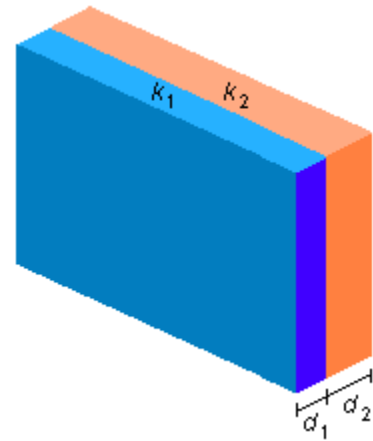


Uma parede constitui-se de duas chapas sobrepostas, feitas de diferentes materiais. Os coeficientes de condutibilidade térmica e as espessuras das chapas são iguais k_1 , d_1 e k_2 , d_2 respectivamente. As temperaturas das superfícies externas das paredes são iguais a T_1 e T_2 ($T_1 > T_2$) e mantêm-se constantes. Determinar:

- A temperatura na superfície de interface entre as duas chapas;
- Se as espessuras das duas chapas forem iguais, qual o coeficiente de condutibilidade térmica da parede.



Dados do problema

- coeficiente de condutibilidade térmica da chapa 1: K_1 ;
- espessura da chapa 1: d_1 ;
- temperatura externa da chapa 1: T_1 ;
- coeficiente de condutibilidade térmica da chapa 2: K_2 ;
- espessura da chapa 2: d_2 ;
- temperatura externa da chapa 2: T_2 .

Solução

a) O calor passa do meio de maior temperatura (T_1) para o meio de menor temperatura (T_2), sendo T_i a temperatura na interface das duas chapas e A a área delas, o fluxo através da chapa 1 é dado por

$$\phi_1 = K_1 \cdot \frac{A \cdot (T_1 - T_i)}{d_1} \quad (I)$$

o fluxo através da chapa 2 é dado por

$$\phi_2 = K_2 \cdot \frac{A \cdot (T_i - T_2)}{d_2} \quad (II)$$

Como as superfícies são mantidas à temperaturas constantes o fluxo de calor está em regime estacionário (figura 1), assim os fluxos através das duas superfícies devem ser iguais

$$\phi = \phi_1 = \phi_2$$

$$K_1 \cdot \frac{A \cdot (T_1 - T_i)}{d_1} = K_2 \cdot \frac{A \cdot (T_i - T_2)}{d_2}$$

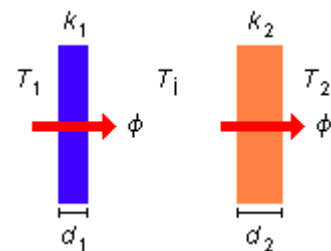


figura 1

multiplicando em "cruz", temos

$$K_1 \cdot d_2 \cdot (T_1 - T_i) = K_2 \cdot d_1 \cdot (T_i - T_2)$$

$$K_1 \cdot d_2 \cdot T_1 - K_1 \cdot d_2 \cdot T_i = K_2 \cdot d_1 \cdot T_i - K_2 \cdot d_1 \cdot T_2$$

$$K_2 \cdot d_1 \cdot T_i + K_1 \cdot d_2 \cdot T_i = K_1 \cdot d_2 \cdot T_1 + K_2 \cdot d_1 \cdot T_2$$

$$T_i \cdot (K_2 \cdot d_1 + K_1 \cdot d_2) = K_1 \cdot d_2 \cdot T_1 + K_2 \cdot d_1 \cdot T_2$$

$$T_1 = \frac{K_1 \cdot d_2 \cdot T_1 + K_2 \cdot d_1 \cdot T_2}{K_2 \cdot d_1 + K_1 \cdot d_2}$$

b) Para espessuras iguais ($d_1 = d_2 = d$) a expressão obtida no item anterior para a temperatura na interface se reduz a

$$T_1 = \frac{K_1 \cdot d \cdot T_1 + K_2 \cdot d \cdot T_2}{K_2 \cdot d + K_1 \cdot d}$$

