

Um ponto luminoso é colocado simetricamente em relação a dois espelhos planos que formam entre si um ângulo de 120° , a $20\sqrt{3}$ cm da aresta. Determine a distância entre as duas imagens.

Construção da imagem

Desenhamos o ponto luminoso P numa posição simétrica em relação aos espelhos E_1 e E_2 .

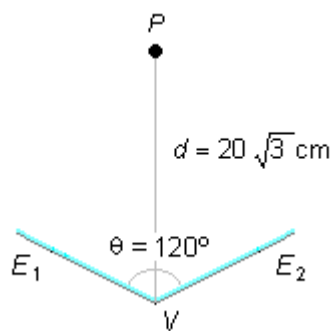


figura 1

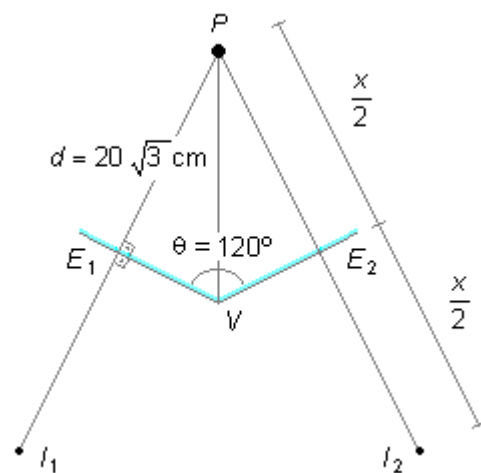


figura 2

A partir do ponto P traçamos uma reta perpendicular ao espelho E_1 e marcamos atrás do espelho a mesma distância de P a imagem I_1 , analogamente para o espelho E_2 teremos a imagem I_2 , sendo x a distância do ponto luminoso até as imagens.

Esquema do problema

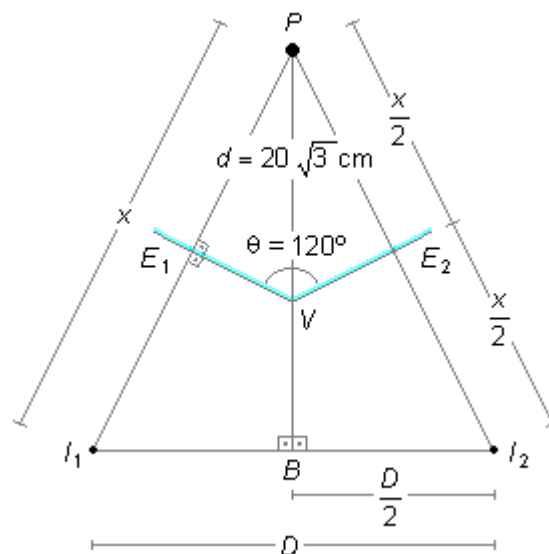


figura 3

Dados do problema

- ângulo entre os espelhos: $\theta = 120^\circ$;
- distância do ponto luminoso ao vértice: $d = 20\sqrt{3} \text{ cm}$.

Solução

Como o ponto P está colocado simetricamente em relação aos espelhos E_1 e E_2 , o segmento de reta $\overline{PV}$ é bissetriz do ângulo $\theta = 120^\circ$, assim ângulo α é igual a 60° (ver figura 3). O segmento de reta que liga o ponto P a imagem I_2 (I_1) é perpendicular ao espelho E_2 (E_1), assim o triângulo $\triangle PE_2V$ é um triângulo retângulo, sendo que o lado que mede $\frac{x}{2}$ é um dos catetos e o segmento $\overline{PV} = d = 20\sqrt{3}$ é a hipotenusa do triângulo, calculando o seno de α temos

$$\begin{aligned}\sin \alpha &= \frac{\frac{x}{2}}{d} \\ \sin 60^\circ &= \frac{\frac{x}{2}}{20\sqrt{3}} \\ \frac{x}{2} &= 20\sqrt{3} \sin 60^\circ \\ \frac{x}{2} &= 20\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{x}{2} &= 30 \\ x &= 2 \cdot 30\end{aligned}$$

assim a distância x entre o ponto P e a imagem I_2 (I_1) mede

$$x = 60 \text{ cm}$$

O segmento de reta $\overline{PE_2}$ é perpendicular ao espelho E_2 (forma um ângulo de 90° com ele), o ângulo α é igual a 60° , como vimos, e como a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180° , temos que o ângulo β deve ser

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + 90^\circ &= 180^\circ \\ \beta &= 180^\circ - 90^\circ - \alpha \\ \beta &= 180^\circ - 90^\circ - 60^\circ \\ \beta &= 60^\circ\end{aligned}$$

O triângulo $\triangle PBI_2$ é um triângulo retângulo, sendo que o lado que mede $\frac{D}{2}$ é um dos catetos e a hipotenusa do triângulo é $x = 60 \text{ cm}$, calculando o co-seno de β temos

$$\begin{aligned}\cos \beta &= \frac{\frac{D}{2}}{x} \\ \cos 60^\circ &= \frac{\frac{D}{2}}{60}\end{aligned}$$

$$\frac{D}{2} = 60 \cos 60^\circ$$

$$\frac{D}{2} = 60 \cdot \frac{1}{2}$$

$$\frac{D}{2} = 30$$

$$D = 2 \cdot 30$$

e finalmente a distância D entre as imagens será

$$D = 60 \text{ cm}$$