}g\,t^2 \rightarrow y_3 - y_0 = -\frac{1}{2}g\,t^2 \rightarrow t = \sqrt{-2\frac{y_3 - y_0}{g}} = 7{,}8\ s$$

29 Un joven lanza una pelota de billar verticalmente hacia arriba con una rapidez de **20.0 m/s**. (a) ¿cuál es el tiempo de subida? (b) ¿qué altura máxima alcanza? (c) ¿cuánto tiempo estuvo en el aire desde que se lanzó? (d) ¿en qué tiempo adquiere una rapidez de **6.00 m/s** y a que altura se encuentra?



El tiempo de subida se puede determinar a partir de la relación velocidad tiempo, donde $\upsilon_2 = 0\,m/s$ $\upsilon_0 = 20{,}0\,m/s$

$$\upsilon_2 = \upsilon_0 - g\,t_2 \;\rightarrow t_2 = \frac{\upsilon_1}{g} = 2{,}04\ s$$

La altura máxima, como no se conoce el tiempo en que la alcanza, la determinamos de la tercera relación:

$$\upsilon_2^2 - \upsilon_0^2 = -2\,g\,\Delta y \rightarrow\; -\upsilon_0^2 = -2\,g(H-0) \rightarrow H = \upsilon_0^2/2g = 20{,}04\ m$$

La piedra adquiere, durante el ascenso y el descenso, la rapidez de 6,00 m/s una vez positiva y la otra negativa. Al primer tiempo llamémoslo t_1 así como a la velocidad, υ_1

$$\upsilon_1 = \upsilon_0 - g\,t_1 \;\rightarrow t_1 = \frac{\upsilon_0 - \upsilon_1}{g} = \frac{14{,}0\ m/s}{9{,}8\,m/s^2} = 1{,}43\ s$$

Ahora yendo hacia abajo el tiempo será t_3 así como a la velocidad, $\upsilon_3 = -\ 6{,}00\ m/s$

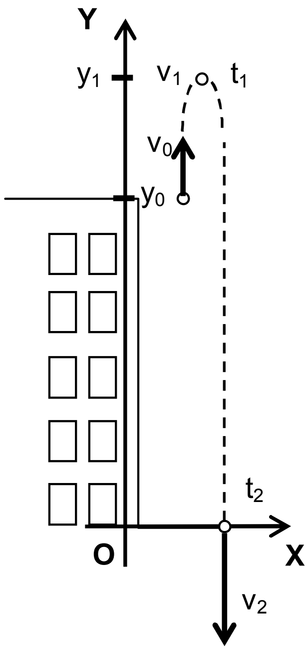
$$\upsilon_3 = \upsilon_0 - g\,t_3 \;\rightarrow t_3 = \frac{\upsilon_0 - \upsilon_3}{g} = \frac{26{,}0\ m/s}{9{,}8\,m/s^2} = 2{,}65\ s$$

La altura en la que se encuentra, esto es la posición al tiempo t_1 o al tiempo t_3 se determina evaluando ya sea uno u otro tiempo en la ecuación del movimiento.

$$y_1 = y_0 + \upsilon_0 t - \frac{1}{2} g\,t^2$$

$$y_1 = 0\,m + 20{,}0\ \frac{m}{s} 1{,}43\ s - 4{,}9\ \frac{m}{s^2}(1{,}43\ s)^2$$

$$y_1 = 18{,}6\,m$$



30. Desde lo alto de un edificio, una persona tira una piedra verticalmente hacia arriba con una rapidez de **12.5 m/s**. la piedra llega al suelo **4.25 s** después. ¿Qué diferencia hay entre la altura que alcanzó la piedra y la del edificio? ¿Cuál es la velocidad de la piedra cuando llega al nivel del suelo?

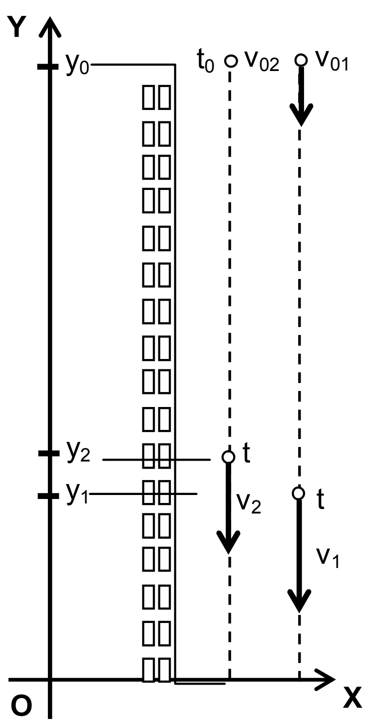
Siendo que en el punto de máxima altura la velocidad es instantáneamente nula, calculamos la diferencia de altura como el desplazamiento vertical, entre t_0 y t_1

$$\upsilon_1^2 - \upsilon_0^2 = -2g\,\Delta y \rightarrow -\upsilon_0^2 = -2g\Delta y \rightarrow \Delta y = \upsilon_0^2/2g = 7{,}97\ m$$

