

Quatro barras de ferro, tendo todas o mesmo comprimento L a 0°C , formam um losango, articulado e uma das diagonais deste losango é constituída por uma barra de latão cujo comprimento é $2L_1$ a 0°C . Calcular qual deve ser a relação $\frac{L_1}{L}$ para que distância entre os vértices livres se mantenha constante a qualquer temperatura. É conhecida a razão $\frac{\alpha}{\alpha_1}$, entre os coeficientes de dilatação linear do ferro e do latão, e são desprezíveis os quadrados desses coeficientes.

Dados do problema

- comprimento das barras de ferro a 0°C : L ;
- comprimento da barra de latão a 0°C : L_1 ;
- relação entre os coeficientes de dilatação linear do ferro e do latão: $\frac{\alpha}{\alpha_1}$.

Esquema do problema

Depois de uma alteração na temperatura (Δt) vamos chamar o comprimento final das barras de ferro de L_f e o comprimento final da barra de latão de L_{1f} , como queremos que não haja variação na distância entre as extremidades livres do losango chamaremos esta distância de $2x$ nas duas situações (figura 1).

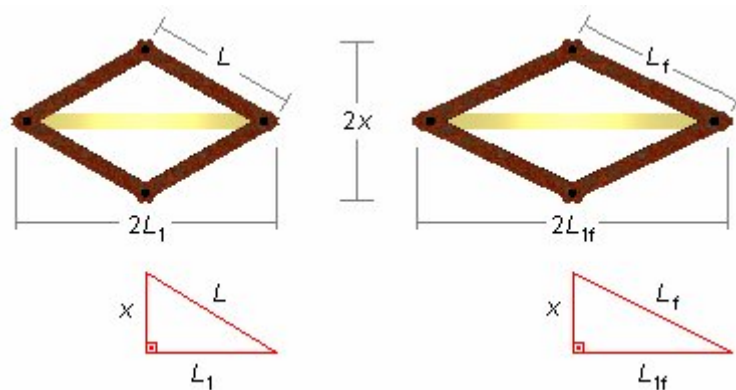


figura 1

Solução

A partir do sistema de barras mostrado na figura 1 podemos desenhar os triângulos mostrados na figura, onde aplicando o *Teorema de Pitágoras* a eles temos

$$L^2 = x^2 + L_1^2 \quad (\text{I})$$

$$L_f^2 = x^2 + L_{1f}^2 \quad (\text{II})$$

A expressão para a dilatação linear de um corpo é

$$L = L_0 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t)$$

Aplicando esta fórmula para a barra de ferro, temos

$$L_f = L \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t) \quad (\text{III})$$

Para a barra de latão escrevemos

$$L_{1f} = L_1 \cdot (1 + \alpha_1 \cdot \Delta t) \quad (IV)$$

subtraindo (II) de (I), temos

$$\begin{aligned} L^2 &= x^2 + L_1^2 \\ (-) \quad L_f^2 &= x^2 + L_{1f}^2 \\ \hline L^2 - L_f^2 &= 0 + L_1^2 - L_{1f}^2 \\ L^2 - L_f^2 &= L_1^2 - L_{1f}^2 \quad (V) \end{aligned}$$

substituindo (III) e (IV) em (V), escrevemos

$$\begin{aligned} L^2 - [L \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t)]^2 &= L_1^2 - [L_1 \cdot (1 + \alpha_1 \cdot \Delta t)]^2 \\ L^2 - L^2 \cdot (1 + \alpha \cdot \Delta t)^2 &= L_1^2 - L_1^2 \cdot (1 + \alpha_1 \cdot \Delta t)^2 \end{aligned}$$

os termos entre parênteses são produtos notáveis da forma $(a+b)^2 = a^2 + 2 \cdot a \cdot b + b^2$, desenvolvendo estes termos ficamos com

$$\begin{aligned} L^2 - L^2 \cdot (1 + 2 \cdot \alpha \cdot \Delta t + \alpha^2 \cdot \Delta t^2) &= L_1^2 - L_1^2 \cdot (1 + 2 \cdot \alpha_1 \cdot \Delta t + \alpha_1^2 \cdot \Delta t^2) \\ L^2 - L^2 - 2 \cdot L^2 \cdot \alpha \cdot \Delta t - L^2 \cdot \alpha^2 \cdot \Delta t^2 &= L_1^2 - L_1^2 - 2 \cdot L_1^2 \cdot \alpha_1 \cdot \Delta t - L_1^2 \cdot \alpha_1^2 \cdot \Delta t^2 \\ 2 \cdot L^2 \cdot \alpha \cdot \Delta t + L^2 \cdot \alpha^2 \cdot \Delta t^2 &= 2 \cdot L_1^2 \cdot \alpha_1 \cdot \Delta t + L_1^2 \cdot \alpha_1^2 \cdot \Delta t^2 \end{aligned}$$

o problema nos diz que os quadrados dos coeficientes de dilatação são desprezíveis, então podemos “jogar fora” os termos $L^2 \cdot \alpha^2 \cdot \Delta t^2$ e $L_1^2 \cdot \alpha_1^2 \cdot \Delta t^2$ reduzindo a expressão acima para

$$2 \cdot L^2 \cdot \alpha \cdot \Delta t = 2 \cdot L_1^2 \cdot \alpha_1 \cdot \Delta t$$

que simplificando dá

$$L^2 \cdot \alpha = L_1^2 \cdot \alpha_1$$

$$\frac{L_1^2}{L^2} = \frac{\alpha}{\alpha_1}$$

$$\left(\frac{L_1}{L} \right)^2 = \frac{\alpha}{\alpha_1}$$

$$\boxed{\frac{L_1}{L} = \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha_1}}}$$