colocando a espessura d em evidência no numerador e no denominador, temos

$$\begin{aligned} T_1 &= \frac{d \cdot (K_1 \cdot T_1 + K_2 \cdot T_2)}{d \cdot (K_2 + K_1)} \\ T_1 &= \frac{K_1 \cdot T_1 + K_2 \cdot T_2}{K_2 + K_1} \end{aligned} \quad (III)$$

substituindo (III) em (I) e $d = d_1$, obtemos

$$\phi_1 = K_1 \cdot \frac{A \cdot \left(T_1 - \frac{K_1 \cdot T_1 + K_2 \cdot T_2}{K_2 + K_1} \right)}{d}$$

colocando os termos entre parênteses no mesmo denominador ($K_2 + K_1$), escrevemos

$$\begin{aligned} \phi_1 &= K_1 \cdot \frac{A \cdot \left(\frac{T_1 \cdot (K_2 + K_1) - K_1 \cdot T_1 - K_2 \cdot T_2}{K_2 + K_1} \right)}{d} \\ \phi_1 &= K_1 \cdot \frac{A}{d} \cdot \left(\frac{K_2 \cdot T_1 + K_1 \cdot T_1 - K_1 \cdot T_1 - K_2 \cdot T_2}{K_2 + K_1} \right) \\ \phi_1 &= K_1 \cdot \frac{A}{d} \cdot \left(\frac{T_1 \cdot K_2 - K_2 \cdot T_2}{K_2 + K_1} \right) \end{aligned}$$

colocando o termo $\frac{K_2}{K_2 + K_1}$ em evidência

$$\phi_1 = \frac{K_1 \cdot K_2}{K_1 + K_2} \cdot \frac{A \cdot (T_1 - T_2)}{d} \quad (IV)$$

A espessura total será de $2d$ (figura 2) e sendo K o coeficiente de condutibilidade térmica do conjunto o fluxo de calor através da parede como um todo pode ser escrito como

$$\phi = K \cdot \frac{A \cdot (T_1 - T_2)}{2d} \quad (V)$$

Como o regime de fluxo é estacionário as expressões (IV) e (V) deve ser iguais

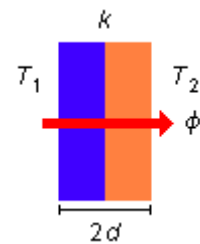


figura 2

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_1 \\ K \cdot \frac{A \cdot (T_1 - T_i)}{2d} &= \frac{K_1 \cdot K_2}{K_1 + K_2} \cdot \frac{A \cdot (T_1 - T_2)}{d} \\ \frac{K}{2} &= \frac{K_1 \cdot K_2}{K_1 + K_2}\end{aligned}$$

$$K = \frac{2 K_1 \cdot K_2}{K_1 + K_2}$$

observação: poderíamos substituir a expressão (III) em (II), o que nos levaria a

$$\phi_2 = K_2 \cdot \frac{A \cdot \left(\frac{K_1 \cdot T_1 + K_2 \cdot T_2}{K_2 + K_1} - T_2 \right)}{d_1}$$

colocando os termos entre parênteses no mesmo denominador ($K_2 + K_1$), escrevemos

$$\begin{aligned}\phi_2 &= K_2 \cdot \frac{A \cdot \left(\frac{K_1 \cdot T_1 + K_2 \cdot T_2 - T_2 \cdot (K_2 + K_1)}{K_2 + K_1} \right)}{d} \\ \phi_2 &= K_2 \cdot \frac{A}{d} \cdot \left(\frac{K_1 \cdot T_1 + K_2 \cdot T_2 - K_2 \cdot T_2 - K_1 \cdot T_2}{K_2 + K_1} \right) \\ \phi_2 &= K_2 \cdot \frac{A}{d} \cdot \left(\frac{K_1 \cdot T_1 - K_1 \cdot T_2}{K_2 + K_1} \right)\end{aligned}$$

colocando o termo $\frac{K_1}{K_2 + K_1}$ em evidência

$$\phi_2 = \frac{K_1 \cdot K_2}{K_1 + K_2} \cdot \frac{A \cdot (T_1 - T_2)}{d}$$

Este resultado é equivalente a expressão (IV) encontrada acima.