La velocidad con que la piedra llega al nivel del suelo la calculamos de la relación velocidad – tiempo, evaluando como tiempo inicial t_0 y como tiempo final t_2

$$\upsilon_2 = \upsilon_0 - g\,t_2 \rightarrow \upsilon_2 = 12{,}5\frac{m}{s} - 9{,}8\frac{m}{s^2}\,4{,}25s \rightarrow \upsilon_2 = -29{,}15\frac{m}{s}$$

33. Desde lo alto de un edificio se deja caer un objeto y, simultáneamente, se lanza hacia abajo otro con una rapidez inicial de **1.0 m/s**. ¿En qué instante la distancia entre ellos es **18 m**?



Para cada objeto debe escribirse su ecuación del movimiento, esto es su relación posición – tiempo. ¿Por qué? Tienen diferente velocidad inicial, pero la razón de crecimiento de la rapidez (aceleración= g)es la misma.

Ecuación del movimiento de 1. Parte del reposo $\upsilon_{01} = 0\,m/s$.

$$y_1 = y_0 + \upsilon_{01}t - \frac{1}{2}g\,t^2$$

$$y_1 = y_0 - \frac{1}{2}g\,t^2$$

Ecuación del movimiento de 2. Velocidad inicial $\upsilon_{02} = -1{,}0\,m/s$.

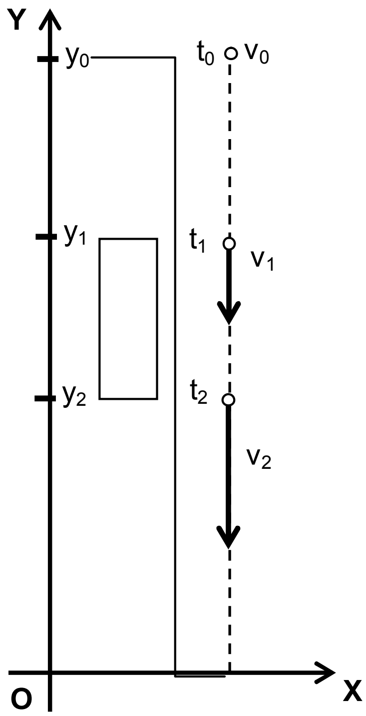
$$y_2 = y_0 + \upsilon_{02}t - \frac{1}{2}g\,t^2$$

La distancia entre ellos es la diferencia de sus posiciones, $d = 18{,}0\,m$

$$y_2 - y_1 = d$$

$$d = (y_0 + \upsilon_{02}t - \frac{1}{2}g\,t^2) - (y_0 - \frac{1}{2}g\,t^2) \rightarrow d = \upsilon_{02}t \rightarrow t = \frac{d}{\upsilon_{02}} = 18\ s$$

36. La ventana de un edificio tiene una altura de **2.5 m**. Si una piedra tarda **0.30 s** en pasar desde la parte superior a la inferior de la ventana, ¿desde qué altura se soltó la piedra?



La altura de la ventana es $y_1 - y_2 = 2{,}5\,m$ el tiempo que la piedra recorre esa distancia, $t = 0{,}30\,s$ depende de la velocidad inicial υ_1 en ese intervalo. La altura desde la cual se soltó la piedra condiciona el valor de esa velocidad inicial, así que calculamos primero υ_1 utilizando la ecuación del movimiento:

$$y_2 = y_1 + \upsilon_1 t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$y_2 - y_1 + \frac{1}{2} g t^2 = \upsilon_1 t$$

$$\upsilon_1 = \frac{(y_2 - y_1) + \frac{1}{2} g t^2}{t} = \frac{(y_2 - y_1)}{t} + \frac{1}{2} g t = -6{,}863\ m/s$$

Calculamos la altura $y_0 - y_1$ con la relación cinemática:

$$\upsilon_1^2 - \upsilon_0^2 = -2g\,\Delta y \ \rightarrow\ \upsilon_1^2 = -2g\,\Delta y$$

$$\Delta y = -\frac{\upsilon_1^2}{2g} = -2{,}40\,m$$

Pero este es el desplazamiento vertical, negativo, la altura es $H = y_0 - y_1 = -\Delta y = 2{,}4\ m$

MOVIMIENTO CIRCULAR

38. La órbita de la Luna alrededor de la Tierra es aproximadamente circular, con un radio medio de **3.84 x 10 ^{8} m**. Se requieren **27.3 días** para que la Luna complete una revolución alrededor de la Tierra. Encuentre la velocidad orbital media de la Luna y su aceleración centrípeta.

