

Dois espelhos planos formam entre si um certo ângulo. Calcular esse ângulo, sabendo-se que se reduzindo esse ângulo de 15° o número de imagens, produzido pelo sistema de um dado objeto, é aumentado de 4.

Dados do problema

- ângulo na primeira situação: θ_1 ;
- ângulo na segunda situação: $\theta_2 = \theta_1 - 15^\circ$;
- número de imagens na primeira situação: n_1 ;
- número de imagens na segunda situação: $n_2 = n_1 + 4$.

Solução

Para dois espelhos formando um certo ângulo a expressão que dá o número de imagens é

$$n = \frac{360^\circ}{\theta} - 1$$

Escrevendo a expressão acima para as duas situações do problema e utilizando as condições dadas temos o seguinte conjunto de equações

$$n_1 = \frac{360^\circ}{\theta_1} - 1 \quad (I)$$

$$n_2 = \frac{360^\circ}{\theta_2} - 1 \quad (II)$$

$$\theta_2 = \theta_1 - 15^\circ \quad (III)$$

$$n_2 = n_1 + 4 \quad (IV)$$

Substituindo as expressões (III) e (IV) na expressão (II), obtemos

$$n_1 + 4 = \frac{360^\circ}{\theta_1 - 15^\circ} - 1$$

Agora substituindo n_1 acima pela expressão (I), temos

$$\begin{aligned} \frac{360^\circ}{\theta_1} - 1 + 4 &= \frac{360^\circ}{\theta_1 - 15^\circ} - 1 \\ \frac{360^\circ}{\theta_1} - 1 + 4 - \frac{360^\circ}{\theta_1 - 15^\circ} + 1 &= 0 \\ \frac{360^\circ}{\theta_1} - \frac{360^\circ}{\theta_1 - 15^\circ} + 4 &= 0 \end{aligned}$$

multiplicando todos os termos pelo produto dos denominadores, $\theta_1 \cdot (\theta_1 - 15^\circ)$

$$\frac{360^\circ}{\theta_1} \cdot \theta_1 \cdot (\theta_1 - 15^\circ) - \frac{360^\circ}{(\theta_1 - 15^\circ)} \cdot \theta_1 \cdot (\theta_1 - 15^\circ) + 4 \cdot (\theta_1 - 15^\circ) = 0$$

simplificando

$$\begin{aligned}
360^\circ \cdot (\theta_1 - 15^\circ) - 360^\circ \theta_1 + 4 \theta_1 \cdot (\theta_1 - 15^\circ) &= 0 \\
360^\circ \theta_1 - 5400^\circ - 360^\circ \theta_1 + 4 \cdot \theta_1^2 - 60^\circ \theta_1 &= 0 \\
4 \theta_1^2 - 60^\circ \theta_1 - 5400^\circ &= 0
\end{aligned}$$

dividindo toda a equação por 4, termos

$$\theta_1^2 - 15^\circ \theta_1 - 1350^\circ = 0$$

Esta é uma *Equação do 2.º Grau* em θ_1 , resolvendo vem

$$\begin{aligned}
\Delta = b^2 - 4 \cdot a \cdot c &= (15)^\circ{}^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1350) = 225 + 5400 = 5625 \\
\theta_1 &= \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{15 \pm \sqrt{5625}}{2 \cdot 1} = \frac{15 \pm 75}{2}
\end{aligned}$$

as raízes serão

$$\theta_1' = 45^\circ \quad \text{e} \quad \theta_1'' = 30^\circ$$

Usando as expressões (I), (II) e (III) para analisar os resultados vemos que para $\theta_1 = \theta_1' = 45^\circ$ temos que o número de imagens na primeira situação é igual a

$$n_1 = \frac{360^\circ}{45^\circ} - 1 = 7$$

Reduzindo-se o ângulo de 15° , temos na situação 2

$$\theta_2 = 45^\circ - 15^\circ = 30^\circ$$

$$n_2 = \frac{360^\circ}{30^\circ} - 1 = 11$$

o número de imagens passou de 7 para 11, aumentando de 4.

Para $\theta_1 = \theta_1'' = 30^\circ$ o número inicial de imagens é $n_1 = 11$ (análogo ao cálculo de n_2 acima).

Diminuindo o ângulo de 15° , a segunda situação fica

$$\theta_2 = 30^\circ - 15^\circ = 15^\circ$$

$$n_2 = \frac{360^\circ}{15^\circ} - 1 = 23$$

o número de imagens passou de 11 para 23, um aumento de 12 imagens.

Assim a resposta que nos interessa é

$$\boxed{\theta_1 = 45^\circ}$$