El intervalo de tiempo para completar una revolución se llama periodo, T.

En la conversión de día a segundo dejaremos la operación indicada.

$$T = 27{,}3\ dia \frac{86400\,s}{dia}$$

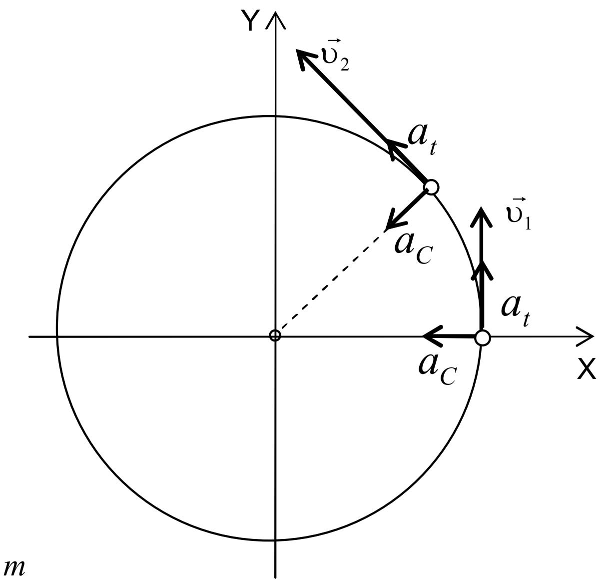
La velocidad media orbital es espacio recorrido en una revolución dividido por el periodo.

$$\upsilon = \frac{S}{T} = \frac{L_C}{T} = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2\pi * 3{,}84x10^8\,m}{27{,}3 * 86400\,s} = 1023\ \frac{m}{s} = 1{,}02\ \frac{km}{s}$$

La aceleración centrípeta es $a_C = \frac{\upsilon^2}{R} = = \frac{(1023\ \frac{m}{s})^2}{3{,}84x10^8\ m} = 2{,}72\ \frac{mm}{s^2}$ dirigida hacia el centro de la trayectoria

39. La rapidez de una partícula que se mueve describiendo una circunferencia de **2.00 m** de radio, aumenta a una razón constante de **3.00 m/s²**. En cierto instante el módulo de la aceleración total es **5.00 m/s²**. En ese instante, determine: (a) la aceleración centrípeta de la partícula (b) su rapidez.

La aceleración de 3,00 m/s^2 es la componente tangencial de la aceleración total, ya que se dice que es la razón de aumento de la rapidez de la partícula.



$$a_t = 3{,}00 \ \frac{m}{s^2}$$

La aceleración total es

$$a^2{}_{TOTAL} = a^2{}_C + a^2{}_t$$

La aceleración centrípeta es

$$a_C = \sqrt{a^2{}_{TOTAL} - a^2{}_t}$$

$$a_C = \sqrt{(25{,}0 - 9{,}00)\frac{m^2}{s^4}} = 4{,}00 \ \frac{m}{s^2}$$

La rapidez se determina de la definición de aceleración centrípeta.

$$a_C = \frac{\upsilon^2}{R} \ \rightarrow \ \upsilon = \sqrt{a_C R} = \sqrt{4{,}00 \ \frac{m}{s^2} * 2{,}00 m} = 2{,}83 \ \frac{m}{s}$$

TIRO HORIZONTAL

41. Un chorro de agua sale horizontalmente de una manguera con una rapidez de **12.0 m/s**. Cae al suelo **500 ms** más tarde. ¿A qué altura sobre el suelo se encuentra la boca de la manguera? ¿Cuál es la distancia horizontal recorrida por el agua? ¿Con qué velocidad llega el agua al suelo?

La velocidad inicial en el **T**.**H**. tiene componente vertical nula $\upsilon_{0Y} = 0 \ m/s$ así que $\upsilon_{0X} = 12{,}0 \ m/s$

La altura de la boca de la manguera la obtenemos de la ecuación del movimiento para la vertical.

$$y = y_0 + \upsilon_{0Y} t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$0 = H - \frac{1}{2} g t^2 \ \rightarrow \ H = 4{,}9 \ \frac{m}{s^2} * 0{,}250 s^2 = 1{,}225 m \approx 1{,}23 m$$

Ya que en el movimiento horizontal conocemos la componente de la rapidez, con el tiempo de vuelo obtenemos la distancia horizontal recorrida por el agua.

$$x = x_0 + \upsilon_{0X} t \quad \rightarrow \quad R = \upsilon_{0X} t = 12{,}0 \frac{m}{s} * 0{,}500 s = 6{,}0 m$$

La velocidad con que llega al suelo tiene componente X constante, $\upsilon_{0X} = 12{,}0 \ m/s$ y componente Y

$$\upsilon_Y = \upsilon_{0Y} - g\,t \rightarrow \upsilon_Y = -g\,t = -9{,}8 \frac{m}{s^2} 0{,}500 s \rightarrow \upsilon_Y = -4{,}9 \ \frac{m}{s}$$

La velocidad resultante es $\upsilon = \sqrt{\upsilon^2{}_{0X} + \upsilon_y^2} \ \rightarrow \ \upsilon = \sqrt{144 \frac{m^2}{s^2} + 24{,}01 \frac{m^2}{s^2}} = 12{,}3 \ \frac{m}{s}$

44. Desde la cima de un acantilado se lanza horizontalmente un proyectil que tarda **4,00 s** en chocar contra el agua en un punto que dista **60,0 m** de la base del acantilado. Calcular: (a) ¿qué altura tiene el acantilado? (b) ¿con qué velocidad se lanzó el proyectil? (c) ¿con qué velocidad llega al agua?

La altura del acantilado la obtenemos con el tiempo de vuelo sustituido en la ecuación del movimiento, componente Y.

$$y = y_0 + \upsilon_{0Y} t - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow 0 = H - \frac{1}{2} g t^2 \rightarrow H = \frac{1}{2} g t^2 = 4{,}9 \frac{m}{s^2} * 16{,}0 s^2 = 78{,}4 m$$

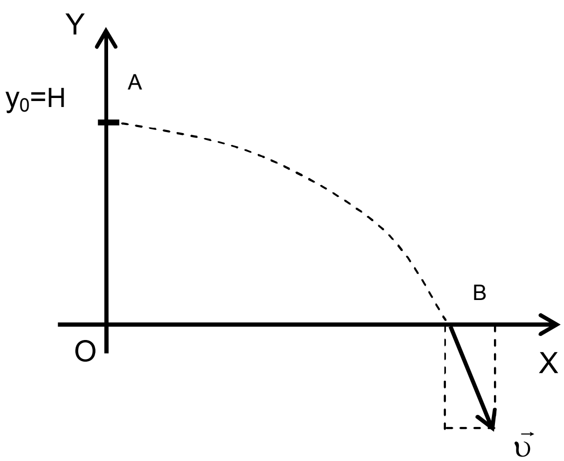
Con el tiempo de vuelo y el alcance horizontal hallamos la velocidad inicial, υ_{0X} utilizando la ecuación del movimiento, componente X.

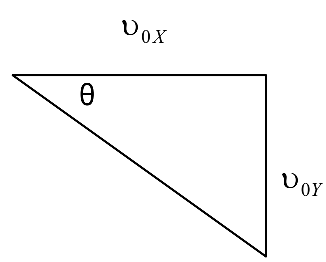
$$x = x_0 + \upsilon_0 t \rightarrow \upsilon_{0X} = \frac{x}{t} = \frac{60{,}0 m}{4{,}00 s} = 15{,}0 m/s$$

La velocidad final tiene componente X $\upsilon_{0X} = 15{,}0\ m/s$ y componente Y

$$\upsilon_Y = \upsilon_{0Y} - g\, t \rightarrow \upsilon_Y = -g\, t = -9{,}8 \frac{m}{s^2} 4{,}00 s \rightarrow \upsilon_Y = -\ 39{,}2\ \frac{m}{s}$$

La velocidad resultante es $\upsilon = \sqrt{\upsilon^2_{0X} + \upsilon_y^2} \rightarrow \upsilon = \sqrt{225 \frac{m^2}{s^2} + 1536{,}6 \frac{m^2}{s^2}} = 42\ \frac{m}{s}$





$$\tan\theta = \frac{|\upsilon_{0Y}|}{|\upsilon_{oX}|}$$

$$\theta = \tan^{-1} \frac{|\upsilon_{0Y}|}{|\upsilon_{oX}|} = 69{,}1^0$$